Nevlastní integrál

Lenka Přibylová

3. srpna 2006

Obsah

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \,\mathrm{d}x$.

Najděte $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \,\mathrm{d}x$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \,\mathrm{d}x$$

V horní mezi má integrál singularitu vlivem meze. Navíc má singularitu uvnitř intervalu integrace v bodě $x = 1$, protože zde funkce není definovaná. Jde o výraz typu $\left\|\frac{1}{0}\right\|$. Nelze spočítat určitý integrál, protože v $x = 1$ neexistuje primitivní funkce a interval integrace je nekonečný.

Najděte $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x$$

Rozdělíme integrál na dva. První má sigularitu v horní mezi vlivem funkce. Druhý má dvě singularity - v dolní mezi vlivem funkce, v horní mezi vlivem meze.

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, \mathrm{d}x$$

Druhý integrál rozdělíme na dva např. v bodě $x = 2$. Každý integrál má nyní pouze jednu singularitu.

Najděte $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{t\to 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 1^+} \int_{t}^{2} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty} \int_{2}^{t} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t z levého okolí $x = 1$ je nyní první integrál určitý, podobně další dva, lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli. Najdeme primitivní funkci v pomocném výpočtu.

Najděte $\displaystyle\int_{\frac12}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_{\frac12}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac12}^{1} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac12}^{1} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to1^-}\int_{\frac12}^{t} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to1^+}\int_{t}^{2} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty}\int_{2}^{t} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to1^-}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{\frac12}^{t} + \lim_{t\to1^+}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{t}^{2} + \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{2}^{t}$$

$$\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned}\ln x &= t\\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t\end{aligned}} = \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx + \lim_{t \to 1^+} \int_{t}^{2} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx + \lim_{t \to \infty} \int_{2}^{t} \frac{1}{x \ln^2 x} \, dx$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_{\frac{1}{2}}^{t} + \lim_{t \to 1^+} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_{t}^{2} + \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_{2}^{t}$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \right) + \lim_{t \to 1^+} \left(-\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln t} \right) + \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 2} \right)$$

Dosadíme meze.

Najděte $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Spočteme limity. Integrál diverguje.

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{1}{\ln t} = \left\| \frac{1}{0^-} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{t\to 1^+} \frac{1}{\ln t} = \left\| \frac{1}{0^+} \right\| = \infty$$

$$\lim_{t\to \infty} \frac{1}{\ln t} = \left\| \frac{1}{\infty} \right\| = 0$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \right) + \lim_{t\to 1^+} \left(-\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln t} \right) + \lim_{t\to \infty} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 2} \right)$$

$$= \infty + \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} + \infty$$

Konec