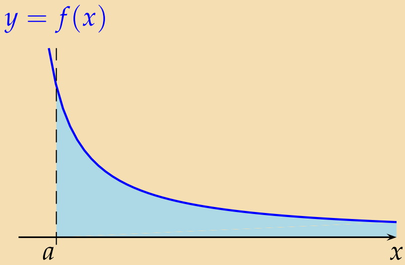
Nevlastní integrál vlivem meze

Lenka Přibylová

3. srpna 2006

Obsah

Definice - singularita v horní mezi



$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} [F(t) - F(a)]$$

Najděte $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Najděte $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

V horní mezi má integrál singularitu. Nelze spočítat určitý integrál, protože je interval integrace nekonečný.

Najděte $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t v okolí ∞ je nyní integrál určitý, Najděte $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^{t}$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)$$

Dosadíme meze.

Najděte $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Spočteme limitu.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0$$

Najděte $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

Najděte $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

V horní mezi má integrál singularitu. Nelze spočítat určitý integrál, protože je interval integrace nekonečný.

Najděte $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t v okolí ∞ je nyní integrál určitý,

Najděte $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\Big[\ln|x|\Big]_1^t$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \big[\ln|x|\big]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} \big(\ln|t| - \ln 1\big)$$

Dosadíme meze.

Najděte $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

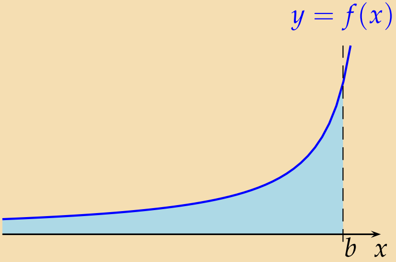
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \big[\ln|x|\big]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} \big(\ln|t| - \ln 1\big) = \infty$$

Spočteme limitu.

$$\lim_{t\to\infty} \ln|t| = \infty$$

Limita je nevlastní, integrál proto diverguje.

Definice - singularita v dolní mezi



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} [F(b) - F(t)]$$

Najděte $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

Najděte $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

V dolní mezi má integrál singularitu. Nelze spočítat určitý integrál, protože je interval integrace nekonečný.

$\boxed{\text{Najděte } \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.}$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t v okolí $-\infty$ je nyní integrál určitý,

Najděte $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_t^0$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_{t}^{0}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} t\right)$$

Dosadíme meze.

Najděte $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

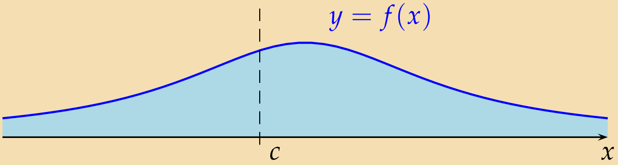
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_t^0$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} t\right) = \frac{\pi}{2}$$

Spočteme limitu.

$$\lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg} t = -\frac{\pi}{2}$$

Definice - singularity v obou mezích



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty} \int_{c}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \, \mathrm{d}x.$

Najděte $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x$$

Integrál má singularity v obou mezích. Nelze spočítat určitý integrál, protože je interval integrace nekonečný.

Najděte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x$$

Rozdělíme na dva nevlastní integrály s jednou singularitou.

Najděte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \mathrm{d}x$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t v okolí $\pm\infty$ jsou nyní integrály určité,

Najděte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \mathrm{d}x$$
$$= \lim_{t\to-\infty} [x]_{t}^{0} + \lim_{t\to\infty} [x]_{0}^{t}$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli. Hledáme primitivní funkci k 1 v proměnné x.

Najděte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \mathrm{d}x$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\left[x\right]_{t}^{0} + \lim_{t\to\infty}\left[x\right]_{0}^{t} = \lim_{t\to-\infty}(0-t) + \lim_{t\to\infty}(t-0)$$

Dosadíme meze.

Najděte $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[x\right]_{t}^{0} + \lim_{t\to\infty} \left[x\right]_{0}^{t} = \lim_{t\to-\infty} (0-t) + \lim_{t\to\infty} (t-0) = \infty$$

Spočteme limity. Integrál diverguje.

Konec