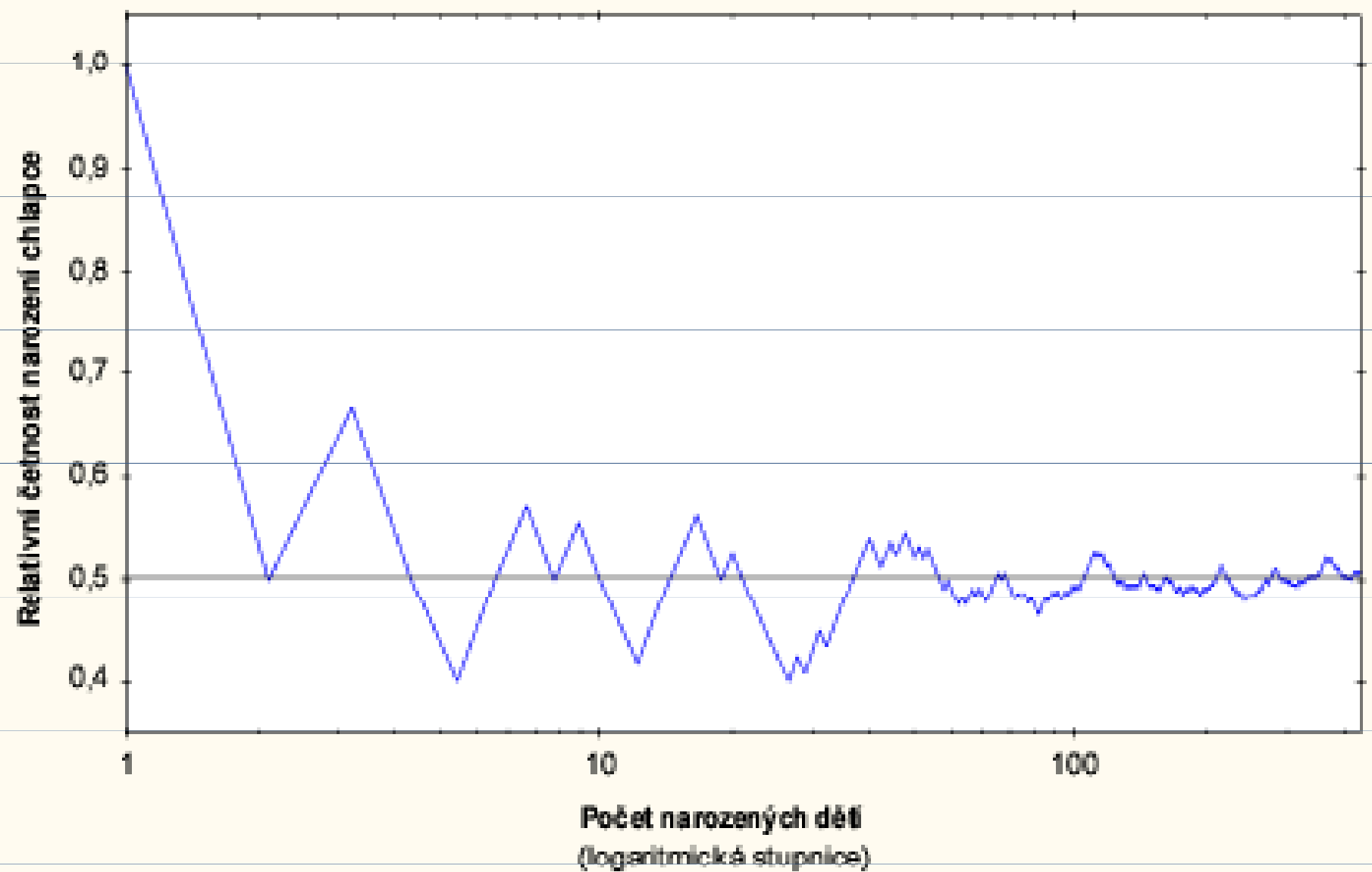


5. Pravděpodobnost

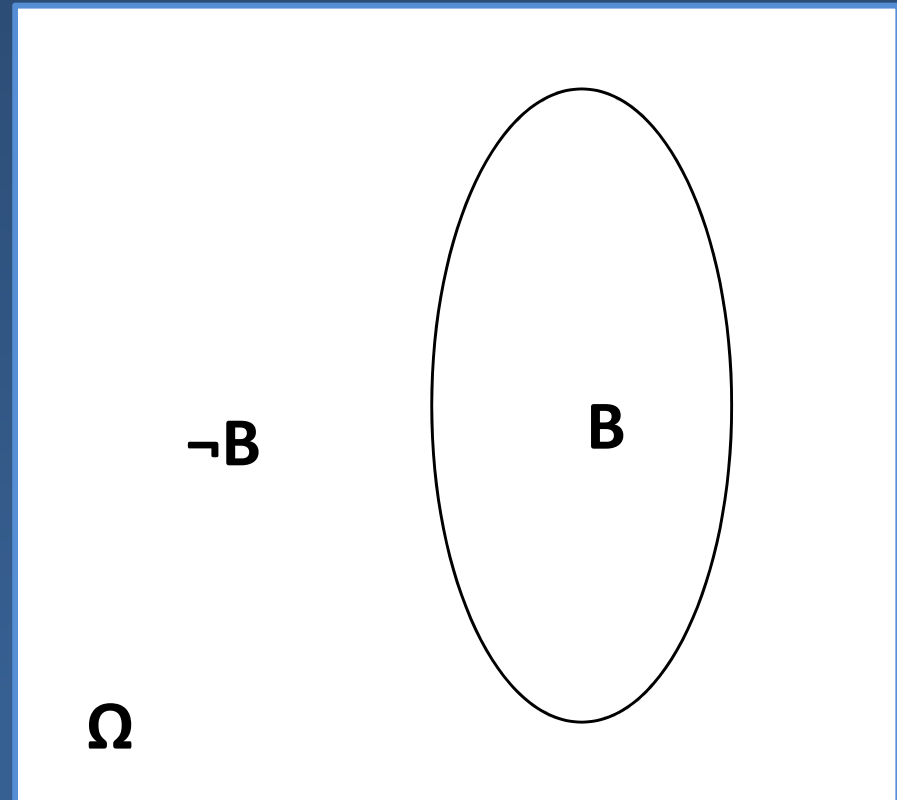
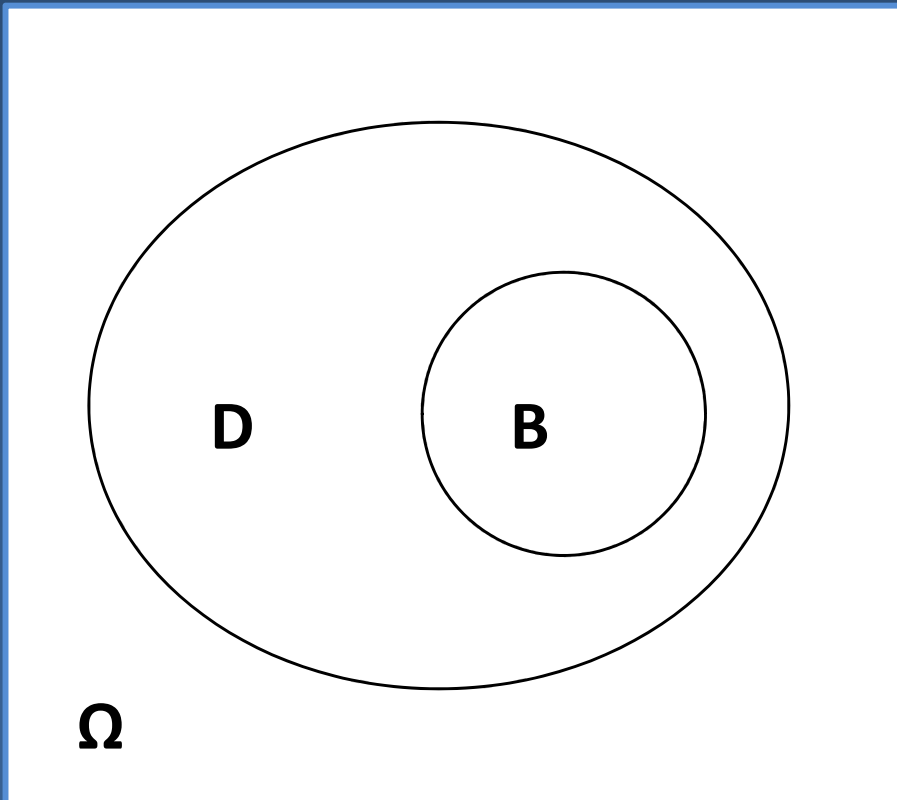
- Náhodný pokus – výsledek není jednoznačně předurčen podmínkami, mnohokrát opakovatelné (hod kostkou, mincí, tahání losů)
- Náhodný jev – tvrzení o výsledku, po provedení pokusu lze rozhodnout, zda platí nebo ne (A – „narození chlapce“, $\neg A$ – „narození dívky“)
- Četnost r/n – r – počet narozených chlapců, n – rozsah výběru
- r – absolutní četnost
- r/n – relativní četnost výskytu náhodného jevu A ve výběru o rozsahu n

Spojnicový graf



$$B \subset D \Rightarrow P(B) \leq P(D)$$

$$P(\neg B) = 1 - P(B)$$



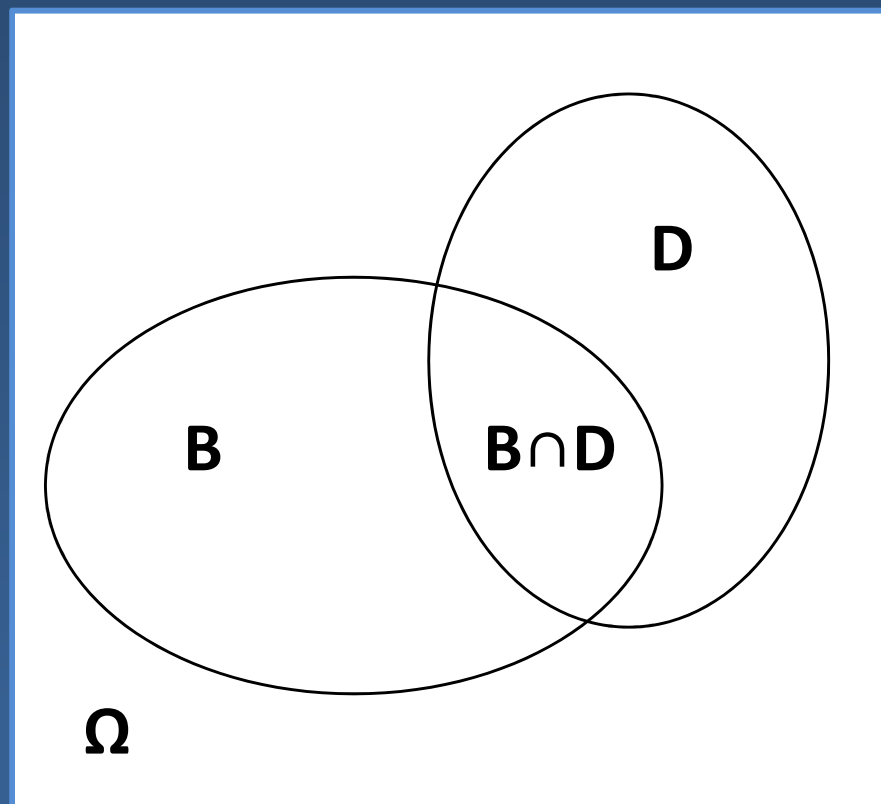
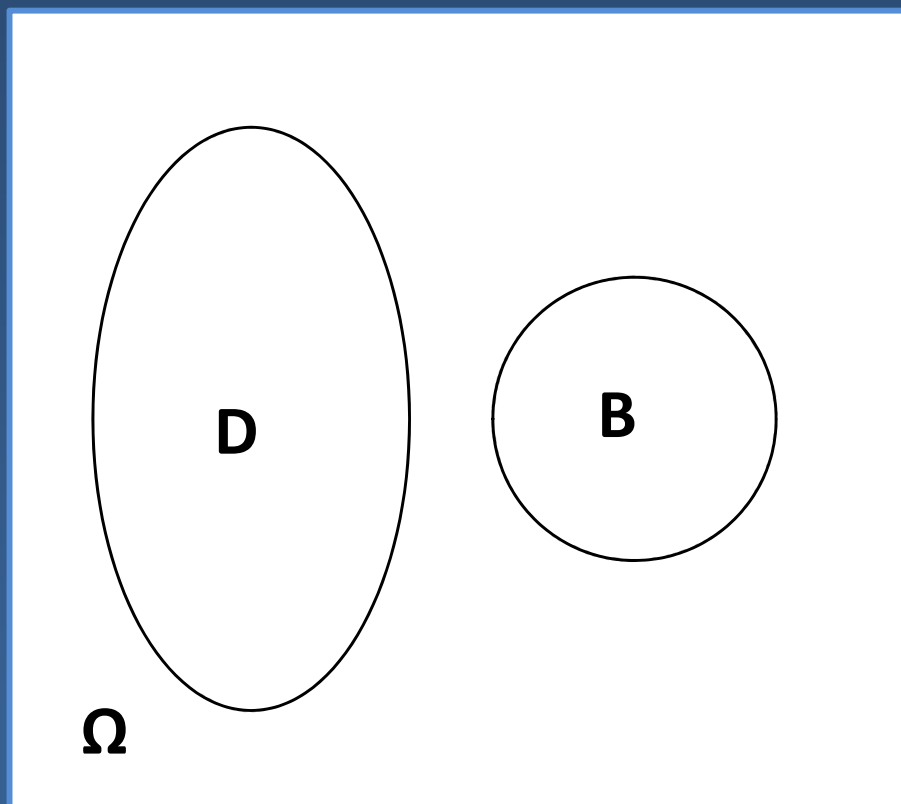
$$B \cap D = \emptyset \Rightarrow$$

$$P(B \cup D) = P(B) + P(D)$$

Obecný vzorec:

$$P(B \cup D) =$$

$$P(B) + P(D) - P(B \cap D)$$



Definice pravděpodobnosti

- Jev A je charakterizován číslem $P(A) = \text{pst}$ náhodného jevu A (míra častosti výskytu tohoto jevu)
- Vlastnosti pst :
 - $0 \leq P(A) \leq 1$
 - $P(\Omega) = 1 \Rightarrow$ jistý jev
 - $P(\emptyset) = 0 \Rightarrow$ nemožný jev
 - $P(\neg A) = 1 - P(A)$
 - $B \cap D = \emptyset \Rightarrow P(B \cup D) = P(B) + P(D)$
 - $P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D)$
 - $B \subset D \Rightarrow P(B) \leq P(D)$ podjev
- Při mnohonásobném opakování se relativní četnost A jen nepatrně liší od $P(A)$

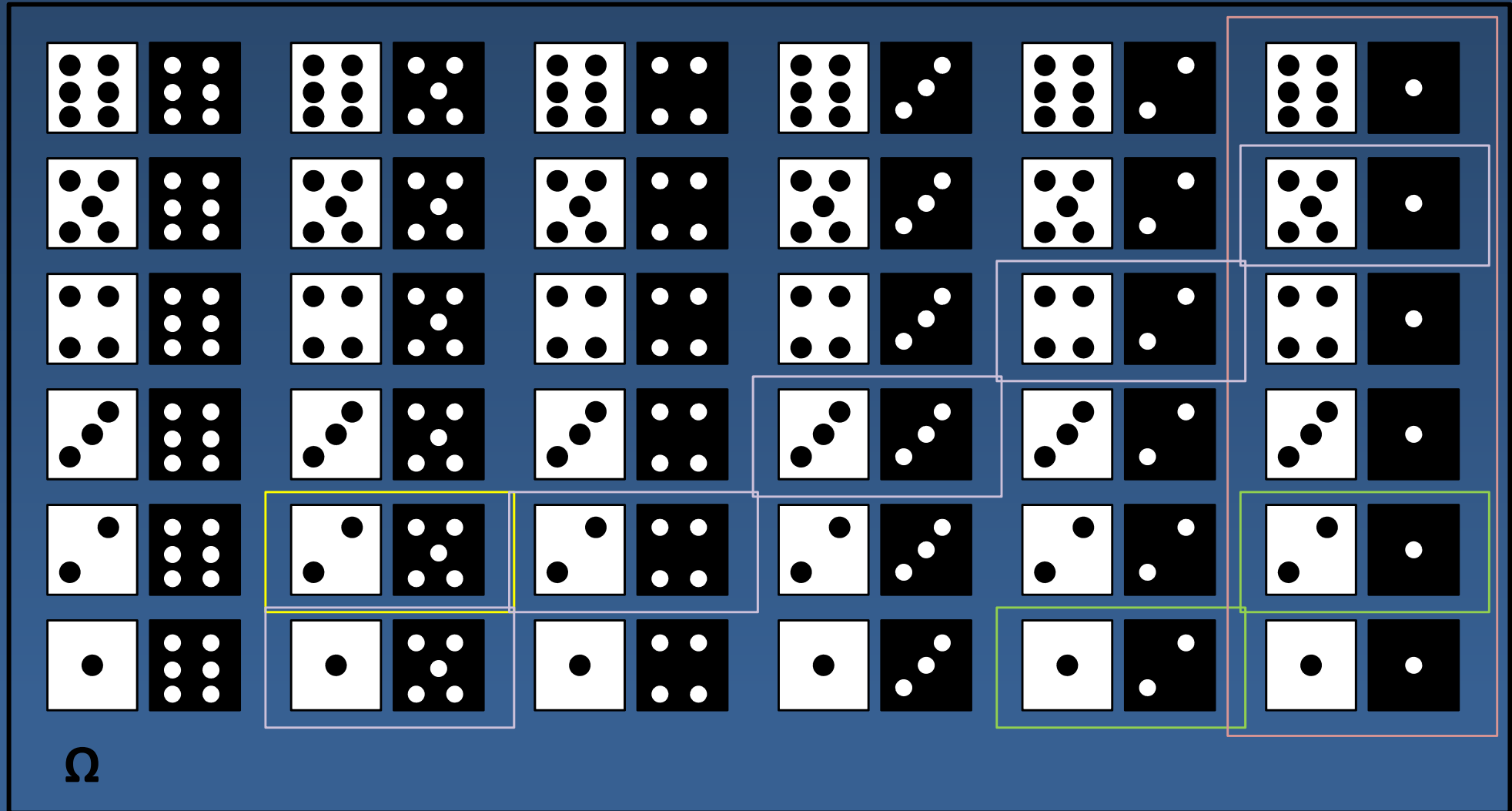
Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Podmíněná pravděpodobnost jevu A vzhledem k jevu B
- Pst současného výskytu jevu A a B :

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Příklad 1: házení 2 vyváženými kostkami



$$P(\text{černá } 5, \text{ bílá } 2) = 1/36$$

$$P(\text{součet} = 3) = 2/36$$

$$P(\text{na černé padne } 1) = 6/36$$

$$P(\text{součet} = 6) = 5/36$$

Příklad 2: rodina; 3 sourozenci

ω_i	D	B	$B \cap D$	$B \cup D$	C
(m,m,m)					
(f,m,m)					
(m,f,m)					
(f,f,m)					
(f,f,f)					
(m,f,f)					
(f,m,f)					
(m,m,f)					

D nejmladší je dívka

B v rodině je jediná dívka

$B \cap D$ jediná dívka je nejmladší

$B \cup D$

C nejstarší je hoch

Kvalita screeningového testu

- Jevy D^+ osoba nemoc má, D^- osoba nemoc nemá
- Pozitivní výsledek testu T^+ , negativní výsledek T^-
- $P(D^+)$ - prevalence

	Nemoc		
Výsledek testu	Přítomna (D^+)	Nepřítomna (D^-)	Celkem
T^+	a	b	$a+b$
T^-	c	d	$c+d$
Celkem	$a+c$	$b+d$	n

Kvalita screeningového testu

- Senzitivita (SE) = $P(T^+ | D^+)$ $SE = \frac{a}{a+c}$
- Specificita (SP) = $P(T^- | D^-)$ $SP = \frac{d}{b+d}$
- Falešná pozitivita (FP) = $\frac{b}{b+d}$
- Falešná negativita (FN) = $\frac{c}{a+c}$
- $SE + FN = 1$, $SP + FP = 1$

Kvalita screeningového testu

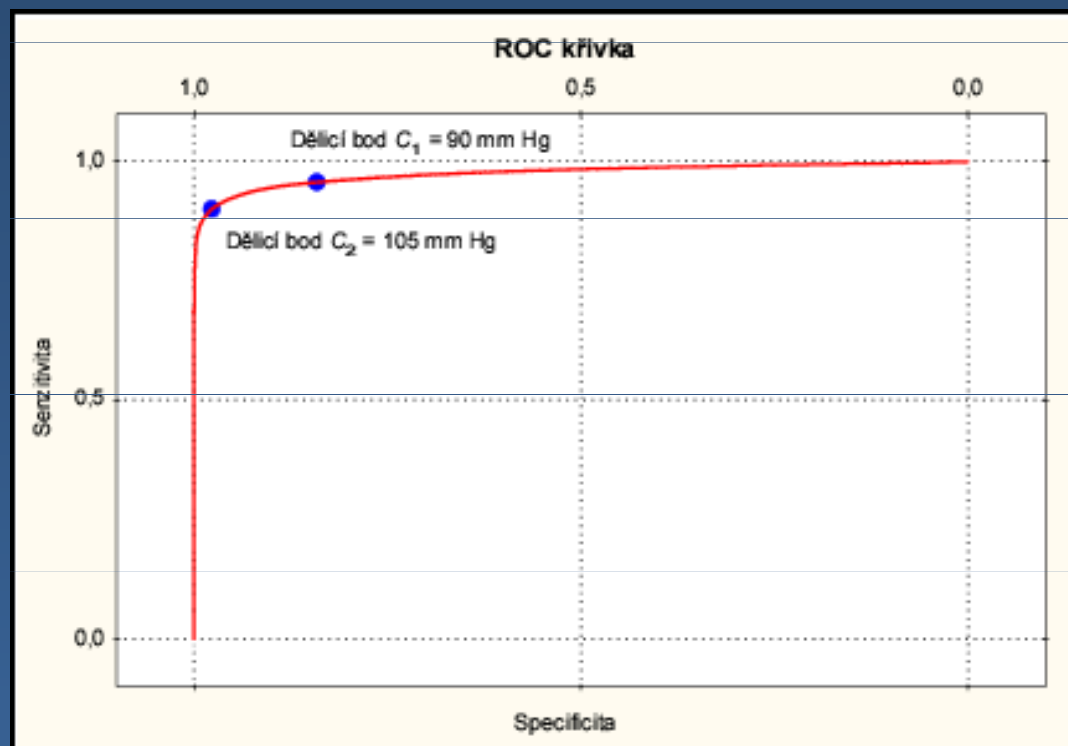
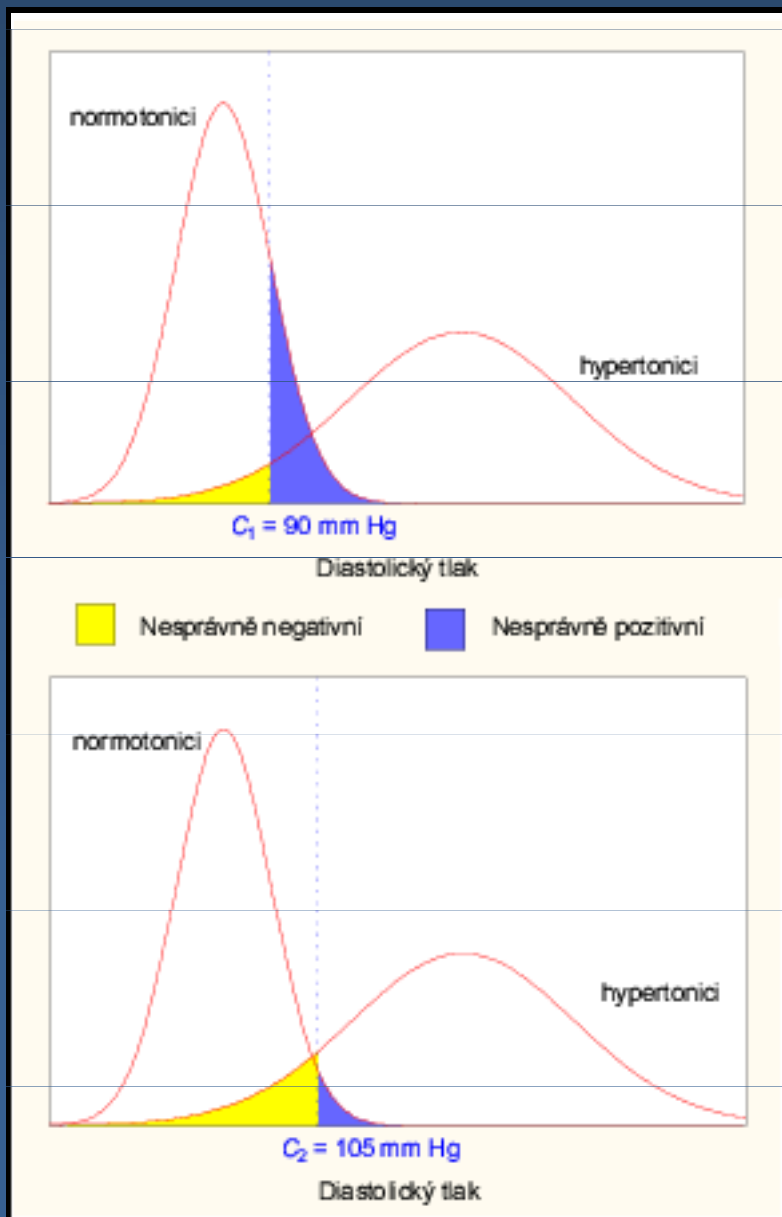
- Pozitivní prediktivní hodnota (PV^+) $P(D^+|T^+)$

$$PV^+ = \frac{a}{a+b}$$

- Negativní prediktivní hodnota (PV^-) $P(D^-|T^-)$

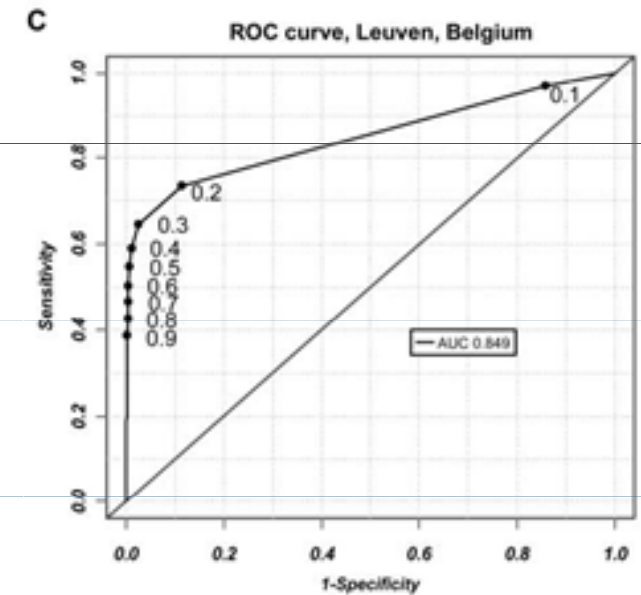
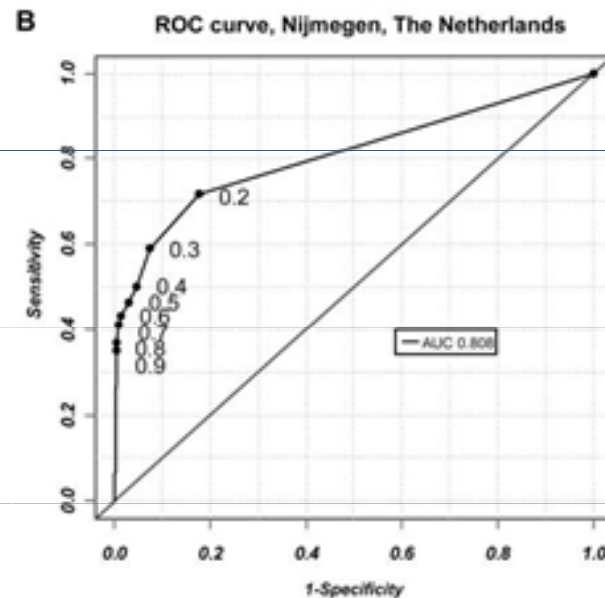
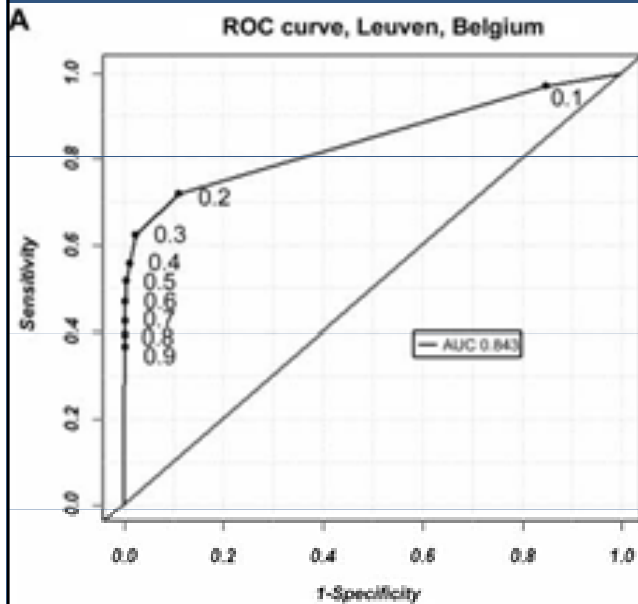
$$PV^- = \frac{d}{c+d}$$

ROC (Receiver Operating Characteristic) křivka



ROC v praxi

- Detekce aspergilózy
- Měření OD (optical density)



Příklad

- Vzácným onemocněním onemocní 1 osoba z 1000
- Existuje test s vlastnostmi: u nemocného je výsledek testu pozitivní v 99% případů (SE = 99%)
- 2% zdravých má výsledek testu pozitivní (FP = 2%)
- Jaká je pst, že osoba s pozitivním výsledkem testu je skutečně nakažená zkoumanou nemocí?

Příklad

- $P(D^+) = 0,001$ – 1 pacient z 1000 trpí onemocněním
- $P(T^+ | D^+) = 0,99$ – pst pozitivního testu u nemocného
- $P(T^+ | D^-) = 0,02$ – pst falešně pozitivního výsledku u zdravého
- $P(D^+ | T^+) = a/(a+b)$
- $P(D^+ \cap T^+) = P(T^+ | D^+)P(D^+) = 0,99 \times 0,001 = 0,00099$
- $P(D^- \cap T^+) = P(T^+ | D^-)P(D^-) = 0,02 \times 0,999 = 0,01998$

	D ⁺	D ⁻		
T ⁺	0,00099	0,01998	0,02097	P(T ⁺)
T ⁻	0,00001	0,97902	0,97903	P(T ⁻)
	0,001	0,999	1	
	P(D ⁺)	P(D ⁻)		



	D ⁺	D ⁻	
T ⁺	1	20	21
T ⁻	0	979	979
	1	999	1000

$$a/(a+b) = 0,00099/0,02097 = 0,0472$$