Maticový počet

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bf \\ ce+df \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ca + bd$$

Maticový počet v geometrické optice

Pokusíme se sestavit jednoduchý formalizmus, který by nám v rámci geometrické optiky umožnil jednotným a přehledným způsobem studovat vlastnosti optických soustav. Chod paprsků optickou soustavou je v přiblížení geometrické opticky podřízen pouze Snellovu zákonu; pro dvě prostředí o indexech lomu n, n', oddělená rovinným rozhraním platí

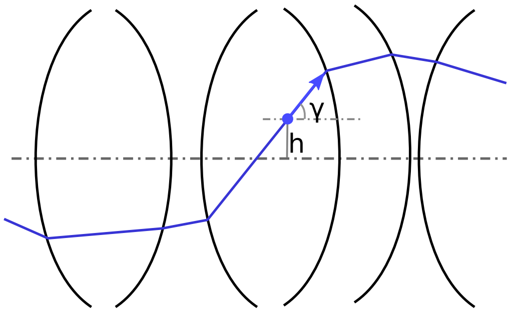
$$n \sin \alpha = n' \sin \alpha',$$

kde α a α' jsou normálové úhly, po kterými se paprsky šíří v příslušných prostředích.

Z důvodů goniometrických funkcí, které ve Snellově zákonu vystupují je však poměrně obtížné i poměrně jednoduché optické soustavy trasovat analytickým výpočtem. Pokusíme se tedy využít paraxiálního přiblížení, které Snellův zákon linearizuje do tvaru

$$n\alpha \doteq n'\alpha',$$

a výpočty tak výrazně ulehčuje. Cenou za tuto aproximaci bude nutnost zdržovat se v blízkosti optické osy a pod malými úhly k ní (tyto úhly přitom musíme měřit v radiánech).



Dále budeme předpokládat, že zkoumaná soustava je osově symetrická, tedy že existuje společná osa, na které jsou všechno optické elementy centrovány, pro jednoduchost budeme uvažovat pouze kulové povrchy (toto omezení v sobě samozřejmě zahrnuje i povrch rovinný jako speciální případ koule s velkým poloměrem).

Každý paprsek v takovém systému je popsán dvěma parametry: svou okamžitou vzdáleností h od optická osy a úhlem γ, který aktuálně s optickou osou svírá. Tyto dva parametry lze pohodlně sestavit do sloupcového vektoru

$$\begin{pmatrix} h \\ n\gamma \end{pmatrix}$$

a optickou soustavu $\mathbf{M}$ chápat jako předpis, který vstupní světlo transformuje na světlo výstupní:

$$\begin{pmatrix} h' \\ n'\gamma' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} h \\ n\gamma \end{pmatrix}.$$

Index lomu (v aktuálním místě, kde se paprsek nachází) byl do sloupcového vektoru přidán především z matematických důvodů (jak uvidíme později), na druhou stranu jedná se o třetí a poslední parametr, který se k šíření paprsku vztahuje, takže jeho explicitní uvedení má i fyzikální smysl.

Vzhledem k linearitě paraxiálního přiblížení se ukazuje, že $\mathbf{M}$ musí být matice 2x2,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Uvažujme tedy průchod dvěma po sobě jdoucími úseky optické soustavy,

$$\begin{pmatrix} h' \\ n'\gamma' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} h \\ n\gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} h'' \\ n''\gamma'' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} h' \\ n'\gamma' \end{pmatrix}.$$

Příjemným důsledkem paraxiální aproximace pak bude skutečnost, že celkový průchod optickou soustavou se spočte jednoduše pomocí maticového násobení:

$$\begin{pmatrix} h'' \\ n''\gamma'' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} h' \\ n'\gamma' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} h \\ n\gamma \end{pmatrix},$$

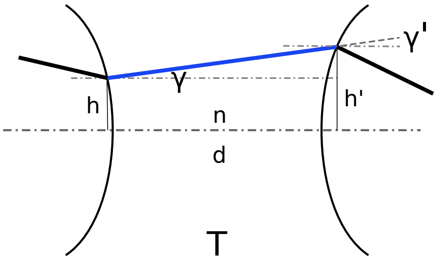
musíme jen vždy myslet nato, že matice se do součinu $\mathbf{M}=\ldots\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$ řadí zdánlivě v opačném pořadí, než odpovídá průletu soustavou. Pokud se však na zápis podíváme pozorněji, zjistíme, že je to správně: díky řazení matic zprava doleva světlo

$$\begin{pmatrix} h \\ n\gamma \end{pmatrix}$$

nejprve 'narazí' na matici $\mathbf{M}_1$ první části soustavy, teprve potom na $\mathbf{M}_2$ druhé části atd. Zároveň je vidět, že zavedení indexu lomu do sloupcového vektoru pro světlo nepředstavuje zásadní komplikaci - všechny vnitřní součiny se vykompenzují a zůstane jen index lomu před soustavu a za ní.

Zavedený formalizmus je velmi názorný: jakýkoliv sloupcový vektor představuje světlo, jakákoliv matice představuje optický prvek. Vynásobíme-li několik matic za sebou, získáme opět matici, čili kombinace optických prvků je opět optický prvek. Vynásobíme-li matici a sloupcový vektor, získáme sloupcový vektor, čili po průchodu světla optickým prvkem nám zůstane opět světlo.

Když se zamyslíme nad dalším postupem, uvědomíme si, že z optického hlediska se průchod světla libovolně složitým optickým systémem sestává pouze ze dvou motivů: světlo buďto letí homogenním prostředím, nebo se láme na rozhraní. Pokud by se nám podařilo najít matice popisující tyto dva typy chování, dokázali bychom s jejich pomocí paraxiálně trasovat libovolnou optickou soustavu.



Zaměřme se nejprve na jednodušší případ pohybu světla v homogenním prostředí o indexu lomu n mezi dvěma obecně zakřivenými povrchy. Vzhledem k paraxiálnímu přiblížení (paprsky jsou blízko optické osy) není potřeba uvažovat zakřivení povrchů a všechny paprsky mezi nimi urazí stejnou horizontální vzdálenost d. Vzniklou matici označíme jako translační, $\mathbf{T}$.

Především je zřejmé, že přímočarým letem parsek nezmění svůj úhel vůči optické ose,

$$\gamma' = \gamma.$$

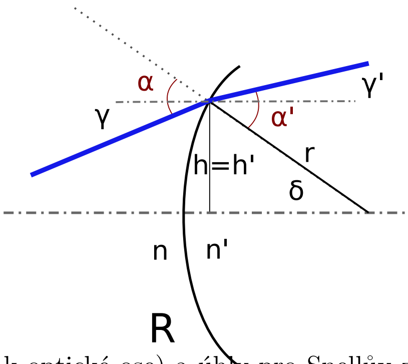
Změna vzdálenosti od optické osy je pak jednoduše dána jako

$$h' - h \doteq d\gamma,$$

kde bylo využita paraxiálního vztahu $\tan\gamma \doteq \gamma$. Uvedené dvě podmínky dávají potřebné komponenty translační matice, snadno se ověří, že

$$\begin{pmatrix} h' \\ n'\gamma' \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} h \\ n\gamma \end{pmatrix} \qquad \text{pro} \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde samozřejmě v tomto případě navíc platí $n' = n$.



Odvození refrakční matice je o něco komplikovanější. Zcela jistě se při refrakci nezmění poloha paprsku vůči optické ose,

$$h' = h. \tag{1}$$

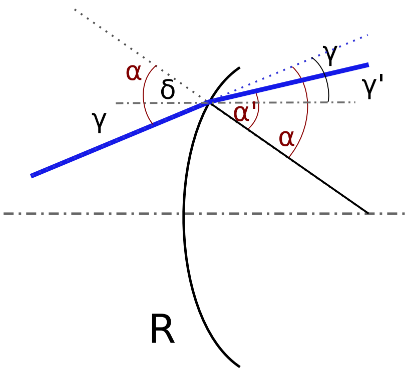
Díky skutečnosti, že uvažujeme kulové povrchy, se tato vzdálenost dá propojit s poloměrem křivosti rozhraní,

$$h \doteq r\delta, \tag{2}$$

kde jsme opět využili přibližného paraxiálního vyjádření $\tan\delta \doteq \delta$.

Konečně budeme muset nyní pečlivě rozlišovat úhly šíření paprsků (měří se vzhledem k optické ose) a úhly pro Snellův zákon (měří se vzhledem ke kolmici k rozhraní). Zde opět využijeme zjednodušení, které přináší zahrnutí pouze kulových povrchů: v takovém (a pouze v takovém) případě je totiž normála povrchu totožná s poloměrem koule v místě dotyku paprsku. Konkrétně Snellův zákon přináší

$$n\alpha \doteq n'\alpha'. \tag{3}$$



K dalšímu postupu potřebujeme jednotlivé úhly vyskytující se v úloze propojit. Za tím účelem si přeneseme přilétající paprsek i za rozhraní. Nyní je zřejmé, že platí

$$\alpha = \alpha' + \gamma - \gamma' \tag{4}$$

Zároveň si můžeme přenést úhel δ před rozhraní, pak vidíme, že platí

$$\alpha = \gamma + \delta. \tag{5}$$

Získané informace jsou již dostatečné ke stanovení refrakční matice **R**.

Nejprve s pomocí paraxiálního Snellova zákona (**3**) vyloučíme úhel α' z (**4**),

$$\alpha = \frac{n}{n'}\alpha + \gamma - \gamma',$$

a dosadíme za α z (**5**):

$$\left(1 - \frac{n}{n'}\right)\alpha = \left(1 - \frac{n}{n'}\right)(\gamma + \delta) = \gamma - \gamma'.$$

Nakonec dosadíme za δ z (**2**) a členy vhodně přerovnáme,

$$\left(1 - \frac{n}{n'}\right)\left(\gamma + \frac{h}{r}\right) = \gamma - \frac{n}{n'}\gamma + \frac{n' - n}{n'}\frac{h}{r} = \gamma - \gamma'.$$

Členy γ se vyruší a můžeme přenásobit indexem lomu n' do konečného tvaru

$$n'\gamma' = n\gamma - (n' - n)\frac{h}{r}.$$

Spolu s podmínkou (**1**), $h'{=}h$, umožňuje poslední rovnice již sestavit refrakční matici,

$$\begin{pmatrix} h' \\ n'\gamma' \end{pmatrix} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} h \\ n\gamma \end{pmatrix} \qquad \text{pro} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n'-n}{r} & 1 \end{pmatrix}.$$

Levý spodní člen v refrakční matici má (až na znaménko) význam mohutnosti rozhraní φ (v dioptriích),

$$\varphi = \frac{n' - n}{r},$$

takže refrakční matici můžeme také napsat jako

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix},$$

tohoto tvaru budeme využívat v našich výpočtech. U poloměru křivosti rozhraní je potřeba dodržovat standardní znaménkovou konvenci: leží-li střed křivosti po směru letu světla, má znaménko kladné, v opačném případě záporné.

Vraťme se ještě k důvodu, proč do sloupcového vektoru pro světlo byl zaveden index lomu. Získané matice mají totiž potom výše uvedený tvar

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix},$$

ve kterém mají jednotkový determinant. A protože při součinu matic se výsledný determinant spočte jako součin jednotlivých determinantů, má každá optická soustava v tomto formalizmu také jednotkový determinant. To jednak představuje dobrý nástroj pro kontrolu správnosti výpočtů, jednak této vlastnosti s výhodou vyžijeme v dalších odvozeních.