Asymptoty grafu funkce

Lenka Přibylová

28. července 2006

Obsah

Asymptoty bez směrnice ke grafu funkce $y = \dfrac{1 - x^2}{x - 2}$:

Asymptoty bez směrnice ke grafu funkce $y = \dfrac{1 - x^2}{x - 2}$:

$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Nejprve nalezneme definiční obor funkce. Asymptota bez směrnice může nastat pouze v nedefinovaném bodě $x_0 = 2$.

Asymptoty bez směrnice ke grafu funkce $y = \dfrac{1 - x^2}{x - 2}$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1 - x^2}{x - 2}$$

Hledáme jednostranné limity v $x_0 = 2$, nejprve zprava.

Asymptoty bez směrnice ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0} \right\|$$

Dosazením dostáváme limitu typu $\left\| \dfrac{k}{0} \right\|$.

Asymptoty bez směrnice ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^+} \right\|$$

Pro $x \to 2^+$ je jmenovatel kladné číslo.

Asymptoty bez směrnice ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^+} \right\| = -\infty$$

Záporný čitatel a kladný jmenovatel dává záporné číslo.

Asymptoty bez směrnice ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^+} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x^2}{x-2}$$

Hledáme limitu v $x_0 = 2$ zleva.

Asymptoty bez směrnice ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$:

$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^+} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0} \right\|$$

Dosazením dostáváme limitu typu $\left\| \dfrac{k}{0} \right\|$.

Asymptoty bez směrnice ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^+} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^-} \right\|$$

Pro $x \to 2^-$ je jmenovatel záporné číslo.

Asymptoty bez směrnice ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^+} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^-} \right\| = \infty$$

Záporný čitatel a záporný jmenovatel dává kladné číslo.

Asymptoty bez směrnice ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^+} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x^2}{x-2} = \left\| \frac{-3}{0^-} \right\| = \infty$$

Funkce má asymptotu bez směrnice a je jí přímka $x = 2$.

Obě jednostranné limity v bodě $x_0 = 2$ jsou nevlastní, funkce má tečnu $t : x = 2$ v nevlastních bodech $[2, \pm\infty]$.

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1 - x^2}{x - 2}$ pro $x \to \infty$:

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to \infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)}$$

Podle předpisu $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ je $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1-x^2}{x-2}}{x}$.

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to \infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x}$$

Roznásobíme jmenovatel.

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to \infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2}$$

Víme, že stačí uvažovat hlavní členy polynomů.

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to \infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Krácením dostaneme $k = -1$.

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to \infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + x \right)$$

Podle předpisu $q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$ je

$q = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1-x^2}{x-2} - (-1)x \right).$

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to \infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2+x(x-2)}{x-2}$$

Převádíme na společného jmenovatele.

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to \infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2+x(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x}{x-2}$$

Upravíme čitatel.

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to \infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2+x(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x}{x-2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{1} = -2$$

Limitu typu $\left\| \dfrac{\infty}{\infty} \right\|$ řešíme např. l'Hospitalovým pravidlem.

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to \infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2+x(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x}{x-2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{1} = -2$$

Funkce má pro $x \to \infty$ asymptotu se směrnicí a je jí přímka $y = -x - 2$.

Obě čísla k a q existují, existuje tedy také asymptota se směrnicí $y = kx + q$.

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1 - x^2}{x - 2}$ pro $x \to -\infty$:

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)}$$

Analogicky řešíme limity pro $x \to -\infty$. U racionálních lomených funkcí je pravidlem, že je výsledek stejný jako pro $x \to \infty$.
POZOR - u ostatních funkcí tomu tak není!!!

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x}$$

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2}$$

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + x \right)$$

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + x \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2+x(x-2)}{x-2}$$

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2+x(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{x-2}$$

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2+x(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{x-2} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{1} = -2$$

Asymptoty se směrnicí ke grafu funkce $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$ pro $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + x \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2+x(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{x-2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{1} = -2$$

Funkce má i pro $x \to -\infty$ asymptotu se směrnicí a je jí také přímka $y = -x - 2$.

Obě čísla k a q existují, existuje tedy také asymptota se směrnicí $y = kx + q$.