

9. Testování hypotéz o průměru pro jeden výběr a porovnávání dvou skupin

Jednovýběrový z-test

- Test hypotézy, že průměr populace, z níž pochází náš výběr je roven určitému číslu – očekávané hodnotě

- Testová statistika:

$Z = (\text{pozorovaná hodnota} - \text{očekávaná hodnota}) /$
standardní chyba pozorované hodnoty

- Pozorovaná hodnota = průměr naměřených hodnot \bar{x}
- Směrodatná odchylka pozorované hodnoty σ_x
- $Z \sim N(0,1)$ pro dostatečně velké n

Jednovýběrový t-test

- σ_x obvykle neznáme \Rightarrow nahrazujeme odhadem s_x vypočteným z našeho výběru

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x} = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x} \cdot \sqrt{n}$$

- T má *Studentovo t rozdělení* o $n-1$ stupních volnosti
- \Rightarrow jednovýběrový t-test

Normální x Studentovo t rozdělení

Pro malý rozsah výběru se můžou změnit dvě věci:

- Výběrová odchylka (s) nemusí být spolehlivým odhadem populační směrodatné odchylky (σ)
- Pokud není rozdělení populace normální, nemusí být normální ani rozdělení výběrových průměrů – velmi malý výběr (<15), extrémní odchylka od normálního rozdělení

Centrální limitní věta: i když náhodná veličina není rozdělena normálně, rozdělení výběrových průměrů se blíží normálnímu rozdělení

Normální x Studentovo t rozdělení

- => nutno použít Studentovo t rozdělení
- V podstatě celá řada t rozdělení pro různé stupně volnosti (df)
- t rozdělení o jednom, dvou, třech, ... stupních volnosti
- Jednovýběrové testy – $df = n-1$

Oboustranná a jednostranná alternativa

- Oboustranná alternativa: $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- μ_0 je konstanta (nejčastěji $\mu_0 = 0$)
- Zamítáme H_0 pro $T \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(df)$ nebo $T \leq t_{-\frac{\alpha}{2}}(df)$
- Jednostranná alternativá: $H_1 : \mu > \mu_0$
- Zamítáme H_0 pro $T \geq t_{1-\alpha}(df)$
- Jednostranná alternativa: $H_1 : \mu < \mu_0$
- Zamítáme H_0 pro $T \leq t_{\alpha}(df)$
- Symetrické rozdělení $\Rightarrow t_{\alpha}(df) = -t_{1-\alpha}(df)$

Porovnání průměrů pro dva nezávislé výběry

- Srovnání dvou souborů
 - Rozdíl mezi populačním průměrem v léčené a kontrolní skupině
- ⇒ rozdíl mezi dvěma výběrovými průměry
- Výběrové průměry se mezi výběry liší => liší se i rozdíly mezi výběrovými průměry
 - Rozdělení rozdílů výběrových průměrů má nulovou střední hodnotu se standardní chybou, která je určena směrodatnou odchylkou celé populace (směrodatné odchylky výběrů) a n

Dvouvýběrový t-test

- Předpokládáme platnost H_0 a spočteme p_{st} , s jakou dostaneme náš výsledek nebo ještě extrémnější hodnotu
- Pro výpočet této p_{st} potřebujeme vědět něco o rozdělení rozdílu průměrů obou výběrů
- Předpokládáme normální rozdělení výběrových průměrů (základní rozdělení skupiny podobné normálnímu)

Dvouvýběrový t-test

$\Rightarrow T = (\text{rozdíl výběrových průměrů} - \text{očekávaný rozdíl za platnosti } H_0) / \text{odhad standardní chyby rozdílu výběrových průměrů}$

- T má Studentovo t rozdělení o $n_1 + n_2 - 2$ stupních volnosti
- Standardní chyba rozdílu výběrových průměrů je směrodatná odchylka rozdělení rozdílu výběrových průměrů, který označíme $\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$

$\Rightarrow s_{\bar{d}} = s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ n_1, n_2 – rozsahy výběrů,
s- sm. odchylka obou skupin

Dvouvýběrový t-test

- s – sdružený odhad směrodatné odchylky
- Sdružený odhad rozptylu:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- s_1^2, s_2^2 - výběrové rozptyly pro jednotlivé skupiny
- Sdružený odhad směrodatné odchylky $\sqrt{s^2}$
- Odhad standardní chyby rozdílu výběrových průměrů $s_{\bar{d}}$

$$s_{\bar{d}} = s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Dvouvýběrový t-test

$$\Rightarrow T = \frac{\bar{d} - 0}{s_{\bar{d}}}$$

- 0 je pokud H_0 : neexistuje žádný rozdíl
- Lze testovat i konkrétní libovolný rozdíl

Předpoklady!!!

- Nezávislost výběrů
- Normální rozdělení
- Prosté náhodné výběry (kvůli nezávislosti pozorování)
- Shodné rozptyly ve skupinách

Interval spolehlivosti pro rozdíl mezi dvěma průměry

- Odhad rozdílu mezi dvěma průměry
- Krajní body intervalu spolehlivosti:

$$\bar{d} \pm ts_{\bar{d}}$$

- t – příslušný kvantil Studentova t rozdělení
- Např. $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$

Porovnání populačních pravděpodobností

- Porovnání pravděpodobností výskytu daného jevu ve dvou různých populacích (dva nezávislé výběry)
- Pro dostatečně velké rozsahy n_1 a n_2

$$p_1 \sim N\left(\pi_1, \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}\right)$$

$$p_2 \sim N\left(\pi_2, \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}\right)$$

- p_1, p_2 – populační pravděpodobnosti výskytu jevu

Porovnání populačních pravděpodobností

- r_1, r_2 – počty případů ve výběrech
- Společný odhad relativní četnosti:

$$p = \frac{r_1 + r_2}{n_1 + n_2}$$

$$Z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1-p)}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

- Podmínka: $n_i p_i (1 - p_i) > 9$ pro oba výběry

Párový t-test

- Párování dle podobnosti, která může ovlivnit výsledek, časová měření, ...
- Testujeme významnost průměrného rozdílu
- Rozdíly jsou normálně rozdělené s průměrem μ a rozptylem σ^2
- Průměr z n rozdílů \bar{d} bude mít průměrnou hodnotu μ a rozptyl σ^2/n

Párový t-test

$$H_0 : \mu = 0$$

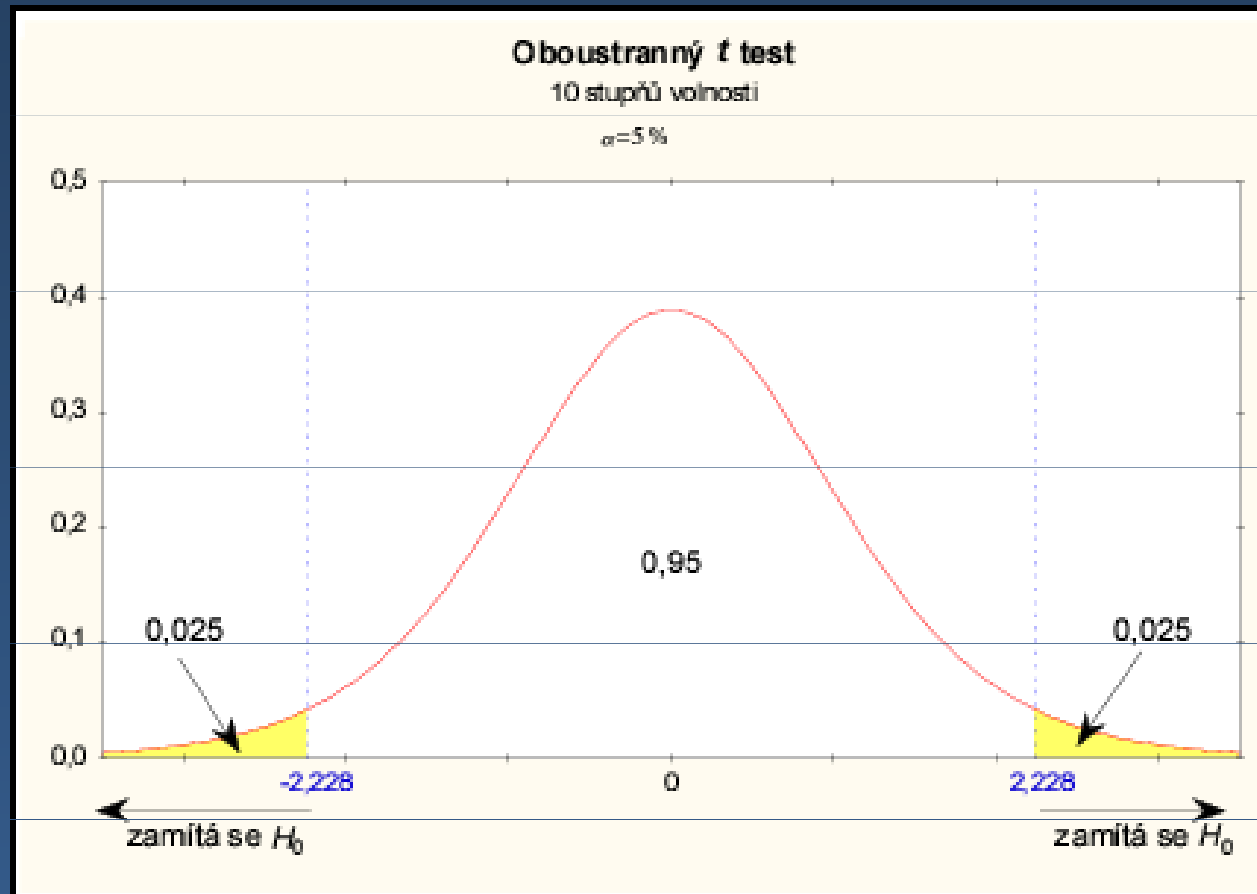
$$H_1 : \mu \neq 0$$

$T =$ (pozorovaná hodnota – předpokládaná hodnota)/odhad směrodatné chyby $= \frac{\bar{d} - 0}{s_{\bar{d}}}$

$$s_{\bar{d}} = \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad s - \text{směrodatná odchylka rozdílů}$$

$$T = \frac{\bar{d} - 0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

má t rozdělení o $n-1$ stupních volnosti



Za platnosti nulové hypotézy (průměrný rozdíl $\mu = 0$)
bude hodnota testovacího kritéria s 95% pstí mezi
-2,228 a 2,228

Testování hypotéz

- Stanovíme nulovou a alternativní hypotézu
- Určíme rozdělení pravděpodobnosti testové statistiky při nulové hypotéze
- Zvolíme hladinu významnosti testu α (doplňk koeficientu spolehlivosti P)
- Na základě zvolené hladiny významnosti vypočteme tzv. kritické hodnoty (příslušného rozdělení psti), které ohraničují kritický obor
- Vypočítáme hodnotu testové statistiky, pokud padne do kritického oboru, zamítáme H_0 na hladině významnosti α
- V opačném případě na základě zkoumaných dat nemůžeme zamítnout H_0 na hladině významnosti α (H_0 nemusí být pravdivá)