Matematická (pato)fyziologie - Test 20.4.2022

Úloha 1 (10 bodů)

Určete lokální extrémy a průsečíky s osou x následující funkce. Pomocí druhé derivace prověřte, kdy se jedná o minimum, maximum a inflexní bod. Na základě zjištěných hodnot orientačně (rukou) nakreslete průběh funkce.

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x$$

Řešení:
Průsečíky:

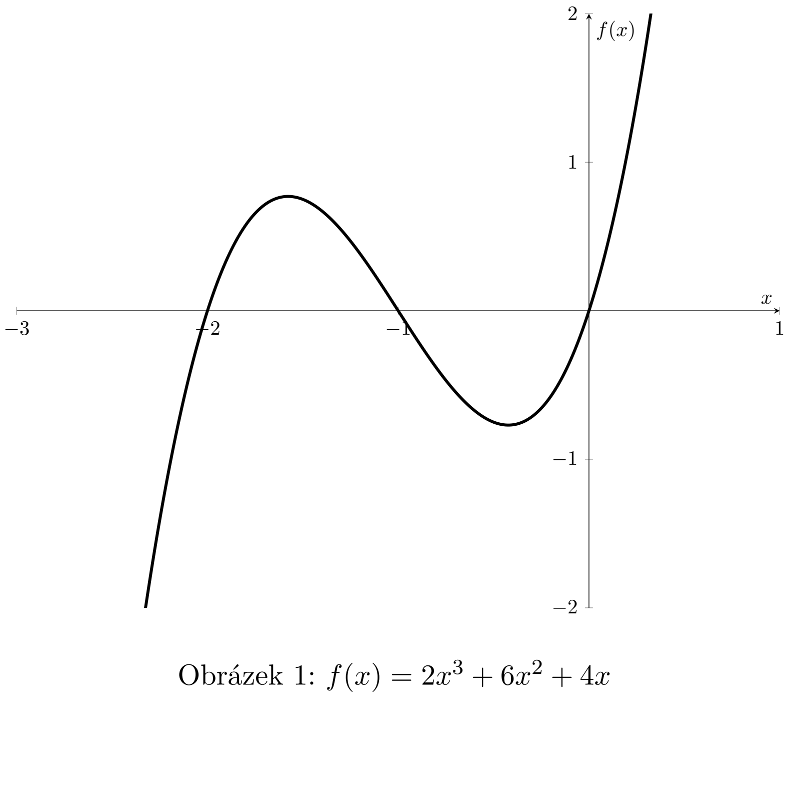
$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -2$$

Extrémy:

$$f'(x) = 6x^2 + 12x + 4 = 0 \rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x) = 12x + 12$$

Pro x_1 je $f''(x)$ menší záporná, pro x_2 kladná, proto x_1 je lokální maximum, x_2 lokální minimum. Viz obr. 1.



Obrázek 1: $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x$

Úloha 2 (5 bodů)

Vypočtěte obě první parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ funkce

$$f(x, y) = \left(\frac{3}{2xy}\right)^3$$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{81y}{8}\left(\frac{1}{xy}\right)^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{81x}{8}\left(\frac{1}{xy}\right)^4$$

Úloha 3 (5 bodů)

Vypočtěte následující neurčitý integrál (primitivní funkci). Výsledek též zderivujte, abyste si ověřili správnost řešení.

$$\int 3e^{2x}\, dx$$

Řešení:

$$\int 3e^{2x}\, dx = \frac{3}{2}e^{2x} + C$$

$$\left(\frac{3}{2}e^{2x} + C\right)' = 2.\frac{3}{2}e^{2x}$$

Úloha 4 (5 bodů)

Vypočtěte následující určitý integrál.

$$\int_1^2 x^3 + 4x^5\, dx$$

Řešení:

$$\int_1^2 x^3 + 4x^5\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{6}x^6\right]_1^2 = \frac{16}{4} + \frac{128}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{15}{4} + \frac{126}{3} = 45,75$$

Bonusová úloha (5 bodů)

Najděte a použijte vhodnou substituci a vypočtěte následující neurčitý integrál (primitivní funkci). Výsledek též zderivujte, abyste si ověřili správnost řešení.

$$\int xe^{2x^2}\, dx$$

Řešení:
Použijeme substituci $t := 2x^2$, pak $dt := 4xdx$.

$$\int xe^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}e^t dt = \frac{1}{4}e^t = \frac{1}{4}e^{2x^2} + C$$

$$\left[\frac{1}{4}e^{2x^2}\right]' = xe^{x^2}$$