

Matematická (patofyziologie - Úlohy 1

Termín zadání: 16.02.2022

Termín odevzdání: 23.02.2022

1 Instalace Pythonu (5 bodů)

Nainstalujte si do svého počítače Python, např. z distribuce Anaconda. ¹ Zkuste v Jupyter Notebooku spustit soubor `pythonProMatematFyziologii.ipynb`, zkuste se jím trochu proklikat a podívat se na skriptum Python pro matema... Napište jakýkoli první pythonský program a uložte ho do vlastního notebooku, tedy `.ipynb` souboru.

2 Co dělá program? (5 bodů)

Co dělá následující pythonský program? Vyzkoušejte v Jupyter Notebooku.

```
a = int(input('zadejte prirodzene cislo: '))
s = 0
while a > 0:
    s += a % 10
    a //= 10
print(s)
```

Řešení: Program načte číslo zadané z klávesnice jako řetězec, převede jej na přirozené číslo a uloží do proměnné a . Definuje proměnnou s , součet, iniciálně rovnou 0. Poté určí zbytek z a po dělení 10 ($a \% 10$), což je koncová číslice čísla a , přičte ji k součtu a číslo celočíselně vydělí deseti ($a // 10$). Tím se odstraní koncová číslice. Toto opakuje, až se odstraní všechny číslice. V součtu s zůstane součet všech cifer čísla a .

3 Translace (5 bodů)

Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je přiřazení prvků množiny B prvkům množiny A, přičemž každému prvku z množiny A je přiřazen právě jeden prvek množiny B. Definujme nyní množinu E jako 4 báze DNA - $E = \{A, T, C, G\}$ a množinu F jako 4 báze RNA - $F = \{A, U, C, G\}$. Zobrazení $f : E \rightarrow F$ definované předpisem

$$f : \begin{cases} A \rightarrow U \\ T \rightarrow A \\ C \rightarrow G \\ G \rightarrow C \end{cases}$$

¹Návod najdete např. na <https://cs.education-wiki.com/1301362-install-anaconda-python> nebo na <https://www.youtube.com/watch?v=5mDYijMfSzs>, nebo leckde jinde na internetu.

označujeme v obvyklé molekulárně-biologické terminologii jako transkripci. Zobrazení je prosté a dokonce vzájemně jednoznačné. Proto je možná i reverzní transkripce, v níž by matematik viděl inverzní zobrazení.

Popiště podobným způsobem translaci (syntézu proteinů podle mRNA) jako zobrazení, t.j. z které množiny do které je zobrazováno a čím je určeno zobrazení jednotlivých prvků. Jaké jsou vlastnosti tohoto zobrazení - je prosté, vzájemně jednoznačné? Pokud není prosté, proč?

Řešení: Translace je zobrazení z množiny všech 64 uspořádaných trojic bází A,U,C,G do množiny 20 aminokyselin. Vlastní přiřazení aminokyseliny trojici určuje genetický kód. Zobrazení není prosté, protože zobrazuje z větší množiny do menší množiny. Protože není prosté, není ani vzájemně jednoznačné.

4 Grafy funkcí (5 bodů)

Nakreslete grafy následujících funkcí. Stačí schematické náčrty. Je ale nutno vyznačit podstatné body, např. průsečíky s osami, asymptoty apod.

(a) $2 \cdot (2x - 6)^3 + 3$

Řešení: Obr. 1. Průsečíky s osami jsou $x_0 = 2,428$ a $y(0) = -429$

(b) $f(x) = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 3$. Jaká je perioda funkce? Pro které x platí $f(x) = 0$?

Řešení: Obr. 2. Perioda funkce je π . Průsečíky s osami jsou $x_0 = -\frac{3}{8}\pi$, $x_1 = \frac{5}{8}\pi$ a +- všechny násobky π a $y(0) = 5,12$. Perioda je π

(c) Gaussovu křivku známou ze statistiky popisuje funkce e^{-x^2} . Je možné nakreslit funkci k ní inverzní? Pokud ne, zdůvodněte proč ne a zakreslete inverzní funkce zvlášť pro kladné a záporné x .

Řešení: Obr. 4. Funkce jako celek není prostá, proto nleze nakreslit inverzní funkci. Zvlášť pro kladná a záporná x však již prostá je a lze proto nakreslit 2 inverzní funkce (v obrázku jde o zelenou a červenou křivku).

(d) Vyznačte v komplexní rovině číslo $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Řešení: Obr. 3. Jde o ryze komplexní číslo $-3i$.

Bonusová úloha - Součin součtů (5 bodů)

Dokažte, že

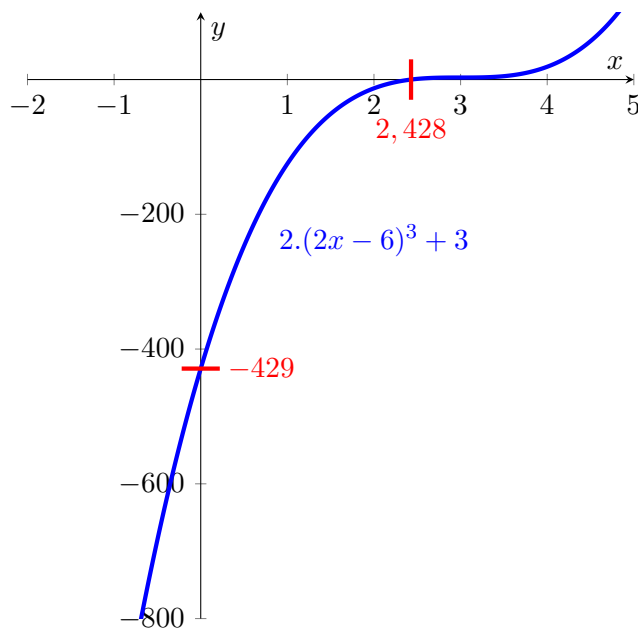
$$\left(\sum_{i=0}^m a_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n b_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(x^k \sum_{\substack{i+j=k \\ i \leq m \\ j \leq n}} a_i b_j \right)$$

Řešení: Nejprve rozepíšeme oba součty, poté je pronásobíme, přičemž budeme všechny „součiny x “ se stejným součtem exponentů psát k sobě. Jako příklad ukažme členy se součtem $i + j = 4$, přičemž $i \geq m$ i $j \geq n$, uvnitř výpočtu se objeví následující členy

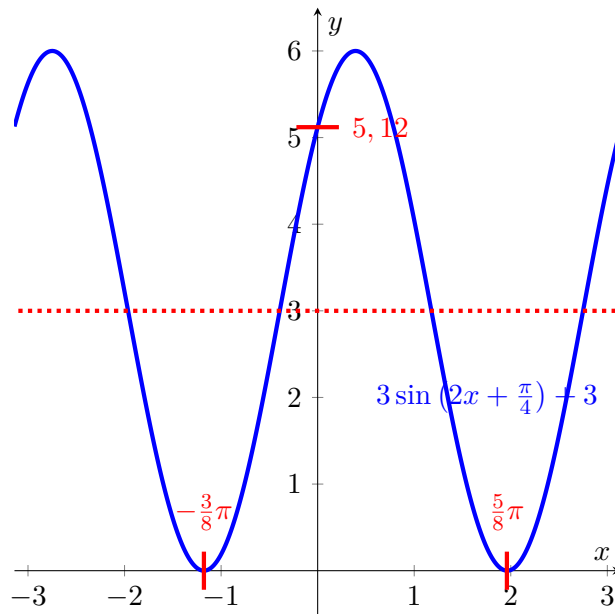
$$\dots a_0 x^0 \cdot b_4 x^4 + a_1 x^1 \cdot b_3 x^3 + a_2 x^2 \cdot b_2 x^2 + a_3 x^3 \cdot b_1 x^1 + a_4 x^4 \cdot b_0 x^0 + \dots =$$

$$\dots + x^4 (a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0) + \dots = \dots + x^4 \sum_{\substack{i+j=4 \\ i \leq m \\ j \leq n}} a_i b_j + \dots$$

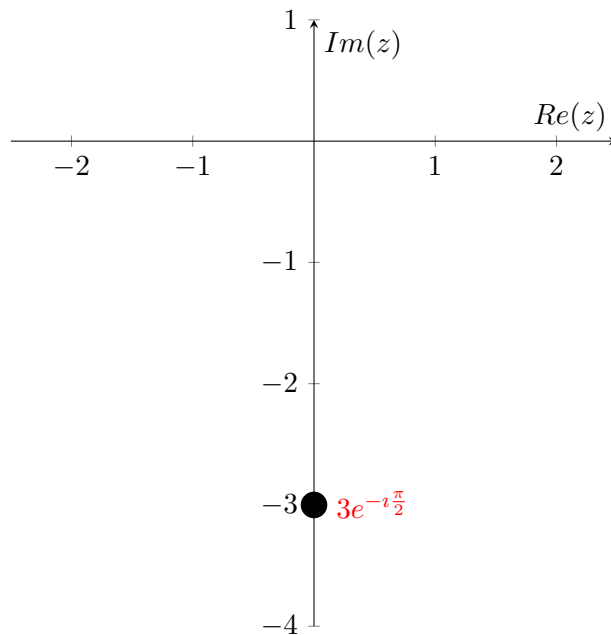
Posčítáním jednotlivých „nových“ členů získáme dokazovanou rovnost, přičemž součet $i + j$ se může pohybovat od 0 do $m + n$.



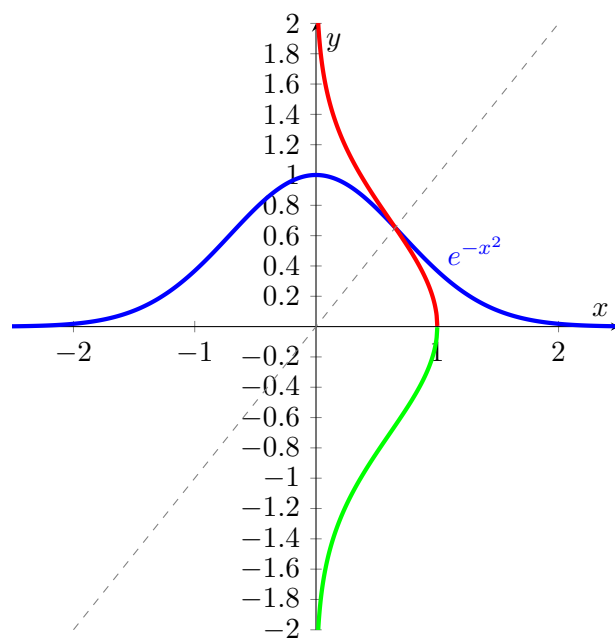
Obrázek 1: $2 \cdot (2x - 6)^3 + 3$



Obrázek 2: $3 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 3$



Obrázek 3: $3e^{-i \frac{\pi}{2}}$



Obrázek 4: e^{-x^2}