Matematická (pato)fyziologie - Úlohy 3

Termín zadání: 3.3.2022
Termín odevzdání: 9.3.2022

1 Tlak v levé komoře (10 bodů)

V průběhu systoly vypuzuje levá komora krev do aorty. Normální průměr otevřené aortální chlopně je asi 2 cm. Uvažujte nyní dospělého člověka v klidové situaci, který má minutový srdeční výdej 5 litrů a tepovou frekvenci 70/min. Systola zabírá přibližně třetinu srdeční periody. Přesněji se však dá trvání systoly (v milisekundách !!) stanovit pomocí vztahu

$$time_{syst} = 0,4.\sqrt{RR}$$

kde RR je srdeční perioda, neboli čas mezi dvěma R kmity na EKG (v sekundách!!). Vezměme průměrný systolický tlak v aortě 100 mmHg.

1. Spočítejte pro uvedený případ zdravého člověka v klidu, jaký je systolický tlak v levé komoře a jakou minutovou práci levá komora koná.

   Řešení: Zaveďme následující značení:

p_{LK}	systolický tlak v levé komoře
p_{ao}	systolický tlak v aortě
Δp	tlakový gradient na aortální chlopni, $p_{LK} - p_{ao}$
v_{ao}	rychlost toku krve přes aortální chlopeň
SV	tepový objem, stroke volume
CO	minutová srdeční výdej, cardiac output
HR	tepová frekvence, heart rate
$time_{syst}$	doba trvání systoly
W_{min}	minutová srdeční práce

   Pro systolický tlak v levé komoře platí

   $$p_{LK} = p_{ao} + \Delta p$$

   Jak bylo odvozeno při přednášce, zhruba platí

   $$\Delta p = 4v_{ao}^2$$

   Pro tepový objem zjevně platí

   $$SV = v_{ao}.S_{ao}.time_{syst}$$

Pro rychlost toku přes aortální chlopeň v_{ao} tedy platí

$$v_{ao} = \frac{SV}{S_{ao}.time_{syst}} = \frac{CO/HR}{\pi.1^2.0,4.\sqrt{RR}}$$

S konkrétními hodnotami

$$v_{ao} = \frac{5000/70}{\pi.0,4.\sqrt{60/70}} \approx 61 \text{ cm.s}^{-1} = 0,61 \text{ m.s}^{-1}$$

Proto $\Delta p = 4.0,61^2 = 1,5$ mmHg a $p_{LK} = 100 + 1,5 = 101,5$ mmHg. Za fyziologických okolností tedy aortální chlopeň nepředstavuje pro levou komoru téměř žádnou překážku.

Pro minutovou srdeční práci platí

$$W_{min} = p_{LK}.CO = 101,5.5000 = 507,5 \text{ mmHg.l.min}^{-1} = 66,7 \text{ J.min}^{-1}$$

2. Spočítejte nyní systolický tlak v levé komoře a minutovou práci levé komora pro běžícího člověka s tepovou frekvencí 120/min a minutovým srdečním výdejem 10 litrů.

   Řešení: Dosadíme do stejných vztahů.

   $$v_{ao} = \frac{10000/120}{\pi.0,4.\sqrt{60/120}} \approx 94 \text{ cm.s}^{-1} = 0,94 \text{ m.s}^{-1}$$

   Proto $\Delta p = 4.0,61^2 = 3,5$ mmHg, $p_{LK} = 103,5$ mmHg a $W_{min} = 136$ J.min^{-1}. Za fyziologických okolností tedy ani při zátěži nepředstavuje aortální chlopeň omezení.

Aortální stenoza je onemocnění, kdy je zúžena aortální chlopeň, což znesnadňuje ejekci komory. Stupeň aortální stenozy se hodnotí zejména plochou otevřené aortální chlopně, parametrem označovaným jako AVA (aortic valve area). Za významnou a vhodnou ke zvážení chirurgické náhrady chlopně se považuje stenoza s $AVA < 1\ cm^2$.

3. Spočítejte, jaký je systolický tlak v levé komoře a jakou minutovou práci levá komora koná u pacienta v klidu s $AVA = 1\ cm^2$. Ostatní parametry nechť jsou stejné jako v úloze 1.1.

   Řešení:
   S konkrétními hodnotami

   $$v_{ao} = \frac{5000/70}{1.0,4.\sqrt{60/70}} \approx 193 \text{ cm.s}^{-1} = 1,93 \text{ m.s}^{-1}$$

   Proto $\Delta p = 4.1,93^2 = 15$ mmHg, $p_{LK} = 115$ mmHg a $W_{min} = 75,7$ J.min^{-1}. Ani takto významná stenoza by proto v klidu pro levou komoru nepředstavovala podstatný problém. Výpočet však gradient podhodnocuje, poněvadž ignoruje turbulentní proudění, které se při rychlém toku stenotickou chlopní objevuje (a je slyšitelné jako aortální šelest) a tlakový gradient zvyšuje. Další podhodnocení je v tom, že mechanická systola je kratší než ve výpočtu použitá elektrická systola $time_{syst}$. To vede k vyšším rychlostem i gradientům.

4. Spočítejte nyní systolický tlak v levé komoře a minutovou práci levé komora pro běžícího člověka s tepovou frekvencí 120/min a minutovým srdečním výdejem 10 litrů, s $AVA = 1\ cm^2$.

   Řešení:

   $$v_{ao} = \frac{10000/120}{1.0,4.\sqrt{60/120}} \approx 295 \text{ cm.s}^{-1} = 2,95 \text{ m.s}^{-1}$$

Proto $\Delta p = 35$ mmHg a $p_{LK} = 135$ mmHg a $W_{min} = 177,6$ J.min^{-1}. Při takto rychlém toku je již turbulentní efekt podstatný, lze proto očekávat zřetelně vyšší tlakový gradient, který již limituje výkonnost levé komory.

5. Vysvětlete, proč je pro pacienty s těžkou aortální stenozou typická námahová synkopa (ztráta vědomí při námaze).

   Řešení: Při námaze dojde k dilataci svalových arteriol a tím k poklesu systémové cévní rezistence. Aby nedošlo k poklesu arteriálního tlaku, musí se zvýšit srdeční výdej. To však levá komora při vysokém aortálním gradientu nedokáže. Výsledkem je hypotenze a synkopa.

6. Proč pacienti s aortální stenozou často pociťují námahové bolesti na hrudi? Pomohlo by jim medikamentozní zvýšení nebo snížení arteriálního tlaku?

   Řešení: Myokard levé komory musí konat vyšší práce, má vyšší spotřebu kyslíku, ale koronární perfuze je nezměněna. Myokard je tak relativně ischemický, což vede k anginozním bolestem na hrudi. Ani jedno příliš nepomůže. Zvýšení arteriálního tlaku zvyšuje koronární perfuzi, ale zároveň zvyšuje srdeční práci. Snížení tlaku snižuje srdeční práci, ale zároveň snižuje koronární perfuzi. Pomoci by teoreticky mohl např. betablokátor, který zpomalí kontrakci levé komory, čímž sníží aortální tlakový gradient.

2 Vykreslení funkce pomocí matplotlib (5 bodů)

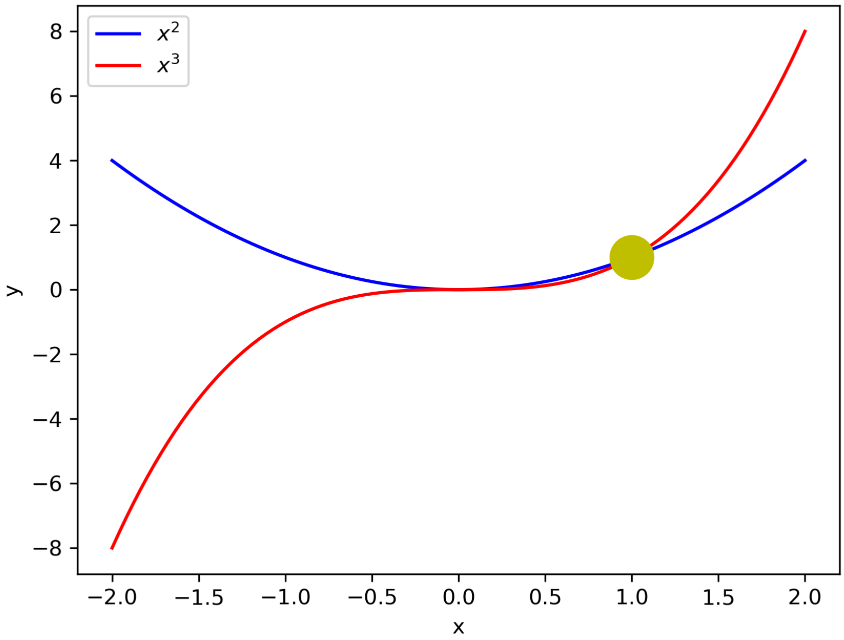
Pomocí knihovny matplotlib vykreslete v jednom společném grafu funkce x^2 a x^3 pro x v intervalu $[-2, 2]$, každou funkci jinou barvou, přidejte legendu, a vyznačte průsečík obou funkcí širokým kruhovým bodem nějaké další barvy.

Řešení:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# definice proměnné a funkcí
x = np.linspace(-2, 2,100)
y = x**2
z = x**3

fig, axes = plt.subplots()

axes.plot(x, y, 'b', label = '$x^2$')
axes.plot(x, z, 'r', label = '$x^3$')
axes.plot(1, 1, 'oy', markersize=20)
axes.plot(0, 0, 'oy', markersize=20)
axes.set_xlabel('x')
axes.set_ylabel('y')
axes.legend()
```

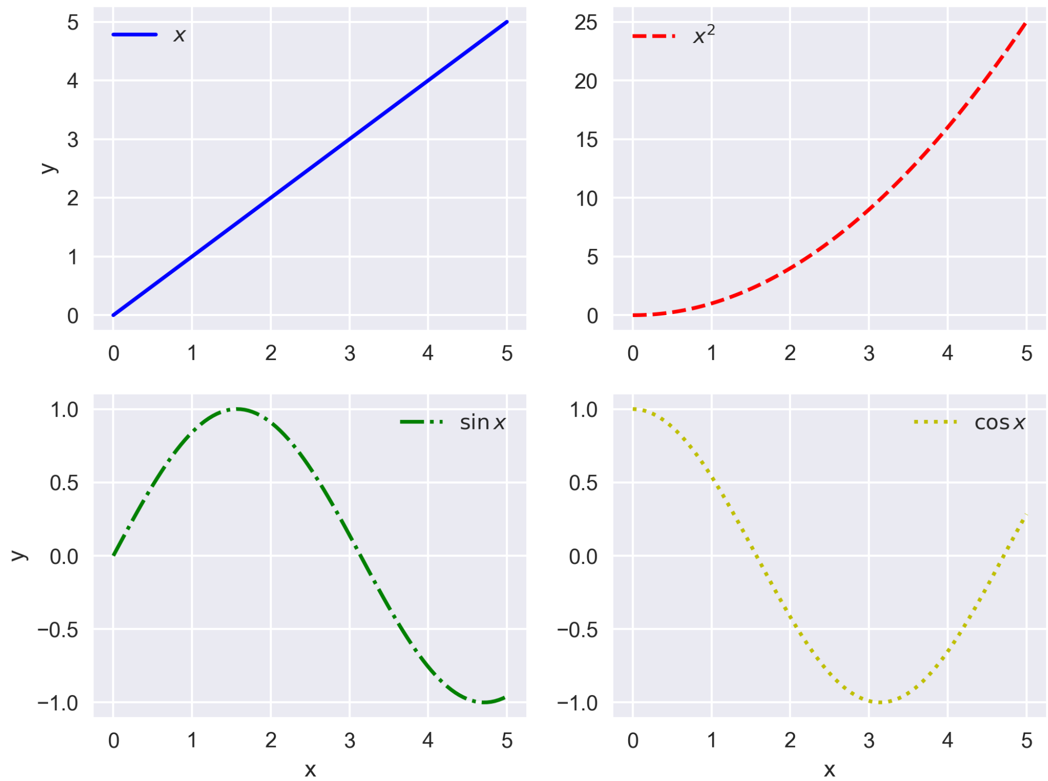
3 Napodobení grafu pomocí matplotlib (5 bodů)

Napodobte co nejpřesněji následující obrázek grafů. Styl byl zvolen `seaborn`.
Řešení:



Obrázek 1: Úloha 2

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

plt.style.use('seaborn')
fig, axes = plt.subplots(2,2, figsize = (8,6))

# definice proměnné a funkcí
x = np.linspace(0, 5,100)
y00 = x
y01 = x*x
y10 = np.sin(x)
y11 = np.cos(x)

# levý horní graf
axes[0,0].plot(x, y00, 'b', label = '$x$')
axes[0,0].set_ylabel('y')
axes[0,0].legend()

# pravý horní graf
axes[0,1].plot(x, y01, 'r',ls= '--', label = '$x^2$')
axes[0,1].legend()

# levý dolní graf
axes[1,0].plot(x, y10, 'g', ls= '-.',label = '$\sin x$')
axes[1,0].set_xlabel('x')
axes[1,0].set_ylabel('y')
axes[1,0].legend()
```



Obrázek 2: Úloha 3

```
# pravý dolní graf
axes[1,1].plot(x, y11, 'y', ls= 'dotted',label = '$\cos x$')
axes[1,1].set_xlabel('x')
axes[1,1].legend()

plt.savefig('uloha.png',dpi = 300)
```

Bonusová úloha - Největší společný dělitel (5 bodů)

Napište program v Pythonu s následujícími dovednostmi:

1. Ze vstupu (input) postupně načtěte několik přirozených čísel (použijte while cyklus) a postupně je ukládejte do proměnné vhodného datového typu (např. list)
2. Pokud zadáte 0, dotazování na další čísla se ukončí a program určí největšího společného dělitele všech čísel.
3. Dělitele najděte tak, že budete postupně zkoušet čísla od 1 výše, zda dělí všechna čísla v listu (`for i in list`) pomocí operace mod. Sami určete, které největší číslo je třeba testovat.
4. Program nakonec vypíše „Největší společný dělitel čísel x_1, x_2,... je ...“, přičemž za x_1, x_2.. dosadí zadaná čísla.

Řešení: Jedno z mnoha možných řešení.

```
def nejvetsi_spolecny_delitel(cisla):
    kam_az_testovat = min(cisla) # stačí testovat do nejmenšího čísla

    for nsd in range(kam_az_testovat,0, -1): # sestupná posloupnost
        index = True # nsd by mohl být NSD
        for cislo in cisla:
            if cislo % nsd != 0:
                index = False # nsd není NSD
                break         # konec for cyklu, jde na další nsd
        if index == True: # nsd je NSD
            return(nsd)

cisla = [] # prázdný list
i = int(input('Zadejte přirozené číslo: '))

while i!=0: # testuje ukončení zadávání
    cisla.append(i) # přidání do listu
    i = int(input('Zadejte přirozené číslo: '))

print('Největší společný dělitel čísel ' + str(cisla) +  ' je ' + \\
        str(nejvetsi_spolecny_delitel(cisla)))
```

```
Zadejte přirozené číslo: 12
Zadejte přirozené číslo: 18
Zadejte přirozené číslo: 24
Zadejte přirozené číslo: 0
Největší společný dělitel čísel [12, 18, 24] je 6
```