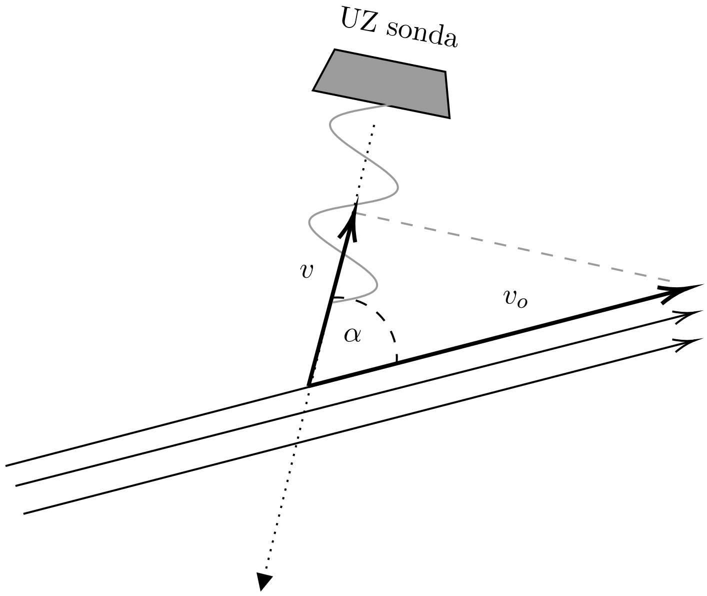
Matematická (pato)fyziologie - Úlohy 4

Termín zadání: 10.3.2022
Termín odevzdání: 16.3.2022

1 Úhel snímání dopplerovským ultrazvukem (10 bodů)

Dopplerovský ultrazvuk měří rychlost toku krve směrem k sondě. Je-li tok orientován šikmo vůči sondě (vůči směru šíření ultrazvuku), změří se arteficiálně nižší rychlost. Pokud označíme rychlost toku v_0 a úhel mezi směrem toku a šířením ultrazvuku α (obr. 1), platí pro měřenou rychlost v

$$v = v_0 \cos \alpha$$



Obrázek 1: Dopplerovské měření rychlosti toku

Vypočítejte:

1. Jaký největší úhel α může svírat tok s ultrazvukovým signálem, aby chyba měření rychlosti byla pod 20 %?
2. Použijme nyní ultrazvuk k měření tlakového gradientu. Jaký největší úhel α může svírat tok s ultrazvukovým signálem, aby chyba měření tlakového gradientu byla pod 20 %?
3. Nakreslete pomocí matplotlib do společného grafu závislost mezi chybou měření rychlosti a úhlem α a mezi chybou měření tlakového gradientu a úhlem α.

Řešení:

1. Pro chybu měření rychlosti pod 20 % musí platit

$$\frac{v}{v_0} = \cos\alpha \geq 0,8$$

   Proto musí být $\alpha \leq \arccos 0,8 \approx 37°$. Zjevně tedy i relativně velká chyba úhlu zaměření vede k jen relativně malé chybě měření rychlosti.
2. Pro chybu měření tlaku pod 20 % musí platit

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_0} \approx \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = \cos^2\alpha \geq 0,8$$

   Proto musí být $\alpha \leq \arccos\sqrt{0,8} \approx 27°$. Pro měření tlakových gradientů je tedy potřeba zaměřit úhel dosti přesněji.
3. Viz obr. 2.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

a = np.linspace(0, 90,100)
v = 100*(1-np.cos(np.pi*a/180))
p = 100*(1-(np.cos(np.pi*a/180))**2)

fig, axes = plt.subplots()

axes.plot(a, v, 'b', label = 'chyba rychlosti')
axes.plot(a, p, 'r', label = 'chyba tlaku')

axes.set_xlabel(r'$\alpha$ []')
axes.set_ylabel('chyba měření [%]')
axes.legend()
```

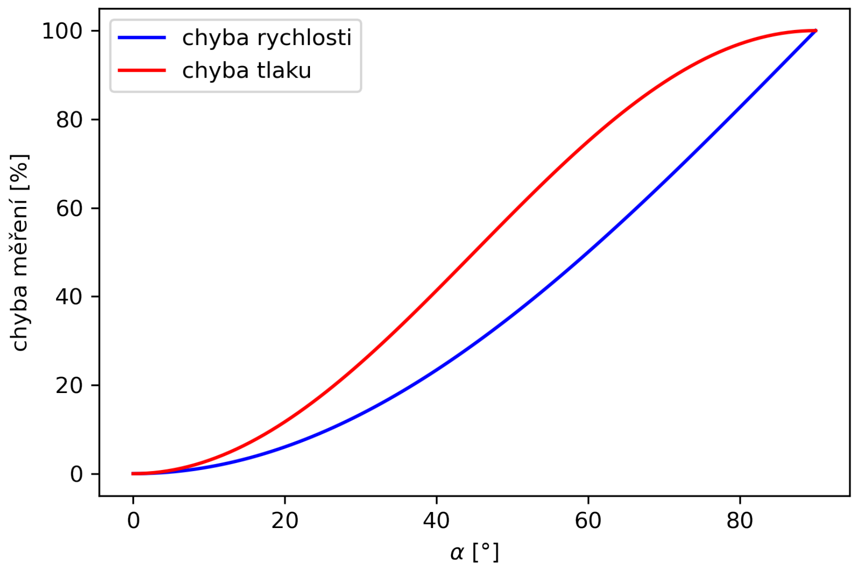
2 Derivace funkcí (5 bodů)

Zderivujte následující funkce (prosím odvodit, nikoli vygooglit!!!):

1. $f(x) = \sin(x^3 + 3x^2 - 1) + 1$
2. $f(x) = 4\ln^2(x^3)$
3. $f(x) = x^5 + \sin x . \ln x$
4. $f(x) = \frac{e^{2x+1}}{x^2-1}$

Řešení:

1. $f'(x) = \cos(x^3 + 3x^2 - 1).(3x^2 + 6x)$
2. $f'(x) = 24\frac{\ln x^3}{x}$
3. $f'(x) = 5x^4 + \cos x . \ln x + \frac{\sin x}{x}$
4. $f'(x) = \frac{2e^{2x+1}.(x^2-1) - 2x.e^{2x+1}}{(x^2-1)^2}$



Obrázek 2: Chyba měření v závislosti na úhlu zaměření

3 Obtížnější derivace funkcí (5 bodů)

Zderivujte následující funkce (prosím odvodit, nikoli vygooglit!!!):

1. $f(x) = \tan x$
2. $f(x) = \arcsin x$
3. $f(x) = 4^x$

Řešení:

1. $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x.\cos x + \sin x.\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
2. $f'(x) = \arcsin x = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $f'(x) = (4^x)' = \left(\left(e^{\ln 4}\right)^x\right)' = \left(e^{x.\ln 4}\right)' = e^{x.\ln 4}.\ln 4 = \left(e^{\ln 4}\right)^x.\ln 4 = 4^x.\ln 4$

4 Taylorovy řady (5 bodů)

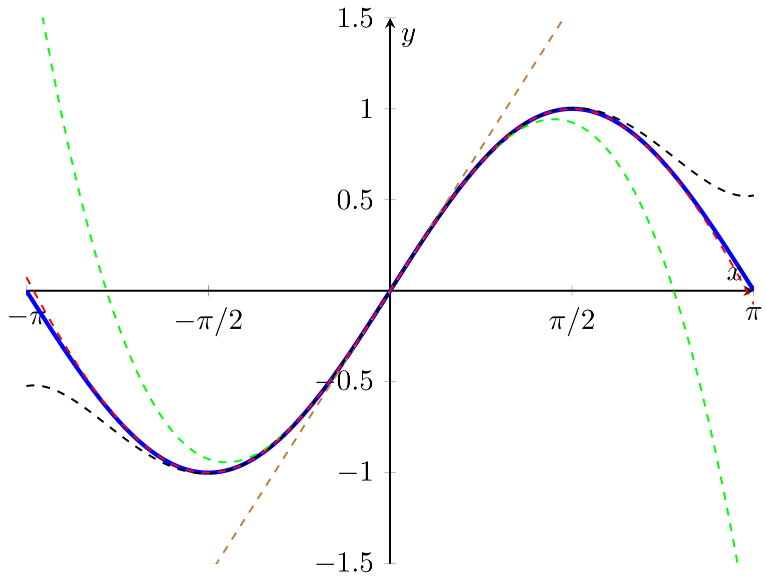
Pomocí matplotlib nakreslete do stejného grafu následující funkce, v intervalu $x = [-\pi, \pi]$, každou jinou barvou.

1. $f_1(x) = x$
2. $f_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$
3. $f_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
4. $f_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$
5. $f_5(x) = \sin x$

Co nápadného pozorujete?

Řešení:

Polynom s rostoucí mocninou postupně stále lépe aproximuje funkci sinus (obr. 3). Jedná se o tzv. Taylorův rozvoj 7. řádu funkce sinus.



Obrázek 3: Taylorův rozvoj funkce sinus

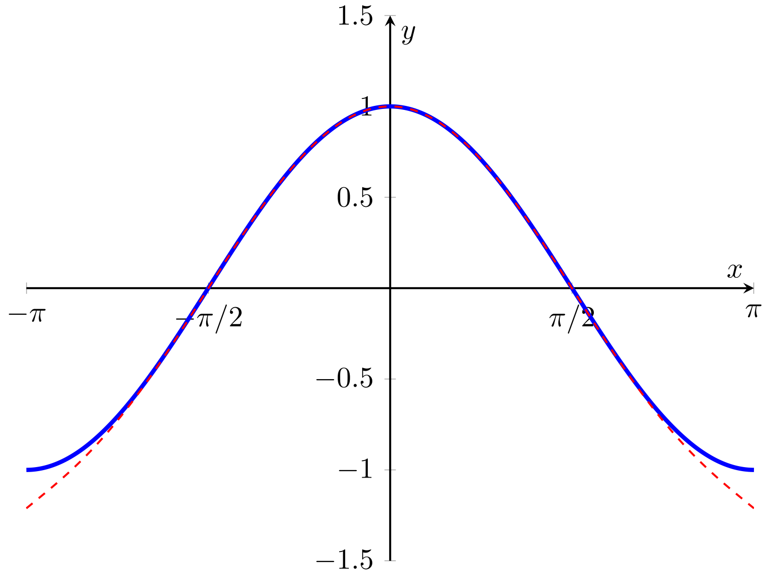
Zderivujte nyní funkce $f_4(x)$ a $f_5(x)$ a obě zderivované funkce nakreslete do druhého společného grafu pro stejný interval $x = [-\pi, \pi]$. Co pozorujete nyní?

Řešení:

Derivace vede k funkcím

1. $f_4'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$
2. $f_5'(x) = \cos x$

Polynom opět dobře aproximuje funkci (obr. 4). Jedná se o tzv. Taylorův rozvoj 6. řádu funkce cosinus.



Obrázek 4: Taylorův rozvoj funkce cosinus