Matematická (pato)fyziologie - Úlohy 5

Termín zadání: 18.3.2022
Termín odevzdání: 23.3.2022

1 Průběh funkce (10 bodů)

Určete minima, maxima a případně inflexní body následujících funkcí. Každou funkci společně s její první a druhou derivací též vykreslete pomocí Pythonu a ověřte tak jednak správnost výpočtu, jednak skutečnost, že druhá derivace je v maximu záporná, v minimu kladná a v inflexním bodě nulová. Pro grafy funkcí sami zvolte vhodný rozsah osy x.

1. $f_1(x) = x^2. \cos x$ pro $x \in [-2, 2]$
2. $f_2(x) = e^{-(x-4)^2}$
3. $f_3(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

Řešení: Všechny 3 křivky jsou vykresleny na obr. 1.

1. Pro extrémy a inflexní body musí platit $f_1'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x = 0$. Zjevným řešením je $x_1 = 0$. Po vydělením x dostaneme $2 \cos x = x \sin x$, což je nelineární rovnice, 2 řešení jsou přibližná, $x_2 \approx 1,08$ a $x_3 = -x_2 \approx -1,08$. Pro zjištění typu extrému potřebujeme hodnotu 2. derivace v bodech x_1, x_2 a x_3.

$$f_1''(x) = 2 \cos x - 2x \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x$$

   Pro $x_1 = 0$ platí $f_1''(0) = 2 \cos 0 = 2 > 0$, x_1 je tedy lokální minimum. Upozorňuji, že jde o lokální minimum, nikoli o globální minimum. Pro body x_2 x_3 dosadíme podmínku extrému $2 \cos x = x \sin x$ a získáme

$$f_1''(x) = x \sin x - 2x \sin x - 2x \sin x - x^2 \cos x = -3x \sin x - x^2 \cos x$$

   Protože x a $\sin x$ mají v intervalu $(-\pi, \pi)$ stejné znaménko, je pro x_2 i x_3 $x \sin x > 0$, stejně tak i $x^2 \cos x > 0$. Proto $f_1''(x_2) < 0$ i $f_1''(x_3) < 0$, oba body jsou tedy lokálními maximy.

2. Jediným řešením podmínky $f_2'(x) = -2(x - 4).e^{-(x-4)^2} = 0$ je $x = 4$.

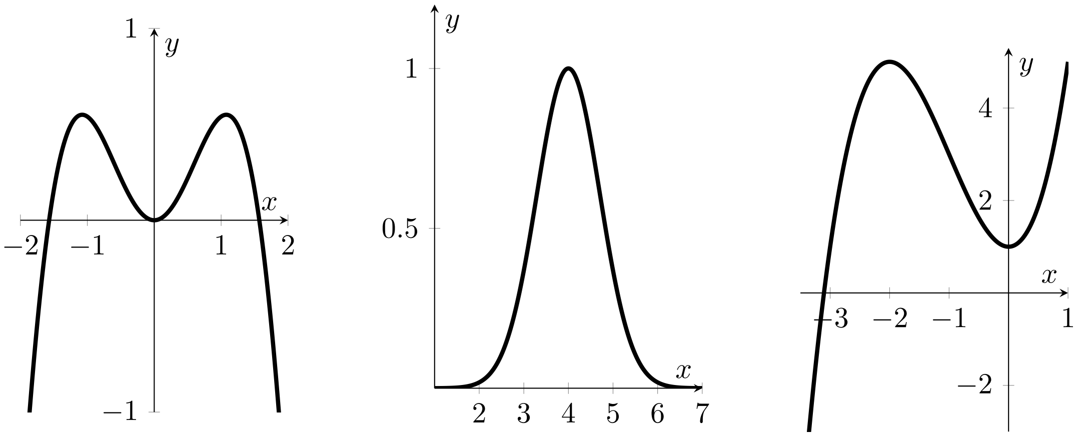
$$f_2''(x) = -2.e^{-(x-4)^2} + 4(x - 4)^2.e^{-(x-4)^2}$$

   Pro $x = 4$ je $f_2''(4) = -2.e^0 = -2 < 0$, jde tedy o maximum.

3. $f_3'(x) = 3x^2 + 6x = 0$. Řešením jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = -2$. Platí $f_3''(x) = 6x + 6$, tedy $f_3''(0) = 6 > 0$ a $f_3''(-2) = -6 < 0$. x_1 je lokální minimum, x_2 lokální maximum.

2 Graf funkce 2 proměnných (10 bodů)

Pomocí matplotlib nakreslete grafy následujících funkcí 2 proměnných:



Obrázek 1: $f_3(x)$

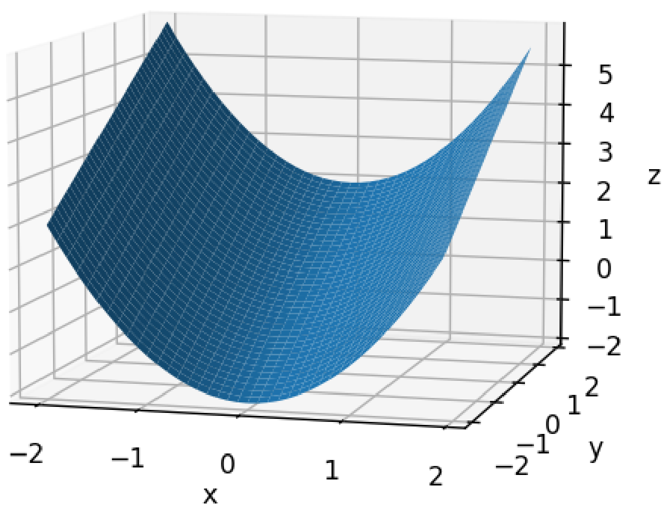
1. $f_1(x, y) = x^2 + y$
2. $f_2(x, y) = \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Řešení:

Viz obr. 2 a obr. 3.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
# import ipympl

% matplotlib widget

x = np.arange(-15, 15, 0.1) # definice proměnné x
y = np.arange(-15, 15, 0.1) # definice proměnné y

def fun(x, y):
    return np.sin(np.sqrt(x**2 + y**2))/(np.sqrt(x**2 + y**2))

def fun2(x, y):
    return x**x+y

X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = fun1(X,Y)
#Z = fun2(X,Y)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

ax.plot_surface(X, Y, Z) # vykreslení prostorového grafu

ax.set_xlabel('osa x')
ax.set_ylabel('osa y')
ax.set_zlabel('osa z')
```

```
ax.view_init(-30, 30)
plt.show()
```



Obrázek 2: $f_1(x, y) = x^2 + y$

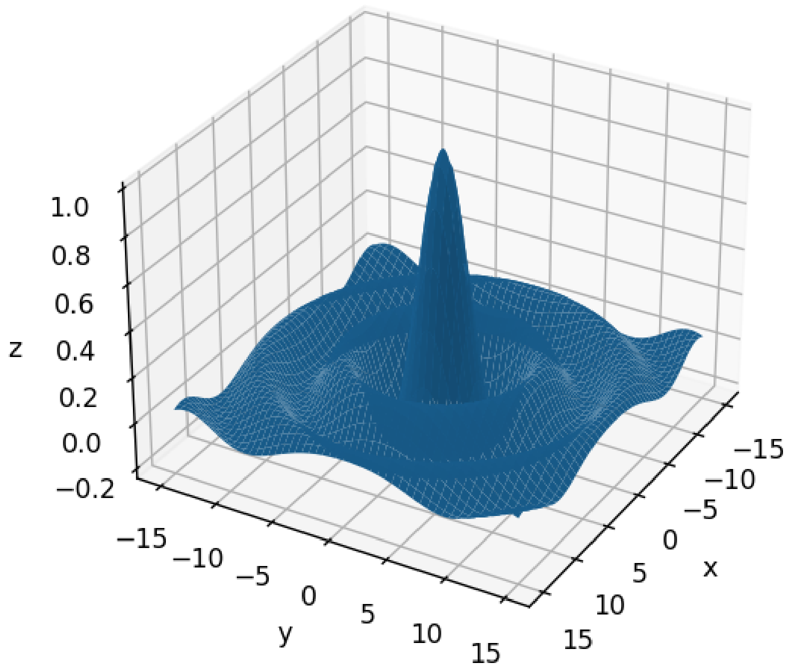
Bonusová úloha - Elektrický vektor srdeční (10 bodů)

V přednášce jsme odvodili představu elektrického vektoru srdečního (obr. 4) a určili jsme, jaký potenciál φ vektor vyvolává v bodech prostoru.

$$\varphi = k\frac{\vec{P}.\vec{r}}{r^3} = k\frac{P.\cos\theta}{r^2}$$

Uvedli jsme též, že napětí měřené v určitém bipolárním svodu (viz obr. 5) je zhruba úměrné kolmé projekci vektoru do tohoto svodu. Dokažte toto tvrzení!

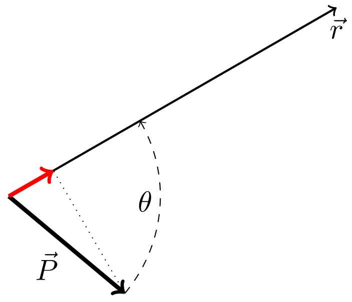
Návod: Vězměte jako příklad svod I, viz obr. 5. Elektrody svodu I leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku, srdce je v těžišti. Elektrický vektor srdeční vychází ze srdce a je skloněn pod úhlem θ oproti svodu I. Pozor, úhel θ je nyní definován trochu jinak než na obr. 1!! Spočítejte, jaký potenciál vektor vytváří v místě obou elektrod (LH a RH). Odečtením obou potenciálů získáte napětí měřené ve svodu I. Je toto napětí úměrné projekci elektrického srdečního vektoru do směru svodu I (červená šipka v obr. 5)? Nakreslete pomocí matplotlib závislost potenciálu na úhlu θ, pro θ 0 až 180 stupňů. Do stejného grafu nakreslete i (adekvátně zvětšenou) funkci sinus a cosinus.



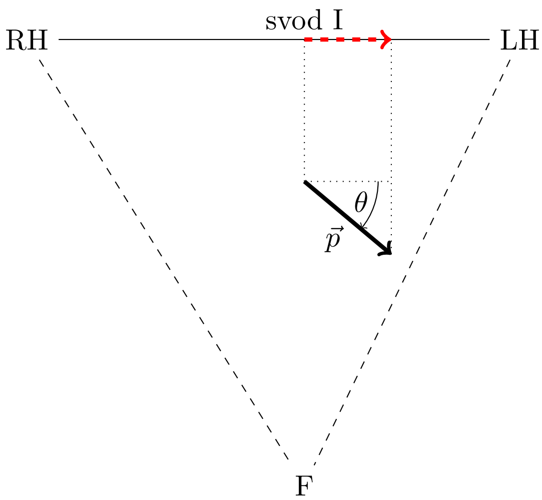
Obrázek 3: $f_2(x, y) = \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Pravděpodobně budete potřebovat vztahy

$$\sin(90 - a) = \cos a \tag{1}$$
$$\sin(-a) = -\sin a \tag{2}$$
$$\cos(-a) = \cos a \tag{3}$$
$$\sin(a + b) = \sin a. \cos b + \cos a. \sin b \tag{4}$$
$$\cos(a + b) = \cos a. \cos b - \sin a. \sin b \tag{5}$$



Obrázek 4: Elektrický vektor srdeční



Obrázek 5: Projekce elektrického srdečního vektoru do svodu I