Matematická (pato)fyziologie - Úlohy 6

Termín zadání: 25.03.2022
Termín odevzdání: 30.03.2022

1 Schwarzova věta (5 bodů)

V matematické analýze se dokazuje Schwarzova věta, která říká, že nezáleží na pořadí derivování ve smíšených parciálních derivacích, tedy že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Ověřte Schwarzovu větu na následujících příkladech: [1]

1. $f(x, y) = e^{xy}$
2. $f(x, y) = \ln(x + 2y)$
3. $f(x, y) = (x^2 + y^2). \cos x$
4. $f(x, y) = \left(\frac{1}{xy}\right)^3$

Řešení:

1. $$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}; \ \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy}; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{xy} + yxe^{xy}$$
2. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+2y}; \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x+2y}; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2}{(x+2y)^2}; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2}{(x+2y)^2}$$
3. $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x. \cos x - (x^2 + y^2). \sin x; \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y. \cos x; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y. \sin x; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y. \sin x$$
4. $$f(x, y) = \left(\frac{1}{xy}\right)^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-3y}{(xy)^4}; \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3x}{(xy)^4}; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{9}{(xy)^4}; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{9}{(xy)^4}$$

[1] Zderivujte v prvním případě funkci podle x a poté podle y, v druhém případě nejprve podle y a poté podle x. Výsledek by měl být stejný

2 Limita funkce s Taylorovým rozvojem (5 bodů)

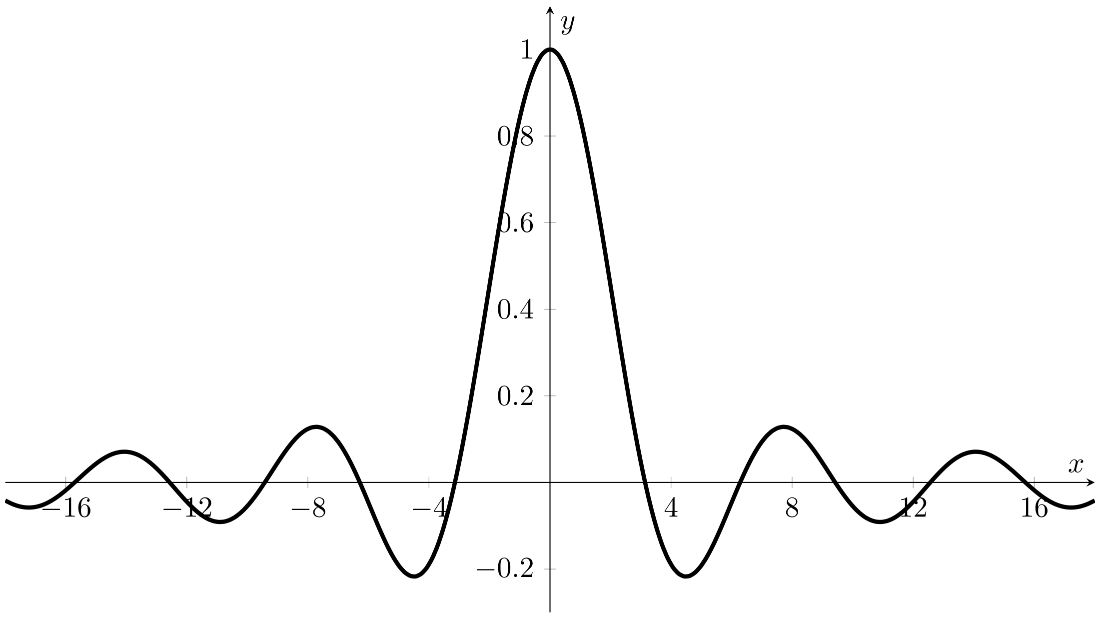
Využijte Taylorův rozvoj funkce $\sin x$ a dokažte, že platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Nakreslete též funkci pomocí matplotlib a ověřte si tak svůj výsledek.

Řešení: Viz obr. 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \dots \right) = 1$$



Obrázek 1: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

3 Optimální hematokrit (5 bodů)

V přednášce jsme odvodili vztah mezi dodávkou kyslíku J_{ox} a hematokritem φ

$$J_{ox} = k \Delta p \frac{\varphi}{\eta(\varphi)}$$

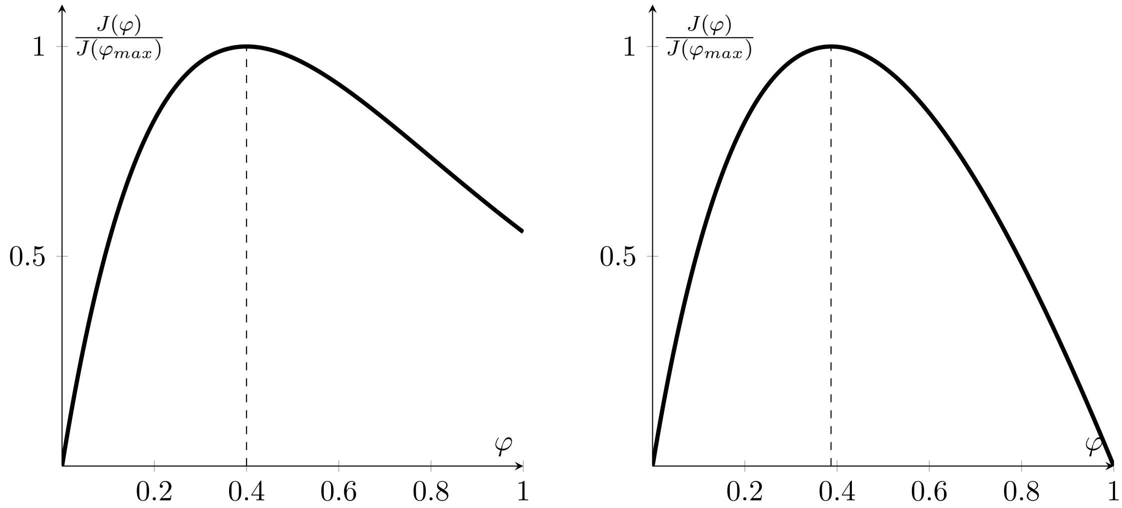
Nakreslete závislosti relativní dodávky kyslíku, t.j. procenta z maximální dodávky $J_{ox}/J_{ox,max}$, na hematokritu. Uvažujte konstantní tlakový gradient Δp. Použijte následující 2 vztahy pro závislost viskozity na hematokritu:

1. Arrheniův vztah: $\eta = \eta_0 . e^{2,5\varphi}$
2. Saitoův vztah: $\eta = \eta_0 \left(1 + 2,5 \frac{\varphi}{1-\varphi} \right)$

Určete též hodnoty optimálního hematokritu.

Řešení: Při přednášce jsme odvodili, že hematokrit maximalizující dodávku kyslíku φ_{max} musí spňovat podmínku

$$\varphi_{max} = \frac{\eta(\varphi_{max})}{\eta'(\varphi_{max})}$$



(a) Arrheniův vztah: $\eta = \eta_0.e^{2,5\varphi}$ (b) Saitoův vztah: $\eta = \eta_0\,(1 + 2,5\varphi/(1-\varphi))$

Obrázek 2: Závislost dodávky kyslíku na hematokritu

Po dosazení jednotlivých vztahů pro viskozitu dostáváme

1.
$$\varphi_{max} = \frac{\eta_0.e^{2,5\varphi}}{\eta_0.2,5.e^{2,5\varphi}} = 0,4$$

2.
$$\varphi_{max} = \frac{\eta_0\left(1 + 2,5\frac{\varphi}{1-\varphi}\right)}{\eta_0\left(2,5\frac{1}{(1-\varphi)^2}\right)} = \frac{1 + 2,5\frac{\varphi}{1-\varphi}}{2,5\frac{1}{(1-\varphi)^2}} \to 2,5\varphi = (1-\varphi)^2 + 2,5\varphi(1-\varphi)$$

Odtud získáme rovnici

$$1.5\varphi^2 + 2\varphi - 1 = 0 \to \varphi_{max} = \frac{-2 + \sqrt{4+6}}{3} = 0,387$$

Viz obr. 2

4 Řeka v údolí (10 bodů)

Představme si čtvercovou krajinu, která je vymezena hodnotami x i y 0,5 a 2, tedy $x \in [0.5, 2]$ i $y \in [0.5, 2]$. Profil krajiny, tedy namořská výška jednotlivých bodů h, je dán funkcí

$$h = \frac{e^{xy}}{xy}$$

V údolí krajiny, tedy nejníže položenými body, teče řeka.

Zjistěte, kude řeka teče, t.j. určete funkci $y = f(x)$, která body řeky popisuje. Určete též, v jaké nadmořské výšce řeka teče. Nakreslete pomocí matplotlib hory i řeku v ní. Použijte funkci `plot_surface`, kterou znáte z předchozí série úloh, přidejte ale parametr `alpha=0.5`, čímž plochu zprůsvitníte a bude vidět i řeka. Řeku přidáte jednoduše funkcí `plot`, musíte však předem definovat vektory parametrického popisu řeky A, B, C.

Řešení:

Údolí, nejnižší body, musí splňovat podmínky $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$. Odtud získáme 2 rovnice, určující podmínky pro vztah x a y.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{xy}}{xy} = \frac{ye^{xy}xy - e^{xy}y}{(xy)^2} = 0 \rightarrow xy = 1$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{xy}}{xy} = \frac{xe^{xy}xy - e^{xy}x}{(xy)^2} = 0 \rightarrow xy = 1$$

Řeka je tedy popsána rovnicí $y = 1/x$. Odpovídající nadmořská výška je $h = e$.

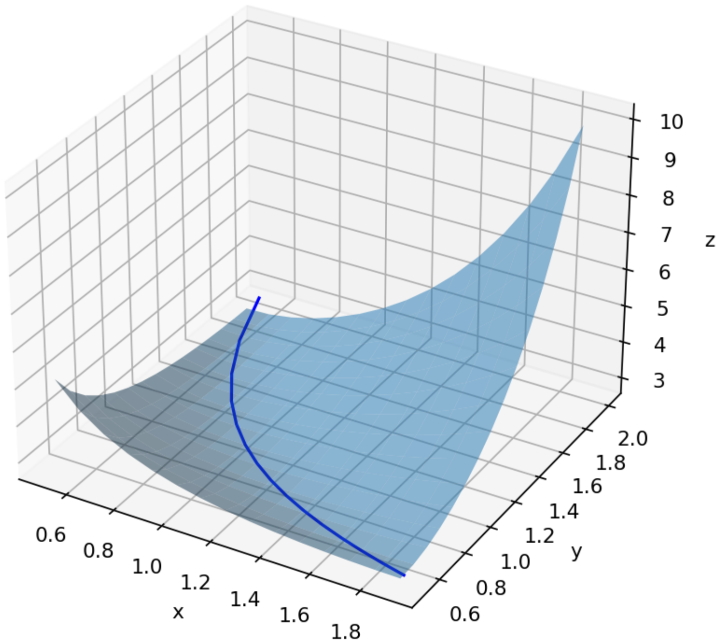
Text programu může být následující, graf je na obr. 3:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
import ipympl

%matplotlib widget

x = np.arange(0.5, 2, 0.1)
y = np.arange(0.5, 2, 0.1)

A=np.arange(0.5,2,0.1)
B=1/A
C = np.exp(A*B)/(A*B)

X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = np.exp(X*Y)/(X*Y)

fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
ax.plot(A, B, C,'blue' )
ax.plot_surface(X, Y, Z,alpha=0.5)

ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
plt.show()
```

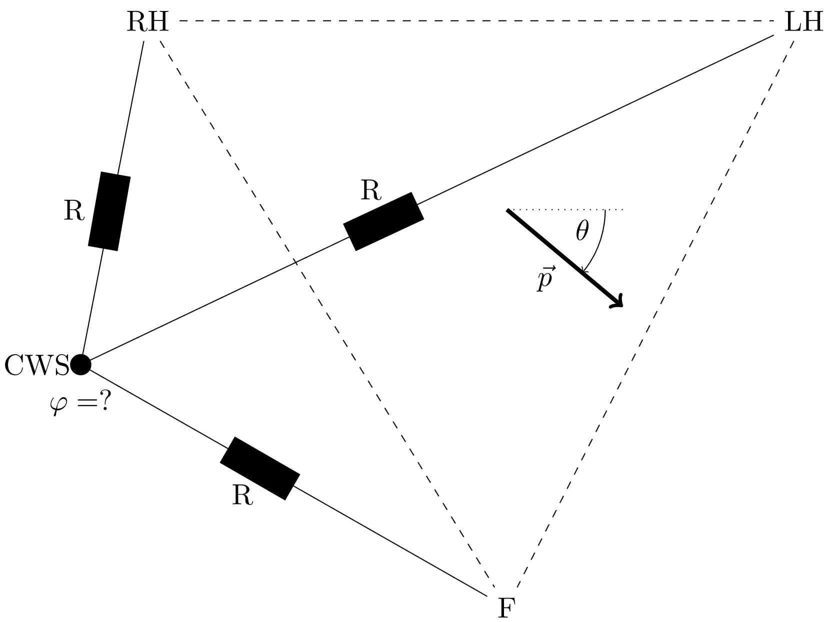
Superbonusová úloha - Centrální Wilsonova svorka (15 bodů)

V obvyklém EKG vyšetření používáme bipolární (I,II,III) a unipolární svody (aVL, aVF, aVR, V1,V2...). Bipolární svody měří napětí mezi 2 elektrodami, unipolární mezi elektrodou a centrální Wilsonovou svorkou (CWS). Tato svorka vznikne spojením končetinových elektrod „I, II, III“ před stejné odpory R (např. 5 kΩ) do jedné elektrody (viz obr. 4). Předpokládejme, že 3 elektrody jsou ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku a srdce je v jeho těžišti.

Využijte znalost potenciál elektrického srdečního vektoru v místě jednotlivých elektrod a s použitím Kirchhoffových zákonů dokažte, že potenciál centrální Wilsonovy svorky je přibližně nulový, $\varphi \approx 0$.



Obrázek 3: Pohoří s řekou



Obrázek 4: Potenciál centrální Wilsonovy svorky