Matematická (pato)fyziologie - Úlohy 8

Termín zadání: 23.04.2022
Termín odevzdání: 27.04.2022

1 Popis pomocí diferenciálních rovnic (5 bodů)

Napište diferenciální rovnice, které odpovídají následujícím popisům.

1. Molekuly látky spontánně degradují, přičemž pravděpodobnost degradace v následující sekundě je pro všechny molekuly stejná.
2. Bakterie se množí dělením jednotlivých buněk, zároveň pod vlivem antibiotik jednotlivé buňky umírají a zároveň růst bakterií omezuje konkurence o sdílené zdroje. Konkurence je úmerná skutečnosti, že se dvě bakterie setkají u stejného zdroje.
3. fT3 stimuluje tvorbu TSH, přičemž intenzita stimulace je popsána funkcí $f([fT3])$. Zároveň TSH stimuluje tvorbu fT3, přičemž intenzita stimulace je popsána funkcí $g([TSH])$. Jak TSH, tak fT3 též spontánně degradují. Napiště odpovídající soustavu diferenciálních rovnic.

Řešení:

1. $$\frac{dx}{dt} = -kx$$
2. $$\frac{dx}{dt} = k_1x - k_2x - k_3x^2$$
3. $$\frac{d[TSH]}{dt} = f([fT3]) - k_1[TSH]$$
$$\frac{d[fT3]}{dt} = g([TSH]) - k_2[fT3]$$

2 Pozitivní zpětná vazba (5 bodů)

Pozitivní zpětná vazba je charakterizována skutečností, že rychlost změny veličiny je úměrná veličině samotné. Napiště odpovídající diferenciální rovnici a vyřešte ji. Považujte rychlost změny za přímo úměrnou.

Řešení: Odpovídající diferenciální rovnice zní

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Řešením je funkce

$$x = x_0e^{kx}$$

Veličina tedy roste exponenciálně rychle, což se projeví rychlým rozvojem „katastrofy“.

3 Newtonova metoda tečen (10 bodů)

Jednou z metod numerického řešení nelineárních algebraických rovnic je Newtonova metoda tečen. Odvození metody je popsáno ve skriptech. Řešíme rovnici $f(x) = 0$. Zvolíme počáteční odhad řešení x_0. Poté postupně aplikujeme iterativní vzorec

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

dokud je rozdíl $|x_i - x_{i+1}| > \varepsilon$. Napiště program v Pythonu, který pomocí Newtonovy metody řeší rovnici pro zadanou funkci f. Derivaci f' program též dostane zadanou, nemusí ji odhadovat. Změřte též, kolik iterací program musí provést, než dospěje k řešení.

Řešení: Řešení je uvedeno pro případ rovnice $\cos x = x$.

```
import math

def g(x):
    return x-math.cos(x)

def gdev(x):
    return 1+math.sin(x)

eps = 0.001           # tolerovaná chyba
j=0                   # počet iterací

x0=1                  # počáteční odhad
x1=x0-g(x0)/gdev(x0)  # 1 krok iterace

while abs(x0-x1) > eps:
      x0=x1
      x1=x0-g(x0)/gdev(x0)
      j+=1

print(x0)
print(x1)
print(j)
```

4 Řešení rovnic pomocí Newtonovy metody (5 bodů)

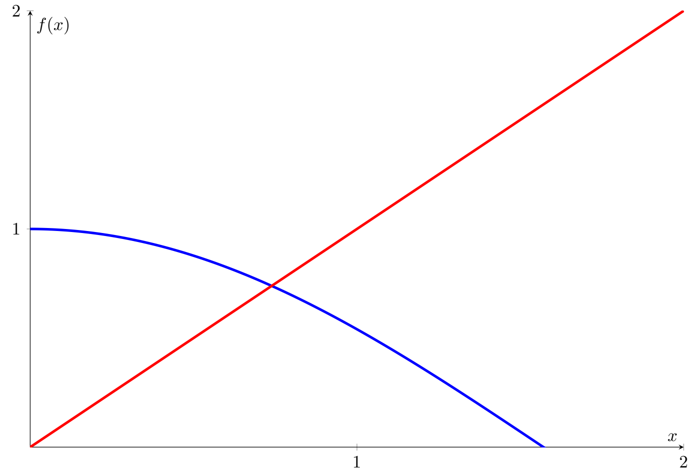
Aplikujte program, který jste vytvořili v předchozí úloze na následující rovnice. Zkuste zvolit různá počáteční x_0 a pozorujte chování programu. Stane se, že řešení někdy nekonverguje? Závisí rychlost konvergence podstatně na volbě x_0?

1. $\cos x = x$
2. $\ln x = -x^2 + 3$
3. $x^2 + 3x + 2 = 0$

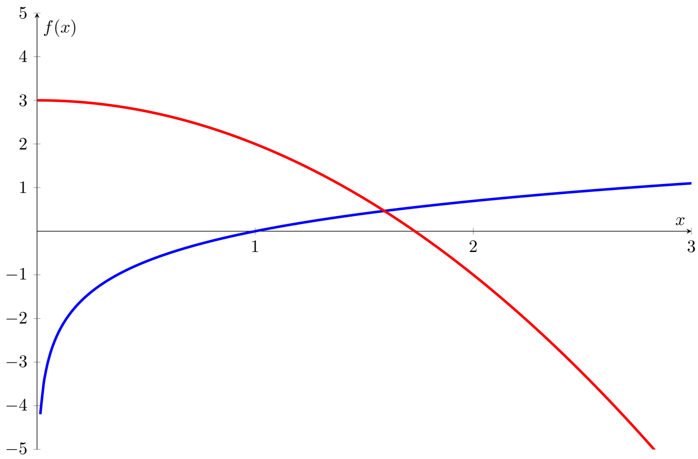
Řešení: Řešení je uvedeno pro případ $\varepsilon = 0,001$ a $x_0 = 1$.

1. 2 iterace, $x = 0,739$

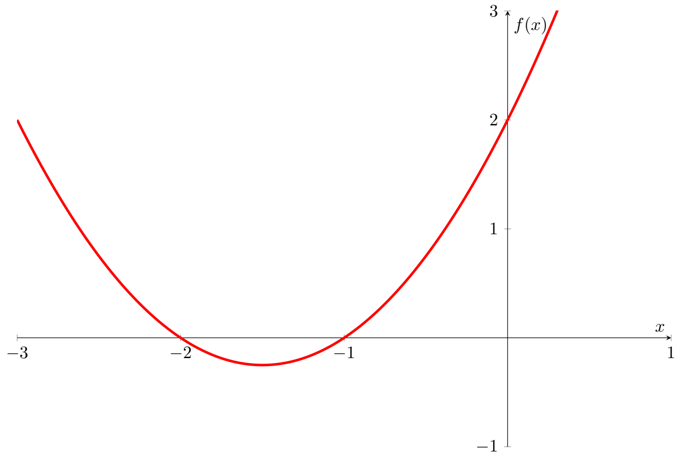
2. 3 iterace, $x = 1,592$
3. 4 iterace, $x = -0,999$ pro $x_0 = 1$ a $x = -2,000$ pro $x_0 = -3$



Obrázek 1: $\cos x = x$



Obrázek 2: $\ln x = -x^2 + 3$



Obrázek 3: $x^2 + 3x + 2 = 0$