

Matematická (pato)fyzilogie - Úlohy 9

Termín zadání: 29.04.2022

Termín odevzdání: 11.05.2022

1 Eulerova versus Runge-Kuttova metoda (10 bodů)

Vyřešte následující diferenciální rovnice (kde y je funkcí x) vždy pomocí Eulerovy i Runge-Kuttovy metody 4. řádu. Příslušné programy v Pythonu jsou v is.muni. Výsledky zakreslete do společného grafu (závislost y na x). Zakreslete též analytické řešení, použijte různé časové kroky dt (např. 0.1, 0.01, 0.001 apod.) a pozorujte přesnost obou metod.

1. Logistická diferenciální rovnice $y' = y(1 - y)$

Analytickým řešením je $y(x) = \frac{e^x}{e^x + C}$. Zvolte $C = 1$ a tomu odpovídající počáteční podmínku pro $x = 0$.

2. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

Její analytické řešení je $y = \left(x^2 \ln K \sqrt{|x|}\right)^2$ pro $K > 0$ a $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Zvolte $K = 1/2$ a počáteční podmínku pro $x = -5$.

2 Runge-Kuttova metoda pro soustavy diferenciálních rovnic (10 bodů)

Inspirujte se ostatními programy nahranými na is.muni a napište pythonský program, který řeší soustavu 2 diferenciálních rovnic prvního řádu pomocí Runge-Kuttovy metody 4. řádu.

3 Soustava diferenciálních rovnic (10 bodů)

Pomocí Eulerovy i Runge-Kuttovy metody vyřešte následující soustavu rovnic. Pozor, x a y jsou dvě funkce času, tedy $x(t)$ a $y(t)$, nikoli $y(x)$! Nakreslete jednak průběhy $x(t)$ a $y(t)$, jednak fázový portrét soustavy $y - x$. Portréty pro různé počáteční podmínky nakreslete do 1 grafu. Jaký zajímavý obrazec pozorujete?

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

4 Inzulín-Glukóza pomocí Runge-Kuttovy metoda (10 bodů)

Pomocí Runge-Kuttovy metody pro soustavu diferenciálních rovnic vyřešte problém inzulínu a glukózy řešený při přednášce pomocí Eulerovy metody. Porovnejte řešení získaná oběma metodami.