Užití integrálu.

Lenka Přibylová

5. listopadu 2010

Obsah

Určete intenzitu rovinné monochromatické vlny $E_y = \psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ ve vakuu.

$$I = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau E_y^2 \,\mathrm{d}t$$

Určete intenzitu rovinné monochromatické vlny
$E_y = \psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ ve vakuu.

$$I = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau E_y^2 \,\mathrm{d}t = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2\cos^2(\omega t - kx)\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme funkci harmonické vlny.

Určete intenzitu rovinné monochromatické vlny
$E_y = \psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ ve vakuu.

$$I = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau E_y^2\,\mathrm{d}t = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2\cos^2(\omega t - kx)\,\mathrm{d}t$$
$$= c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{1+\cos(2(\omega t - kx))}{2}\,\mathrm{d}t$$

Sečtením rovností $\sin^2\heartsuit + \cos^2\heartsuit = 1$ a $\cos^2\heartsuit - \sin^2\heartsuit = \cos 2\heartsuit$ dostaneme $2\cos^2\heartsuit = 1 + \cos 2\heartsuit$.

Určete intenzitu rovinné monochromatické vlny
$E_y = \psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ ve vakuu.

$$I = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau E_y^2\,\mathrm{d}t = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2\cos^2(\omega t - kx)\,\mathrm{d}t$$

$$= c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \tfrac{1+\cos(2(\omega t - kx))}{2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\left[t + \tfrac{\sin(2(\omega t - kx))}{2\omega}\right]_0^\tau$$

Vytkneme $\frac{1}{2}$ a integrujeme podle t.

Určete intenzitu rovinné monochromatické vlny
$E_y = \psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ ve vakuu.

$$I = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau E_y^2\,\mathrm{d}t = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2\cos^2(\omega t - kx)\,\mathrm{d}t$$
$$= c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \tfrac{1+\cos(2(\omega t - kx))}{2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\left[t + \tfrac{\sin(2(\omega t - kx))}{2\omega}\right]_0^\tau$$
$$= \tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\left(\tau + \tfrac{\sin(2(\omega\tau - kx)) - \sin(2(-kx))}{2\omega}\right)$$

Dosadíme horní mez τ za t mínus dolní mez 0 za t do primitivní funkce. Dle Newton-Leibnitzovy věty platí
$\int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t = F(\tau) - F(0)$, kde F je primitivní k f.

Určete intenzitu rovinné monochromatické vlny $E_y = \psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ ve vakuu.

$$I = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau E_y^2\,\mathrm{d}t = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2\cos^2(\omega t - kx)\,\mathrm{d}t$$
$$= c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \tfrac{1+\cos(2(\omega t - kx))}{2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\left[t + \tfrac{\sin(2(\omega t - kx))}{2\omega}\right]_0^\tau$$
$$= \tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\left(\tau + \tfrac{\sin(2(\omega\tau - kx)) - \sin(2(-kx))}{2\omega}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 A^2\left(1 + \tfrac{\sin(2(\omega\tau - kx)) - \sin(2(-kx))}{2\omega\tau}\right)$$

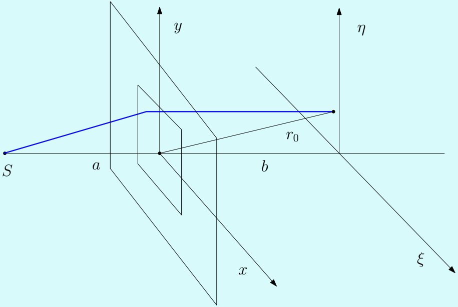
Vydělíme τ.

Určete intenzitu rovinné monochromatické vlny $E_y = \psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ ve vakuu.

$$I = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau E_y^2\,\mathrm{d}t = c\varepsilon_0 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2\cos^2(\omega t - kx)\,\mathrm{d}t$$
$$= c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \tfrac{1+\cos(2(\omega t - kx))}{2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\left[t + \tfrac{\sin(2(\omega t - kx))}{2\omega}\right]_0^\tau$$
$$= \tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 A^2 \frac{1}{\tau}\left(\tau + \tfrac{\sin(2(\omega\tau - kx)) - \sin(2(-kx))}{2\omega}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 A^2 \left(1 + \tfrac{\sin(2(\omega\tau - kx)) - \sin(2(-kx))}{2\omega\tau}\right) \doteq \tfrac{1}{2}c\varepsilon_0 A^2$$

Druhý člen v závorce můžeme zanedbat, protože je vždy menší než $\frac{2}{2\omega\tau} = \frac{T}{2\pi\tau} < 10^{-6}$ pro reálné detektory světla, tedy nepatrný oproti 1.

Popište obraz monochromatické vlny při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru.



$$\psi(\xi,\eta) = A \int_{-p/2}^{p/2} \int_{-q/2}^{q/2} e^{-ik\frac{(\xi x+\eta y)}{r_0}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Popište obraz monochromatické vlny při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru.

$$\psi(\xi,\eta) = \quad A\int_{-p/2}^{p/2} e^{-\frac{ik}{r_0}\xi x}\,\mathrm{d}x \int_{-q/2}^{q/2} e^{-\frac{ik}{r_0}\eta y}\,\mathrm{d}y$$

Popište obraz monochromatické vlny při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru.

$$
\begin{aligned}
\psi(\xi,\eta) = {} & A \int_{-p/2}^{p/2} e^{-\frac{ik}{r_0}\xi x}\,\mathrm{d}x \int_{-q/2}^{q/2} e^{-\frac{ik}{r_0}\eta y}\,\mathrm{d}y \\
= {} & A \left[\frac{e^{-\frac{ik}{r_0}\xi x}}{-\frac{ik}{r_0}\xi} \right]_{-p/2}^{p/2} \left[\frac{e^{-\frac{ik}{r_0}\eta y}}{-\frac{ik}{r_0}\eta} \right]_{-q/2}^{q/2}
\end{aligned}
$$

Popište obraz monochromatické vlny při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru.

$$\begin{aligned}
\psi(\xi,\eta) = &\quad A \int_{-p/2}^{p/2} e^{-\frac{ik}{r_0}\xi x}\,\mathrm{d}x \int_{-q/2}^{q/2} e^{-\frac{ik}{r_0}\eta y}\,\mathrm{d}y \\
= &\quad A \left[\frac{e^{-\frac{ik}{r_0}\xi x}}{-\frac{ik}{r_0}\xi}\right]_{-p/2}^{p/2} \left[\frac{e^{-\frac{ik}{r_0}\eta y}}{-\frac{ik}{r_0}\eta}\right]_{-q/2}^{q/2} \\
= &\quad A \frac{2r_0 \sin(k\xi p/2r_0)}{k\xi} \frac{2r_0 \sin(k\eta q/2r_0)}{k\eta}
\end{aligned}$$

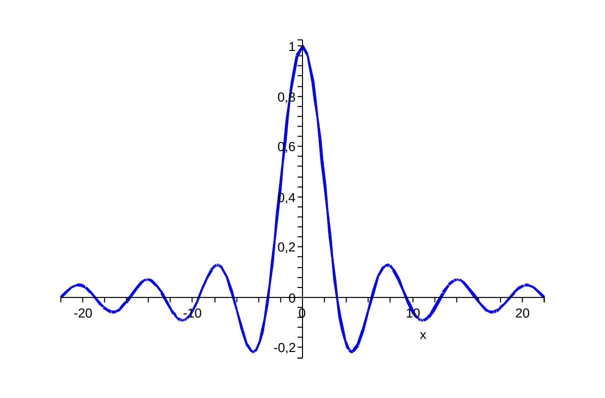
Podle Eulerova vztahu platí $e^{i\heartsuit} + e^{-i\heartsuit} = 2i \sin \heartsuit$.

Popište obraz monochromatické vlny při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru.

$$
\begin{aligned}
\psi(\xi,\eta) = \quad & A\int_{-p/2}^{p/2} e^{-\frac{ik}{r_0}\xi x}\,\mathrm{d}x \int_{-q/2}^{q/2} e^{-\frac{ik}{r_0}\eta y}\,\mathrm{d}y \\
= \quad & A\left[\frac{e^{-\frac{ik}{r_0}\xi x}}{-\frac{ik}{r_0}\xi}\right]_{-p/2}^{p/2}\left[\frac{e^{-\frac{ik}{r_0}\eta y}}{-\frac{ik}{r_0}\eta}\right]_{-q/2}^{q/2} \\
= \quad & A\frac{2r_0\sin(k\xi p/2r_0)}{k\xi}\,\frac{2r_0\sin(k\eta q/2r_0)}{k\eta} \\
= \quad & Apq\frac{\sin(k\xi p/2r_0)}{k\xi p/2r_0}\,\frac{\sin(k\eta q/2r_0)}{k\eta q/2r_0}
\end{aligned}
$$

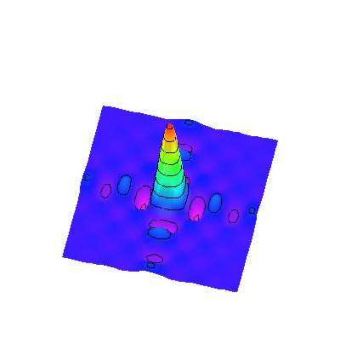
Popište obraz monochromatické vlny při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru.

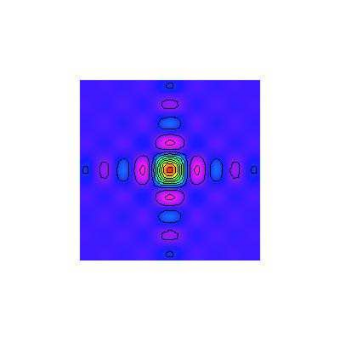
Grafem funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ je



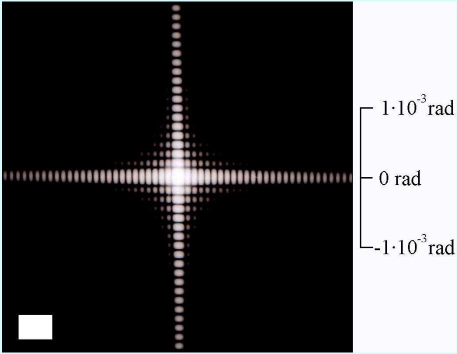
Popište obraz monochromatické vlny při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru.

Grafem funkce $\psi(\xi, \eta) = \frac{\sin \xi}{\xi} \frac{\sin \eta}{\eta}$ je





Popište obraz monochromatické vlny při Fraunhoferově difrakci na obdélníkovém otvoru.



Protože $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, je intenzita ve středu obrazu přímo úměrná $I_0=A^2p^2q^2$.

KONEC