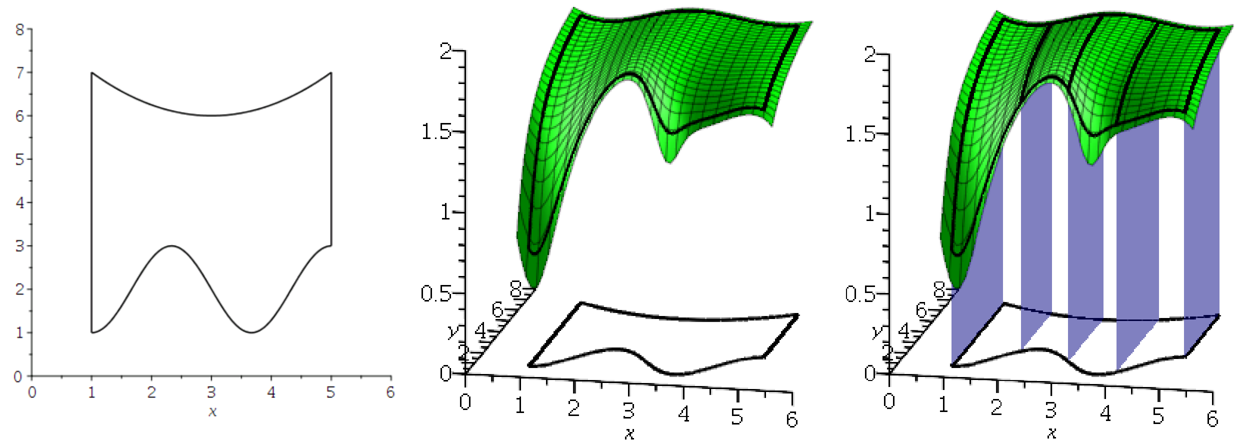
MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 10. cvičenie, 9.12.2020

Viacnásobný a viacrozmerný integrál

Fubiniho veta je prostriedok, ktorý nám umožňuje previesť viacrozmerý integrál na viacnásobný integrál. Jej tvrdenie sa dá ilustrovať nasledujúcim obrázkom:



Predpokladajme, že funkcia $f(x,y)$ je spojitá na množine

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

kde φ a ψ sú spojité funkcie na intervale $[a,b]$. Definujme funkciu $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nasledujúcim predpisom: $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$. Pre každé pevne zvolené $x \in [a,b]$ je $f(x,y)$ spojitá funkcia (jednej) premennej y definovaná na intervale $[\varphi(x), \psi(x)]$, takže predošlá definícia má zmysel. Fubiniho veta hovorí o platnosti nasledujúcej rovnosti:

$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{1}{=} \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \overset{2}{=} \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \overset{3}{=} \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Táto veta teda tvrdí, že objem telesa, ktoré je ohraničené rovinou xy a grafom funkcie f, vypočítame súčtom plôch rezov tohto telesa všetkými nekonečne veľa rovinami $x = x_0 \in [a,b]$.

Samozrejme, tvrdenie platí aj v prípade zámeny úloh premenných x a y. Analogické tvrdenie platí pre funkcie ľubovoľného počtu premenných. V takom prípade musíme byť schopní usporiadať jednotlivé premenné tak, aby množina, cez ktorú integrujeme bola vyjadriteľná v tvare $x_i \in [a_i, b_i]$, pre každú premennú x_i, kde hranice tohto intervalu môžu závisieť len od premmenných, ktoré sú v spomínanom usporiadaní predchodcami premennej x_i. Špeciálne, po správnom použití Fubiniho vety má posledný integrál konštantné medze. Opak svedčí o výskyte chyby. Uveďme ešte jednu poznámku. V prípade viacrozmerného integrálu chápeme diferenciály na jeho konci ako jeden symbol, a ich poradie pre naše účely nie je podstatné. Avšak pri práci s viacnásobným integrálom, špeciálne po použití Fubiniho vety, je každý diferenciál samostatný symbol a ich vzájomné poradie je podstatné. Viažu sa totiž na integračné medze zapísané pri integrálnom znaku a pripomínajú nám poradie integrovania jednotlivých premenných, teda kedy máme ktorú premennú integrovať.

[1] Tvrdenie Fubiniho vety.
[2] Definícia funkcie F.
[3] Zátvorky sa zvyknú vynechávať.

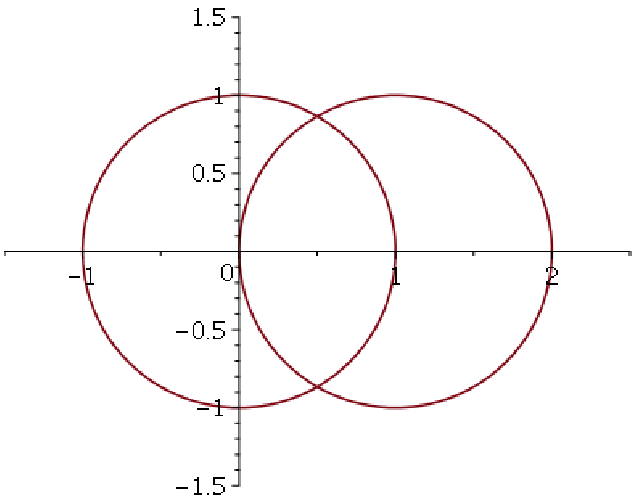
Príklad 1. Vypočítajte dvojný integrál

$$\iint\limits_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$.

Najprv nájdeme vyjadrenie množiny M, ktoré spĺňa predpoklady Fubiniho vety. Množina M je časťou prieniku kruhu so stredom v bode $(0,0)$ s polomerom 1 s doplnkom kruhu so stredom v bode $(1,0)$ s polomerom 1, ktorá leží nad osou x. Ak ju rozdelíme, na dve časti, podľa toho, či je $x \leq 0$, alebo $x > 0$ dostaneme dve množiny, ktoré sú elementárne vzhľadom k ose x:

$$A = M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\},$$
$$B = M \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq \tfrac{1}{2},\ \sqrt{1 - (x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$



Môžeme počítať:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \iint\limits_A y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint\limits_B y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} 1 - x^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{1}{2}} 1 - x^2 - (1 - (x-1)^2) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{1}{2}} -2x + 1 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left[-x^2 + x \right]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}.
\end{aligned}$$

✈

Príklad 2. Zameňte poradie integrácie nasledujúceho dvojnásobného integrálu:

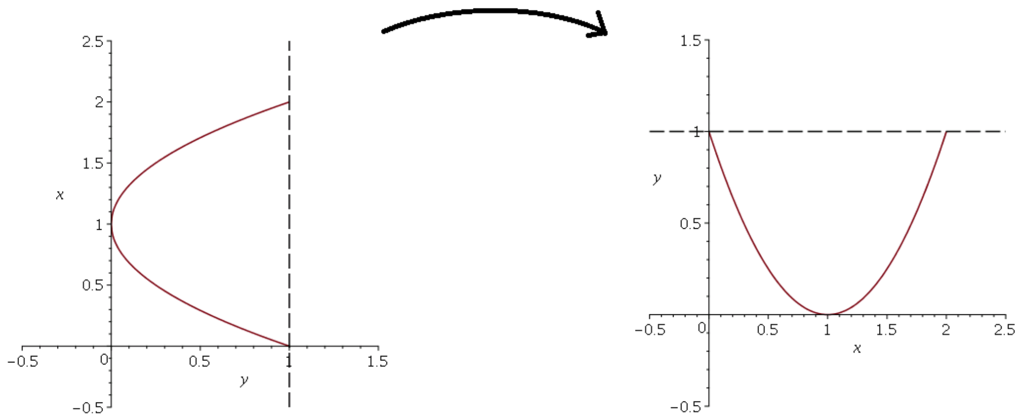
$$\int_{0}^{1} \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Podľa Fubiniho vety platí

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ 1-\sqrt{y} \leq x \leq 1+\sqrt{y}\}$, teda množina M je elementárna vzhľadom k ose y. Našou úlohou je, ak je to možné, nájsť vyjadrenie množiny M, ktoré z nej urobí množinu elementárnu vzhľadom k ose x, a potom opäť použiť Fubiniho vetu, ktorá prevedie dvojný integrál $\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ na dvojnásobný s tým rozdielom, že tentokrát budeme integrovať najprv premennú y a až potom premennú x. Môžeme si pomôcť obrázkom.

$$\begin{array}{c} 0 \leq y \leq 1 \\ 1-\sqrt{y} \leq x \leq 1+\sqrt{y} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 0 \leq y \leq 1 \\ 1-\sqrt{y} \leq x \\ x \leq 1+\sqrt{y} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 0 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^2 \leq y \\ y \leq 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 0 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^2 \leq y \leq 1 \end{array}$$



Preto platí

$$\int_0^1 \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_{(x-1)^2}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Všimnite si opačné poradie diferenciálov. ✈

Príklad 3. Vypočítajte dvojnásobný integrál

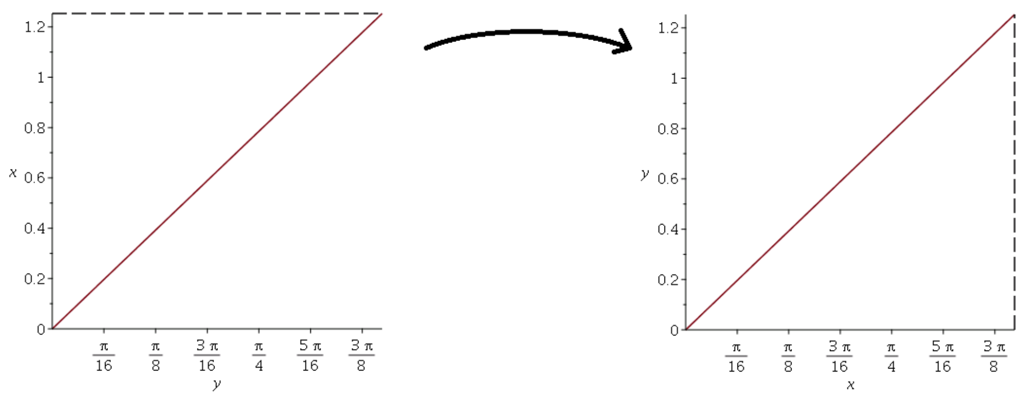
$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Hneď po prvom kroku

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

zistíme, že tadiaľto cesta nevedie, keďže funkcia $\int \sin x^2\,\mathrm{d}x$ je vyššia transcendentná. Musíme zameniť poradie integrácie.

$$\begin{array}{c} 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ y \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ 0 \leq y \leq x \end{array}$$



Počítajme:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2\sin x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_0^x y^2\sin x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left[\frac{y^3\sin x^2}{3}\right]_0^x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{x^3\sin x^2}{3}\,\mathrm{d}x\,\left|\begin{array}{c} t = x^2\\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x\\ 0 \rightsquigarrow 0\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rightsquigarrow \frac{\pi}{2}\end{array}\right| = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,\mathrm{d}t\,\left|\begin{array}{cc} u' = \sin t & u = -\cos t\\ v = t & v' = 1\end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{6}[-t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}.$$

✈

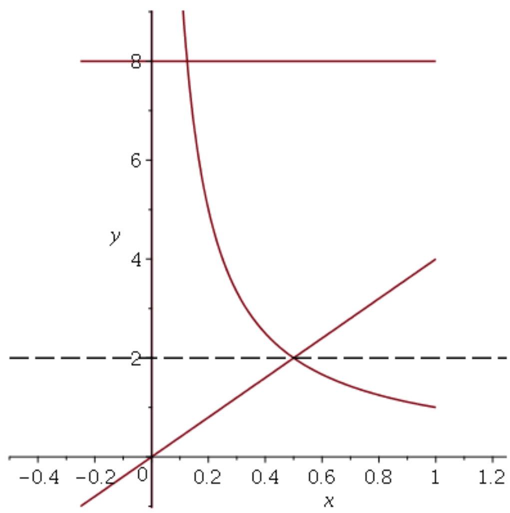
Príklad 4. Vypočítajte plochu útvaru M, ktorý je ohraničený krivkami $x = 0$, $y = 1/x$, $y = 4x$ a $y = 8$.

Obsah útvaru alebo presnejšie miera množiny M je daná vzťahom

$$m(M) = \iint_M 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Preto nám stačí zistiť, či sa dá množina M poskladať z elementárnych množín vzhľadom k niektorej zo súradnicových osí a následne použiť Fubiniho vetu. Pomôžeme si obrázkom. Krivky $y = \frac{1}{x}$ a $y = 4x$ sa pretínajú v bode $(\frac{1}{2}, 2)$. Množinu M môžeme vyjadriť ako zjednotenie $M = A \cup B$, kde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le \tfrac{y}{4}\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le y \le 8,\ 0 \le x \le \tfrac{1}{y}\}.$$



Obidve z uvedených množín sú elementárne vzhľadom k ose y a ich prienik, úsečka, je množinou nulovej miery, takže sa môžeme pustiť do integrovania.

$$\iint_M 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_B 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2\int_0^{\frac{y}{4}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_2^8\int_0^{\frac{1}{y}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 [x]_0^{\frac{y}{4}} \,\mathrm{d}y + \int_2^8 [x]_0^{\frac{1}{y}} \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{y}{4} \,\mathrm{d}y + \int_2^8 \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{8}\right]_0^2 + [\log y]_2^8$$
$$= \frac{1}{2} + \log 4.$$
✈

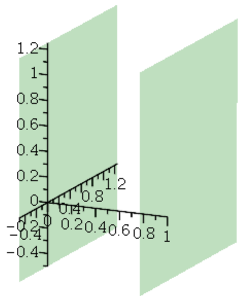
Príklad 5. Vypočítajte trojný integrál

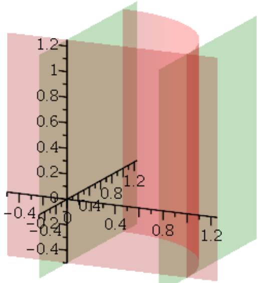
$$\iiint\limits_M (x+y)z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

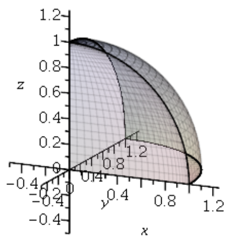
kde M je osmina gule $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ ležiaca v prvom oktante.

Množinu M môžeme určiť prostredníctvom nasledujúcich nerovností:

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, \qquad 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$







Množina M je elementárna vzhľadom k rovine xy, čo nám opäť umožní použitie Fubiniho vety:

$$\iiint\limits_M (x+y)z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x+y)z \underbrace{\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x}_{\text{Pozor na poradie diferenciálov.}}$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{(x+y)z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)(1-x^2-y^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x - x^3 + y - x^2 y - xy^2 - y^3 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(x-x^3)y + (1-x^2)\frac{y^2}{2} - x\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + (1-x^2)\frac{1-x^2}{2} - x\frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{(1-x^2)^2}{4} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{(1-x^2)^2}{4} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^1 x(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x \left| \begin{array}{c} t = 1-x^2 \\ \mathrm{d}t = -2x \,\mathrm{d}x \\ 0 \rightsquigarrow 1 \\ 1 \rightsquigarrow 0 \end{array} \right| + \frac{1}{8} \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{6} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}t + \frac{1}{8} \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \left[\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{30} + \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{15}.$$

✈

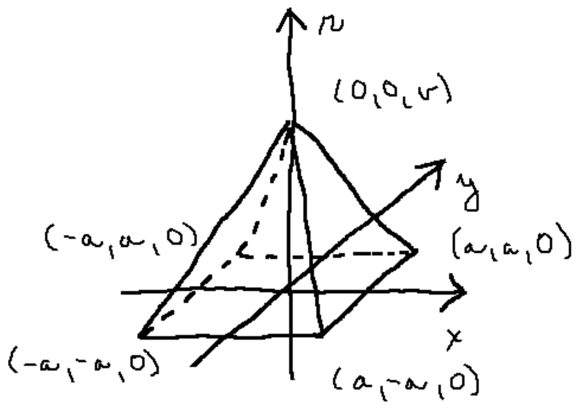
Príklad 6. Vypočítajte objem kolmého ihlanu so štvorcovou podstavou.

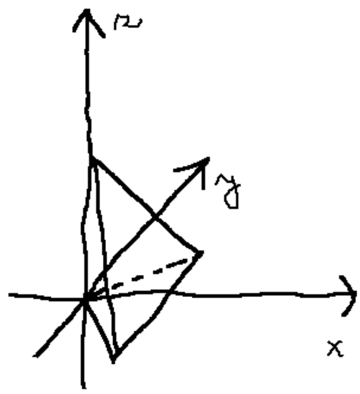
Označme symbolom v výšku ihlanu a symbolom $2a$ dĺžku strany jeho podstavy. Umiestnime tento ihlan do priestoru tak, aby vrcholy jeho podstavy boli body $(a, a, 0)$, $(-a, a, 0)$, $(-a, -a, 0)$ a $(a, -a, 0)$ a jeho vrchol mal súradnice $(0, 0, v)$. Ihlan môžeme rozdeliť na štyri rovnaké časti tak, že ho rozrežeme rovinami , v ktorých leží vrchol ihlanu a jedna z uhlopriečok jeho podstavy. Vypočítame objem jednej takejto štvrtiny. Jedna z týchto štvrtín môže byť popísaná nerovnosťami $0 \le x \le a$, $-x \le y \le x$ a z-ová súradnica je zdola ohraničená 0 a zhora stenou ihlanu. Preto potrebujeme túto stenu vyjadriť ako graf funkcie $z(x, y) = f(x, y)$. Vzhľadom k tomu, že sa jedná o rovinu, má funkcia z tento tvar $z = bx + cy + d$. Koeficienty b, c a d dopočítame zo sústavy lineárnych rovníc, ktoré vzniknú dosadením súradníc bodov $(a, a, 0)$, $(a, -a, 0)$, $(0, 0, v)$ ležiacich na tejto stene.

$$\begin{aligned} 0 &= ba + ca + d \\ 0 &= ba - ca + d \\ v &= d \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} d &= v \\ b &= -\frac{v}{a} \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Označme symbolom M skúmanú štvrtinu ihlanu. Zistili sme, že M je určená nasledujúcimi nerovnosťami:

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le a, \quad -x \le y \le x, \quad 0 \le z \le -\frac{v}{a}x + v \right\}$$





Miera tejto množiny je opäť daná integrálom funkcie 1 cez množinu M:

$$\begin{aligned} m(M) &= \iiint\limits_M 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^a \int_{-x}^{x} \int_0^{-\frac{v}{a}x+v} 1 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^a \int_{-x}^{x} [z]_0^{-\frac{v}{a}x+v} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a \int_{-x}^{x} -\frac{v}{a}x + v \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^a \left(-\frac{v}{a}x + v\right) [y]_{-x}^{x} \,\mathrm{d}x = \int_0^a 2x \left(-\frac{v}{a}x + v\right) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a \frac{-2x^2 v}{a} + 2xv \,\mathrm{d}x = \left[\frac{-2x^3 v}{3a} + x^2 v\right]_0^a = \frac{-2a^3 v}{3a} + a^2 v = \frac{a^2 v}{3}. \end{aligned}$$

Objem ihlanu je preto $\frac{4a^2v}{3}$. Ak namiesto polovice dĺžky strany podstavy ihlanu a, použijeme dĺžku $b = 2a$, teda $a = \frac{b}{2}$ dostaneme známy vzorec $\frac{1}{3}b^2v$. ✈

Transformácia integrálu

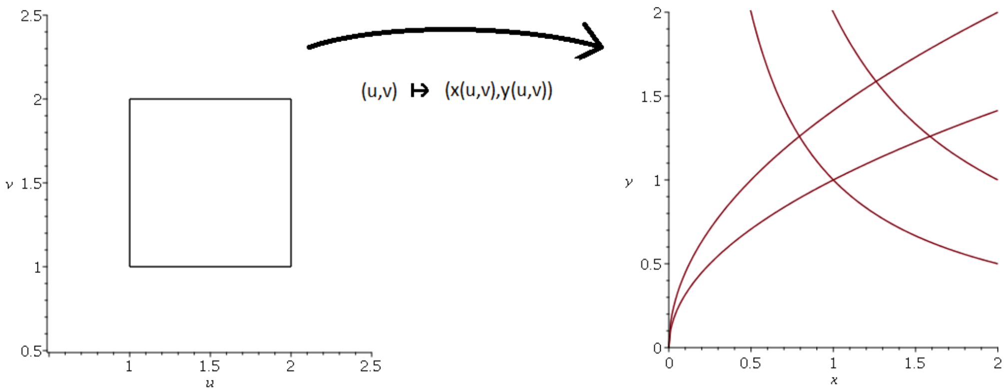
Náš jediný prostriedok, ako vypočítať viacrozmerný integrál je jeho redukcia prostredníctvom Fubiniho vety na integrál viacnásobný. Táto veta požaduje špeciálny tvar množiny M, cez ktorú integrujeme. Jedným zo spôsobov ako vyhovieť tejto podmienke je prechod k novému súradnicovému systému, v ktorom má množina M jednoduchší a hlavne požadovaný tvar. Tomuto postupu sa hovorí transformácia súradníc, respektíve integrálu. Zdôraznime, že zmenu súradnicového systému uskutočňujeme v prvom rade kvôli oboru integrácie a až v druhom rade kvôli zjednodušeniu integrovanej funkcie. Pri zmene súradníc nesmieme zabudnúť na absolútnu hodnotu jakobiánu použitej transformácie.

Príklad 7. Pomocou vhodnej transformácie vypočítajte dvojný integrál

$$\iint\limits_M \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je množina ohraničená krivkami $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $xy = 1$ a $xy = 2$.

Prepíšme uvedené nerovnosti do nasledujúceho tvaru: $1 \le \frac{y^2}{x} \le 2$, $1 \le xy \le 2$. To nám ponúka možnosť zaviesť nové súradnice u a v nasledujúcim spôsobom: $u = \frac{y^2}{x}$, $v = xy$. V takom prípade by množina, cez ktorú integrujeme, bola určená nerovnosťami $1 \le u \le 2$ a $1 \le v \le 2$ spĺňajúcimi prepdoklady Fubiniho vety.



Vyjadrime staré premenné v tých nových:

$$uv = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{uv}, \qquad v = xy \Rightarrow x = \frac{v}{y} = \frac{v}{\sqrt[3]{uv}} = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}.$$

Spočítajme Jakobián transformácie:

$$\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u^4}} & \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{uv}} \\ \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u^2}} & \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3u} \neq 0, \qquad \text{pre } 1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 2,$$

takže navrhnutú transformáciu skutočne môžeme použiť.

$$\iint\limits_M \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{[1,2]\times[1,2]} \sqrt{v}\cdot\left|-\frac{1}{3u}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_1^2\int_1^2 \sqrt{v}\cdot\left|-\frac{1}{3u}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_1^2\int_1^2 \frac{\sqrt{v}}{3u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \sqrt{v}[\log u]_1^2\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_1^2 \sqrt{v}\log 2\,\mathrm{d}v = \frac{\log 2}{3}\cdot\left[\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2\log 2}{9}(2\sqrt{2}-1).$$ ✈

Príklad 8. Vypočítajte dvojný integrál

$$\iint\limits_M \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$.

Vzhľadom k tomu, že množina cez ktorú integrujeme je polkruh nachádzajúci sa napravo od osi y so stredom v počiatku, má zmysel transformovať integrál do polárnych súradníc r a φ, ktoré sú dané rovnosťami $x = r\sin\varphi$ a $y = r\cos\varphi$. V nich je daná množina určená nerovnosťami $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ a $0 \le r \le 1$. Pripomeňme, že jakobián tejto transformácie je r. Môžeme počítať:

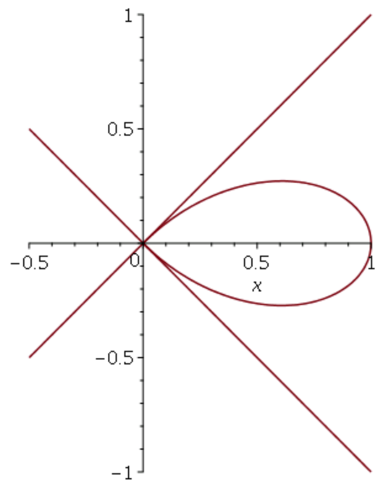
$$\iint\limits_M \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,1]} \mathrm{e}^{-r^2}\,|r|\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \left|\begin{array}{c} t = r^2 \\ \mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r \\ 0 \rightsquigarrow 0 \\ 1 \rightsquigarrow 1 \end{array}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}[\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi(1-\mathrm{e}^{-1})}{2}.$$

✈

Príklad 9. Vypočítajte obsah oblasti M nachádzajúcej sa v štvrťrovine $-x \le y \le x$ určenej nerovnosťou $(x^2+y^2)^3 \le (x^2-y^2)^2$.

Štvrťrovina $-x \le y \le x$ je v polárnych súradniciach určená nerovnosťami $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Nerovnosť $(x^2+y^2)^3 \le (x^2-y^2)^2$ má v tejto štvrťrovine v polárnych súradniciach tiež jednoduchší tvar:

$$\begin{aligned} &(x^2+y^2)^3 \le (x^2-y^2)^2 \\ \Leftrightarrow\quad &(r^2)^3 \le (r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)^2 \\ \Leftrightarrow\quad &r^6 \le r^4(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2 \\ \Leftrightarrow\quad &r^2 \le (\cos 2\varphi)^2 \\ \Leftrightarrow\quad &r \le \cos 2\varphi. \end{aligned}$$



Uvedená množina teda má v polárnych súradniciach tvar vyhovujúci prepdokladom Fubiniho vety, takže jej plochu môžeme vypočítať ako integrál cez túto množinu z funkcie 1:

$$\iint\limits_M 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\left\{(r,\varphi)\mid -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\,0\le r\le\cos 2\varphi\right\}} |r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos 2\varphi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\cos 2\varphi}\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos 2\varphi)^2}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4\varphi + 1}{4} = \left[\frac{\sin 4\varphi}{16} + \frac{\varphi}{4}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

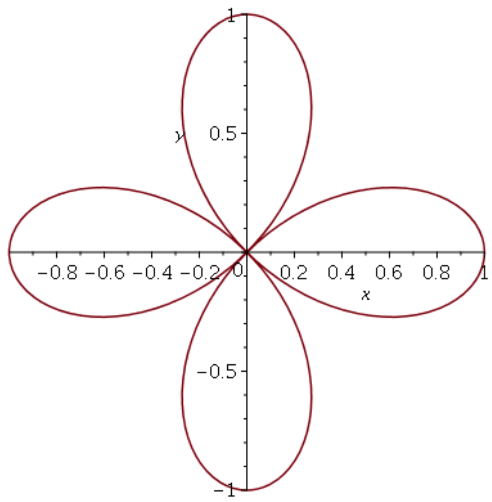
Takže plocha obrazca, ktorý ohraničuje krivka $(x^2+y^2)^3 = (x^2-y^2)^2$ v celej rovine $\mathbb{R}^2$ je $\frac{\pi}{2}$.

✈

Príklad 10. Vypočítajte integrál

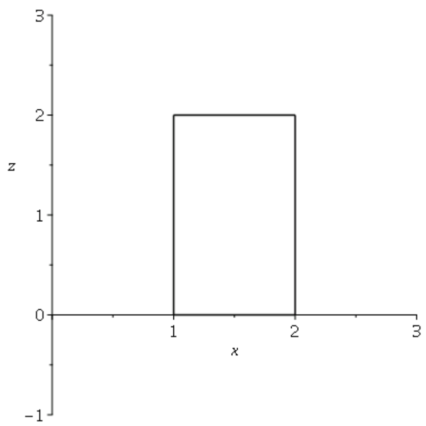
$$\iiint\limits_M x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

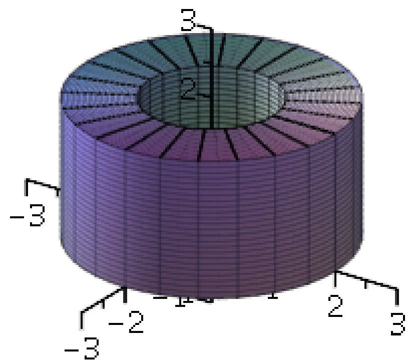
kde M je množina, ktorá vznikne rotáciou obdĺžnika s vrcholmi $(1,0,0)$, $(2,0,0)$, $(1,0,2)$ a $(2,0,2)$ okolo osi z.



Obr. 1: Príklad 9

Vo valcových súradniciach[4] má množina, cez ktorú integrujeme, veľmi jednoduchý tvar: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $1 \leq r \leq 2$ a $0 \leq z \leq 2$. Pripomeňme, že jakobián transformácie do valcových súradníc je r. Môžeme počítať:





$$\iiint\limits_M x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{[0,2\pi]\times[1,2]\times[0,2]} r^2 \cdot |r| \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_1^2 r^3 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{15}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{15}{4}\int_0^{2\pi} [z]_0^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{30}{4}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{30}{4}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{30}{4}\cdot 2\pi = 15\pi.$$

Vypočítali ste moment zotrvačnosti telesa M vzhľadom k jeho ose. ✈

Príklad 11. Určte objem telesa M v $\mathbb{R}^3$, ktoré je ohraničené časťou kúžeľa $x^2 + y^2 = (z-2)^2$ a paraboloidom $x^2 + y^2 = 4 - z$.

Upravme uvedené rovnosti tak, aby sme boli schopní si ich lepšie predstaviť. Paraboloid je grafom funkcie $z = 4 - x^2 - y^2$, čiže je otočený hore bruchom a jeho vrchol je posunutý do bodu $[0, 0, 4]$. Kúžeľ je daný rovnicou $z = 2 \pm \sqrt{x^2 + y^2}$, jeho vrchol je teda v bode $[0, 0, 2]$. Nájdeme objem telesa M, ktoré je ohraničené paraboloidom a len tou „kladnou“ časťou kúžeľa, ktorej

[4] $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$. Okrem materiálov z prednášky sú tieto súradnice popísané aj s obrázkom v [1] na strane 74 alebo v [3] na strane 140.

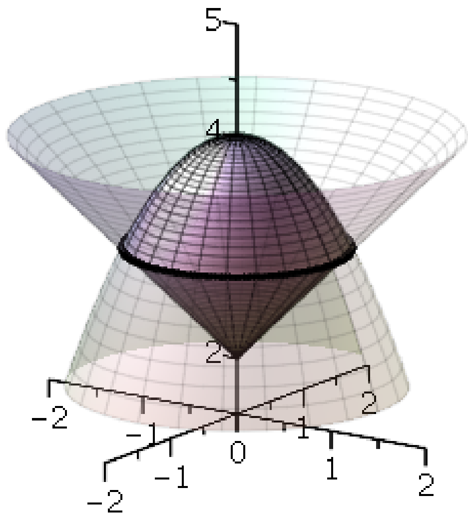
hrot smeruje dole, teda plochou, ktorá je grafom funkcie $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$. Teleso M je zrejme rotačné, konkrétne, vzniklo rotáciou istej plochy v rovine, povedzme zx, okolo osi z. Pre jeho popis bude teda vhodné zvoliť valcové súradnice. Ohraničenie pre súradnice φ a z je zrejmé: $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ a

$$2 + \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4 - x^2 - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + r \leq z \leq 4 - r^2.$$

Ohraničenie pre premennú r dostaneme tak, že nájdeme polomer valca, v ktorom sa celé uvažované teleso nachádza. K tomu nám pomôže prienik plôch $x^2 + y^2 = (z-2)^2$ a $x^2 + y^2 = 4 - z$. Z druhej rovnice môžeme dosadiť do prvej, čo nás privádza k rovnici

$$4 - z = (z-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 3z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{0, 3\}.$$

To nás privádza k dvom kružniciam $z = 3$, $x^2 + y^2 = 1$ a $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$. Nás zaujíma len tá prvá z nich. Jej polomer je 1, a preto posledné nerovnosti, ktoré určujú teleso M sú $0 \leq r \leq 1$. Môžeme integrovať:



$$\begin{aligned}
m(M) &= \iiint\limits_M 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\left\{(r,\varphi,z) \,\middle|\, \substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 2+r \leq z \leq 4-r^2}\right\}} |r| \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{2+r}^{4-r^2} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r[z]_{2+r}^{4-r^2} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(4 - r^2 - 2 - r) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -r^3 - r^2 + 2r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} + r^2\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \frac{5}{12} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{5}{12} \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi.
\end{aligned}$$

✈

Príklad 12. Vypočítajte integrál

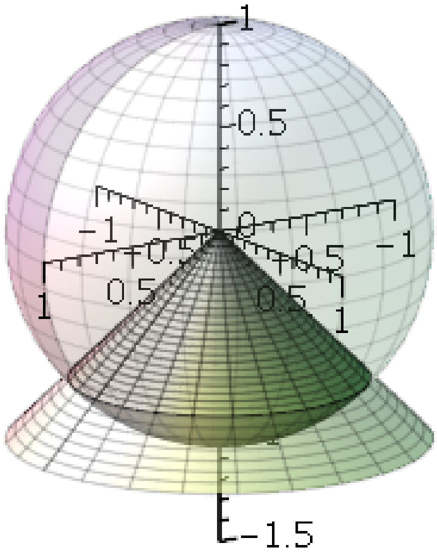
$$\iiint\limits_M yz \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \leq -\sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Vzhľadom k tomu, že množina, cez ktorú integrujeme, je časťou gule, má zmysel transformovať integrál do sférických súradníc[5]. Nerovnosť $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ určuje guľu so stredom v počiatku

[5] $x = r \cos\varphi \sin\vartheta$, $y = r \sin\varphi \sin\vartheta$, $z = r \cos\vartheta$. Okrem materiálov z prednášky sú tieto súradnice popísané aj s obrázkom v [1] na strane 90 alebo v [3] na strane 141.

a polomerom 1. My z nej však berieme len tie body, ktoré ležia pod kúžeľom $z = -\sqrt{x^2+y^2}$. Takáto množina je určená nasledujúcimi nerovnosťami: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$ a $\frac{3}{4}\pi \le \vartheta \le \pi$. Pripomeňme, že ϑ je uhol, ktorý zviera spojnica bodu s počiatkom s kladnou časťou osi z. Jakobián transformácie do sférických súradníc je $-r^2 \sin\vartheta$. Môžeme počítať:



$$\iiint\limits_M yz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{[0,2\pi]\times[0,1]\times[\frac{3}{4}\pi,\pi]} r\sin\varphi\sin\vartheta\cdot r\cos\vartheta\left|-r^2\sin\vartheta\right|\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} r^3\sin\varphi\sin^2\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Ďalej by sme kľudne mohli pokračovať rovnako ako v predošlých príkladoch. Toto je však vhodná situácia na ukážku jedného užitočného pravidla. Predpokladajme, že počítame viacnásobný integrál s konštantnými medzami a navyše premenné v integrande vieme separovať, teda máme dočinenia s nasledujúcim integrálom:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x)g(y)h(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Potom platí

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x)g(y)h(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_{y_1}^{y_2} g(y)\,\mathrm{d}y\cdot\int_{z_1}^{z_2} h(z)\,\mathrm{d}z.$$

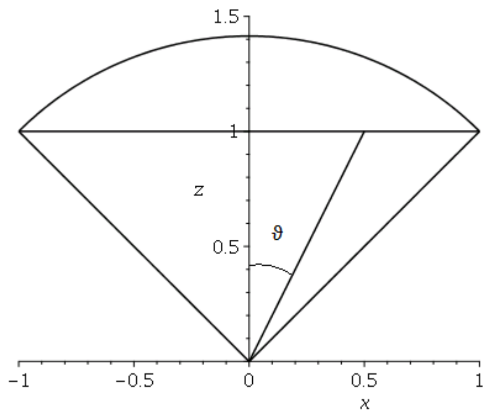
Takéto pravidlo funguje pre ľubovoľný počet dimenzií. V našom prípade sa dostaneme k súčinu nasledujúcich troch integrálov:

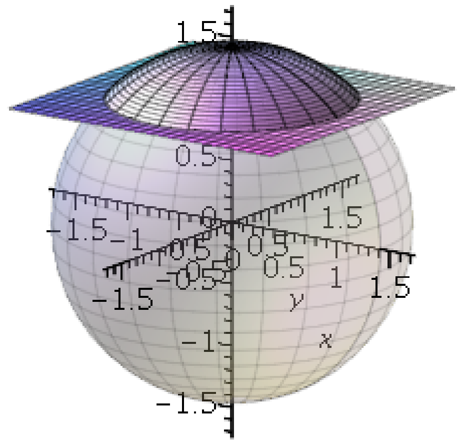
$$= \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\cdot\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \quad \left|\begin{array}{c} t=\sin\vartheta \\ \mathrm{d}t=\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\ \frac{3}{4}\pi \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \pi \rightsquigarrow 0 \end{array}\right|$$
$$= \underbrace{[-\cos\varphi]_0^{2\pi}}_{=0}\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\cdot\left(-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2\,\mathrm{d}t\right) = 0$$

Všimnime si, že množina, cez ktorú sme integrovali bola symetrická vzhľadom k rovine zx a že integrovaná funkcia $f(x,y,z)$ bola nepárna v premennej y, teda spĺňala rovnosť $f(x,-y,z) = -f(x,y,z)$. To znamená, že počítaný integrál musel byť nulový. Evidentne občasné zamyslenie môže ušetriť kopec roboty. ✈

Príklad 13. Vypočítajte objem guľového odseku M, ktorý odrezáva rovina $z = 1$ z gule $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$.

V prvom rade vypočítame prienik guľovej plochy $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ s rovinou $z = 1$. Tým je kružnica $x^2 + y^2 = 1$ vo výške $z = 1$, ktorej polomer je 1. Vďaka tomu vieme, že body uvažovaného odseku spĺňajú nerovnosti $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ a $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$. Stačí vyšetriť súradnicu r. Keďže sa jedná o guľový odsek, je zrejme zhora ohraničená polomerom gule, teda $\sqrt{2}$. Dolné ohraničenie závisí od odklonu od osi z, teda od súradnice ϑ, o čom sa ľahko presvedčíme použitím akéhokoľvek rezu rovinou, v ktorej leží os z. Pre daný uhol ϑ je dolné ohraničenie súradnice r preponou v pravouhlom trojuholníku, v ktorom má priľahlá odvesna k uhlu ϑ dĺžku 1. Z vlastností goniometrických funkcií dostávame nerovnosť $\frac{1}{\cos\vartheta} \leq r$. Môžeme integrovať:





$$\iiint\limits_M 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\left\{(r,\varphi,\vartheta) \middle| \substack{0\leq\varphi\leq 2\pi, \\ 0\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{\cos\vartheta}\leq r\leq\sqrt{2}}\right\}} \left|-r^2\sin\vartheta\right| \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{1}{\cos\vartheta}}^{\sqrt{2}} r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\left[\frac{r^3}{3}\right]_{\frac{1}{\cos\vartheta}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\cos^3\vartheta}\right)\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\vartheta\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\cos^3\vartheta}\right)\mathrm{d}\vartheta$$

$$= 2\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\vartheta}{\cos^3\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta\right) \left|\begin{array}{c} t = \cos\vartheta \\ \mathrm{d}t = -\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\ 0 \rightsquigarrow 1 \\ \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right|$$

$$= 2\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) + \frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{2t^2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) + \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2}-5).$$

Tento príklad bol vyriešený v Matematika drsne a svižne na strane 467 iným spôsobom. ✈

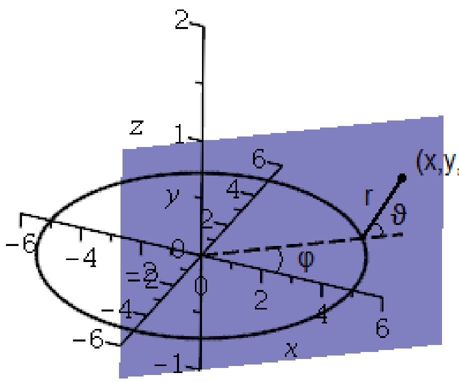
Príklad 14. Vypočítajte moment zotrvačnosti plného torusu M jednotkovej hustoty pri rotácii okolo jeho osi.

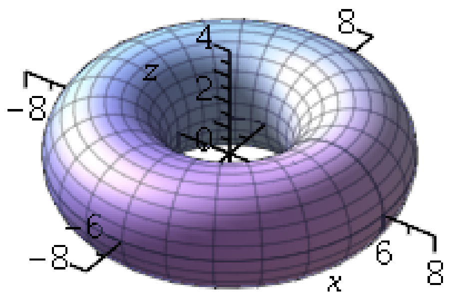
V prvom rade vhodne umiestnime torus do priestoru. Predpokladajme, že vznikol rotáciou kruhu ležiaceho v rovine xz so stredom v bode $[a, 0, 0]$ a polomerom b, kde $b < a$, okolo osi z. V takom prípade je os z jeho osou, a preto je moment zotrvačnosti daný nasledujúcim integrálom:

$$\iiint_M x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Nie je ťažké sa presvedčiť o tom, že aj vo valcových aj v sférických súradniciach má torus tvar, ktorý nám po transformácii integrálu umožní použiť Fubiniho vetu. V obidvoch prípadoch však v integrandoch vzniknú nepríjemné odmocniny. Skúsme preto použiť iný, vhodnejší súradnicový systém. Nové súradnice označíme symbolmi φ, r a ϑ. Význam symbolu φ je rovnaký ako v prípade valcových a sférických súradníc, teda je to odchýlka projekcie spojnice bodu (x_0, y_0, z_0) s počiatkom do roviny xy s kladnou časťou osi x proti smeru hodinových ručičiek. Uvažujme polrovinu P určenú bodom (x_0, y_0, z_0) a osou z. Táto polrovina pretína kružnicu $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$ v práve jednom bode, povedzme p. Symboly r a ϑ reprezentujú polárne súradnice v polrovine P so stredom v bode p. Táto geometrická predstava nám umožní odvodiť vzťah medzi starými kartézskymi súradnicami (x, y, z) a novými súradnicami (φ, r, ϑ) a v konečnom dôsledku aj popísať torus M v týchto nových súradniciach:

$$\begin{aligned} x &= (a + r\cos\vartheta)\cos\varphi \\ y &= (a + r\cos\vartheta)\sin\varphi \qquad M = g(\{(\varphi, r, \vartheta) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le b,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi\}), \\ z &= r\sin\vartheta \end{aligned}$$





kde g označuje transformáciu do nových súradníc. Pred tým, než sa pustíme do integrovania, musíme ešte spočítať determinant jakobiánu použitej transformácie:

$$\det \begin{pmatrix} x_\varphi & x_r & x_\vartheta \\ y_\varphi & y_r & y_\vartheta \\ z_\varphi & z_r & z_\vartheta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -(a + r\cos\vartheta)\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi \\ (a + r\cos\vartheta)\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ 0 & \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$= -\sin\vartheta \begin{vmatrix} -(a + r\cos\vartheta)\sin\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi \\ (a + r\cos\vartheta)\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \end{vmatrix} + r\cos\vartheta \begin{vmatrix} -(a + r\cos\vartheta)\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \\ (a + r\cos\vartheta)\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= -\sin\vartheta \left(r(a + r\cos\vartheta)\sin\vartheta\sin^2\varphi + r(a + r\cos\vartheta)\sin\vartheta\cos^2\varphi\right)$$

$$+ r\cos\vartheta\left(-(a + r\cos\vartheta)\cos\vartheta\sin^2\varphi - (a + r\cos\vartheta)\cos\vartheta\cos^2\varphi\right)$$

$$= -r(a + r\cos\vartheta)\sin^2\vartheta - r(a + r\cos\vartheta)\cos^2\vartheta = -r(a + r\cos\vartheta).$$

Môžeme integrovať:

$$\iiint_M x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint_{[0,2\pi]\times[0,b]\times[0,2\pi]} (a + r\cos\vartheta)^2 \left|-r(a + r\cos\vartheta)\right| \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{b} \int_0^{2\pi} r(a + r\cos\vartheta)^3 \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{b} \int_0^{2\pi} a^3 r + 3a^2 r^2 \cos\vartheta + 3ar^3 \cos^2\vartheta + r^4 \cos^3\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{b} \left[a^3 r\vartheta + 3a^2 r^2 \sin\vartheta + 3ar^3 \left(\frac{\sin 2\vartheta}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) + r^4 \left(\sin\vartheta + \frac{\sin^3\vartheta}{3} \right) \right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{b} \left[a^3 r\vartheta + \frac{3ar^3\vartheta}{2} \right]_0^{2\pi} \mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{b} 2\pi a^3 r + 3\pi a r^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\pi a^3 r^2 + \frac{3\pi a r^4}{4} \right]_0^{b} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \pi a^3 b^2 + \frac{3\pi a b^4}{4} \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \left(\pi a^3 b^2 + \frac{3\pi a b^4}{4} \right) \\
&= 2\pi^2 b^2 a \left(a^2 + \frac{3b^2}{4} \right).
\end{aligned}
$$

✈

Literatúra

[1] PLCH, Roman, ŠARMANOVÁ, Petra a SOJKA, Petr. *Integrální počet funkcí více proměnných*, `https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/integral/publikace/Integraly_funkce_promenne_v2.pdf`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, `http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf`

[3] KALAS, Josef a KUBEN, Jaromír. *Integrální počet funkcí více proměnných*