MB152 Diferenciálny a integrálny počet, skupina 10, 6. cvičenie, 11.11.2020

Riemannov integrál

Nech $f(x)$ je ohraničená funkcia na intervale $[a, b]$. Číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazývame určitým alebo tiež Riemannovým integrálom funkcie f na intervale $[a, b]$. Reprezentuje orientovaný obsah plochy ohraničenej grafom funkcie $f(x)$ a osou x. Symbolom $\mathcal{R}[a, b]$ označujeme množinu integrovateľných funkcií na intervale $[a, b]$, teda takých, ktorých Riemannov integrál existuje.

Veta 1. *Ak $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ a $c \in \mathbb{R}$, potom platí*

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

$$\text{ak } a \le c \le b, \text{ potom } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{4}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Veta 2 (Newtonov-Leibnizov vzorec)**.** *Nech $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a nech F je ľubovoľná primitívna funkcia k funkcii f na intervale (a, b) a nech je spojitá na intervale $[a, b]$. Potom platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{6}$$

Veta 3 (Metóda per-partes pre určitý integrál)**.** *Nech majú funkcie u a v deriváciu na intervale $[a, b]$ a nech $u', v' \in \mathcal{R}[a, b]$. Potom platí*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7}$$

kde $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Veta 4 (Substitučná metóda pre určitý integrál)**.** *Nech je funkcia $f(t)$ spojitá na intervale $[c, d]$ a nech má funkcia $\varphi(x)$ integrovateľnú deriváciu na intervale $[a, b]$, pričom platí $\varphi([a, b]) \subseteq [c, d]$. Potom platí*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Pri substitučnej metóde nielenže transformujeme integrand pomocou transformácie $t = \varphi(x)$, ale aj integračné medze. Pri výpočte určitého integrálu máme na výber z dvoch možných postupov. Buď použijeme pravidlo per-partes a substitučnú metódu prispôsobené pre určité integrály, alebo najprv nájdeme nejakú primitívnu funkciu k f a potom použijeme Newtonov-Leibnizov vzorec.

Príklad 5. Vypočítajte

$$\int_1^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arccotg} x \,\mathrm{d}x.$$

Začneme pravidlom per-partes pre určité integrály (7) a počítanie dokončíme Newtonovým-Leibnizovým vzorcom (6):

$$\int_1^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arccotg} x \,\mathrm{d}x \left| \begin{matrix} u' = x^2 & u = \dfrac{x^3}{3} \\ v = \operatorname{arccotg} x & v' = -\dfrac{1}{1+x^2} \end{matrix} \right| \overset{(7)}{=} \left[\frac{x^3}{3} \operatorname{arccotg} x\right]_1^{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{3} \operatorname{arccotg} \sqrt{3} - \frac{1}{3}\operatorname{arccotg} 1 + \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x(x^2+1)-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{(6)}{=} \frac{(2\sqrt{3}-1)\pi}{12} + \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\left[\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(2\sqrt{3}-1)\pi}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{\log 4}{6} + \frac{\log 2}{6} = \frac{(2\sqrt{3}-1)\pi}{12} + \frac{1}{3} - \frac{\log 2}{6}.$$

✈

Príklad 6. Vypočítajte

$$\int_1^3 \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Najprv použijeme substitučnú metódu (8) a metódu per-partes (7) pre určité integrály:

$$\int_1^3 \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \left| \begin{matrix} t = \sqrt{x} & \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x & \begin{matrix} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 3 \Rightarrow t = \sqrt{3} \end{matrix} \\ 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x & \end{matrix} \right|$$

$$\overset{(8)}{=} \int_1^{\sqrt{3}} 2t \arctan t\,\mathrm{d}t \left| \begin{matrix} u' = 2t & u = t^2 \\ v = \arctan t & v' = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right|$$

$$\overset{(7)}{=} [t^2 \arctan t]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 3\arctan\sqrt{3} - \arctan 1 - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{(2)}{=} 3\arctan\sqrt{3} - \arctan 1 - \int_1^{\sqrt{3}} 1\,\mathrm{d}t + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{(6)}{=} 3\arctan\sqrt{3} - \arctan 1 - [t]_1^{\sqrt{3}} + [\arctan t]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= 3\arctan\sqrt{3} - \arctan 1 - \sqrt{3} + 1 + \arctan\sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} + 1.$$

Na druhej srane sme mohli najprv, podobne ako v príklade 11 z predošlého cvičenia, nájsť primitívnu funkciu $F(x) = x\arctan\sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}$ a uvedený integrál vypočítať použitím Newtonovej-Leibnizovej formule:

$$\int_1^3 \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^3 = F(3) - F(1)$$

$$= 3\arctan\sqrt{3} + \arctan\sqrt{3} - \sqrt{3} - \arctan 1 - \arctan 1 + 1 = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} + 1.$$

✈

Aplikácie

Veta 7 (Obsah plochy medzi grafmi)**.** *Nech $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ a nech $f(x) \geq g(x)$, pre $x \in [a,b]$. Potom obsah plochy ohraničenej grafmi funkcií f a g sa rovná hodnote*

$$S = \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Veta 8 (Dĺžka rovinnej krivky)**.** *Nech C je krivka v rovine $\mathbb{R}^2$ určená parametricky funkciami $[x(t), y(t)]$, kde $t \in [\alpha, \beta]$. Ak majú funkcie $x(t)$ a $y(t)$ na intervale $[\alpha, \beta]$ spojitú deriváciu, potom má krivka C dĺžku*

$$D = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Vzhľadom k tomu, že $[x, f(x)]$, kde $x \in [a,b]$, je parametrizácia grafu funkcie f na intervale $[a,b]$, platí

Dôsledok 9 (Dĺžka grafu funkcie)**.** *Ak má funkcia f spojitú deriváciu na intervale $[a,b]$, potom má jej graf na tomto intervale dĺžku*

$$D = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Veta 10 (Objem rotačného telesa)**.** *Nech f je funkcia spojitá a nezáporná na intervale $[a,b]$. Objem telesa vzniknutého rotáciou plochy ohraničenej grafom funkcie f a osou x na intervale $[a,b]$ okolo osi x je*

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

Veta 11 (Obsah plášťa rotačného telesa)**.** *Nech f je nezáporná funkcia na intervale $[a,b]$ majúca spojitú deriváciu na intervale $[a,b]$. Obsah plášťa telesa vzniknutého rotáciou plochy ohraničenej grafom funkcie f a osou x na intervale $[a,b]$ okolo osi x je*

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

Príklad 12. Určte obsah plochy ohraničenej grafmi funkcií $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ a $g(x) = x^2$.

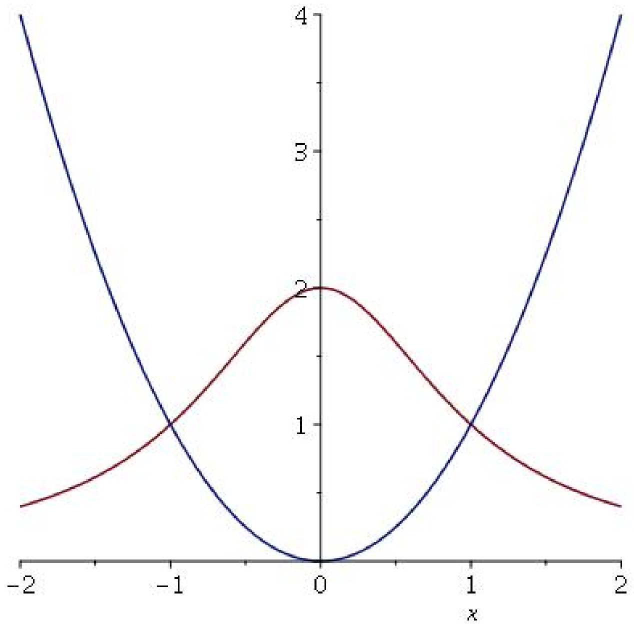
Najprv nájdeme priesešníky grafov funkcií f a g:

$$\frac{2}{1+x^2} = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^4 + x^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2+2)(x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Keďže na intervale $[-1,1]$ platí $g(x) < f(x)$, obsah plochy ohraničenej grafmi funkcií f a g sa podľa (9) rovná hodnote

$$\int_{-1}^1 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{2}{1+x^2} - x^2\,\mathrm{d}x \overset{(2)}{=} 2\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{(6)}{=} 2[\arctan x]_{-1}^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \pi - \frac{2}{3}.$$

✈



Obr. 1: Príklad 12

Príklad 13. Vypočítajte dĺžku Archimedovej špirály, ktorej parametrické vyjadrenie je

$$x(t) = bt\cos(t), \qquad y(t) = bt\sin(t),$$

kde $t \in [0, d]$.

Platí $x'(t) = b\cos(t) - bt\sin(t)$ a $y'(t) = b\sin(t) + bt\cos(t)$, čo môžeme dosadiť do vzorca (10) a vypočítať dĺžku D Archimedovej špirály:

$$\begin{aligned} D &= \int_0^d \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \int_0^d \sqrt{(b\cos(t) - bt\sin(t))^2 + (b\sin(t) + bt\cos(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= b\int_0^d \sqrt{(\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ &= b\int_0^d \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= b\int_0^d \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Bokom vypočítame primitívnu funkciu k funkcii $\sqrt{1+t^2}$ na intervale $[0, d]$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t \left| \begin{array}{c} t = \tan s \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 s}\,\mathrm{d}s \end{array} \right| &= \int \sqrt{1+\tan^2 s}\frac{1}{\cos^2 s}\,\mathrm{d}s = \int \sqrt{\frac{\cos^2 s}{\cos^2 s} + \frac{\sin^2 s}{\cos^2 s}}\frac{1}{\cos^2 s}\,\mathrm{d}s \\ &= \int \frac{1}{\cos^3 s}\,\mathrm{d}s = \int \frac{\cos s}{(1-\sin^2 s)^2}\,\mathrm{d}s \left| \begin{array}{c} u = \sin s \\ \mathrm{d}u = \cos s\,\mathrm{d}s \end{array} \right| = \int \frac{1}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Ďalej uskutočníme rozklad na parciálne zlomky:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-u^2)^2} &= \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{(1-u)^2}, \\ 1 &= A(1+u)(1-u)^2 + B(1-u)^2 + C(1-u)(1+u)^2 + D(1+u)^2. \end{aligned}$$

Ak za u dosadíme -1, dostaneme $B = \frac{1}{4}$ a naopak, ak dosadíme 1, dostaneme $D = \frac{1}{4}$. Dosaďme za B a D vypočítané hodnoty a rovnicu upravme:

$$\begin{aligned}
4 - (1-u)^2 - (1+u)^2 &= 4A(1+u)(1-u)^2 + 4C(1-u)(1+u)^2,\\
2(1-u^2) &= 4A(1+u)(1-u)^2 + 4C(1-u)(1+u)^2,\\
1 &= 2A(1-u) + 2C(1+u).
\end{aligned}$$

Opätovným dosadením hodnôt -1 a 1 za u dostaneme $A = \frac{1}{4}$ a $C = \frac{1}{4}$. Vráťme sa k integrovaniu:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{4}\left(\log(1+u) - \frac{1}{1+u} - \log(1-u) + \frac{1}{1-u}\right) + c\\
&= \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) + \frac{2u}{1-u^2}\right) + c = \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{1+\sin s}{1-\sin s}\right) + \frac{2\sin s}{\cos^2 s}\right) + c\\
&= \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{1+\sin(\arctan t)}{1-\sin(\arctan t)}\right) + \frac{2\sin(\arctan t)}{\cos^2(\arctan t)}\right) + c.
\end{aligned}$$

Ďalej použijeme identity $\sin(\arctan t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ a $\cos(\arctan t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, ktoré sme odvodili na minulých cvičeniach:

$$\frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{1+\sin(\arctan t)}{1-\sin(\arctan t)}\right) + \frac{2\sin(\arctan t)}{\cos^2(\arctan t)}\right) = \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\right) + \frac{2\tan(\arctan t)}{\cos(\arctan t)}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t}\right) + 2t\sqrt{1+t^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}+t}\right) + 2t\sqrt{1+t^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\log\left((\sqrt{1+t^2}+t)^2\right) + 2t\sqrt{1+t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\log\left(\sqrt{1+t^2}+t\right) + t\sqrt{1+t^2}\right)$$

Konečne dostávame

$$\begin{aligned}
D = b\int_0^d \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{b}{2}\left[\log\left(\sqrt{1+t^2}+t\right) + t\sqrt{1+t^2}\right]_0^d\\
&= \frac{b}{2}\left(\log\left(\sqrt{1+d^2}+d\right) + d\sqrt{1+d^2}\right).
\end{aligned}$$

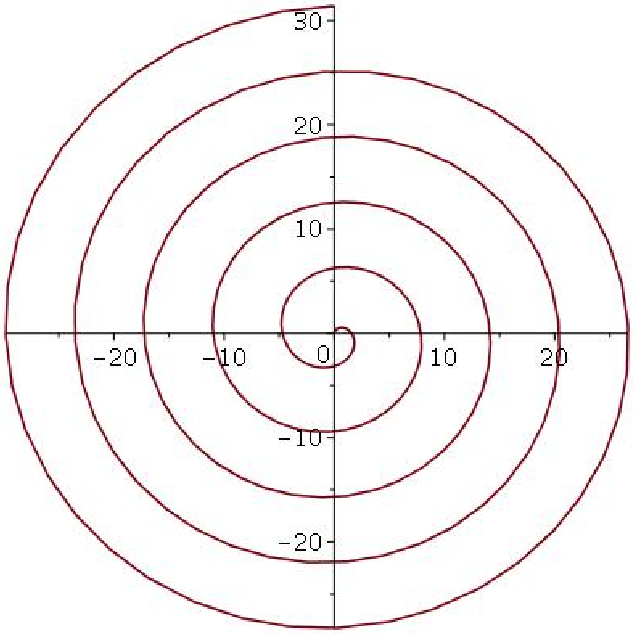
Parametre špirály majúcej 5 závitov, ktorých vzdialenosť od seba je približne 2π, sú $b = 1$ a $d = 10\pi$, a preto jej dĺžka je

$$D = \frac{1}{2}\left(\log\left(\sqrt{1+(10\pi)^2}+10\pi\right) + 10\pi\sqrt{1+(10\pi)^2}\right) \approx 495{,}8$$

Približný tvar Archimedovej špirály majú okrem iného napríklad hodinové pružiny alebo súčiastky špirálového kompresora. ✈

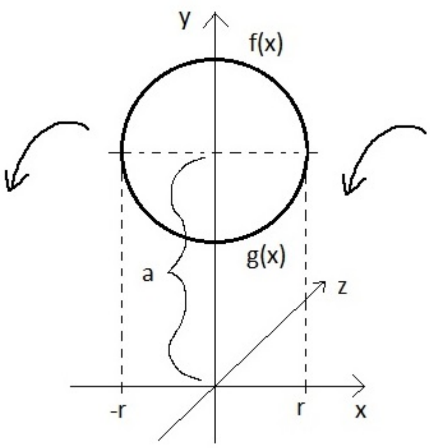
Príklad 14. Vypočítajte objem duše pneumatiky, ktorej prierez má polomer r, pričom polomer duše je $a+r$. Formálne sa jedná o rotačné teleso vzniknuté rotáciou kruhu ležiaceho v rovine xy s polomerom r okolo osi x, ktorého stred má vzdialenosť $a > r$ od osi x. Toto teleso sa nazýva anuloid.

Pre jednoduchosť umiestnime stred kruhu na os y. V takom prípade má rovnica kružnice, ktorá tvorí jeho obvod, tvar $x^2 + (y-a)^2 = r^2$. Počítajme:



Obr. 2: Príklad 13

$$
\begin{aligned}
x^2 + (y-a)^2 &= r^2 \\
(y-a)^2 &= r^2 - x^2 \\
y - a &= \pm\sqrt{r^2 - x^2} \\
y &= a \pm \sqrt{r^2 - x^2}.
\end{aligned}
$$



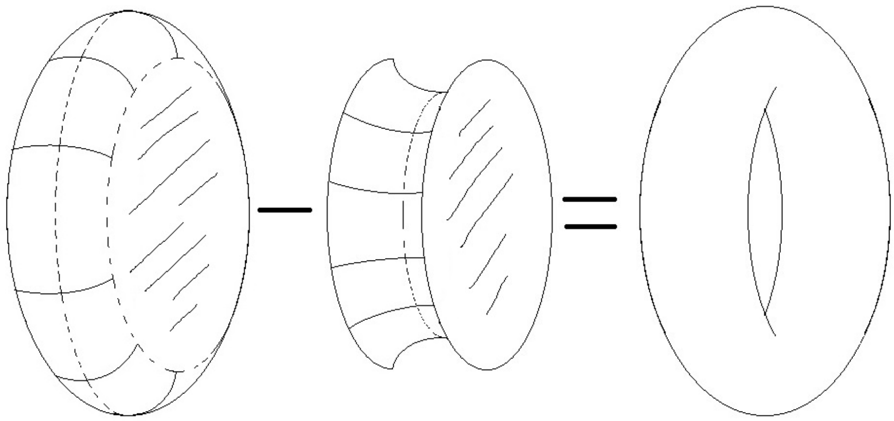
Vrchná polkružnica je teda grafom funkcie $f(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ a spodná polkružnica je zase grafom funkcie $g(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2}$. Objem anuloidu dostaneme ako rozdiel objemu telesa vzniknutého rotáciou podgrafu funkcie f a objemu telesa vzniknutého rotáciou podgrafu funkcie g. S použitím vzorca (12) dostávame

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-r}^{r} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_{-r}^{r} (g(x))^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_{-r}^{r} 4a\sqrt{r^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = 4\pi a r \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \, \mathrm{d}x \; \left| \begin{array}{c} x = rt \\ \mathrm{d}x = r\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = 4\pi a r^2 \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - t^2} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Primitívna funkcia k funkcii $\sqrt{1 - t^2}$ už je spočítaná v materiáloch k prednáškam [2] na strane 69. Dostávame

$$
\begin{aligned}
V = 4\pi a r^2 \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - t^2} \, \mathrm{d}t = 4\pi a r^2 \left[\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \right]_{-r}^{r} &= 2\pi a r^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= 2\pi^2 r^2 a.
\end{aligned}
$$

✈



Obr. 3: Príklad 14

Príklad 15. Vypočítajte obsah plášťa anuloidu z predošlého príkladu.

Plášť anuloidu môžeme rozdeliť na dve časti. Jedna časť vznikne rotáciou grafu funkcie $f(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ a tá druhá zase rotáciou grafu funkcie $g(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2}$. Pre obsah plášťa anuloidu preto podľa (13) platí:

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x + 2\pi \int_{-r}^{r} g(x)\sqrt{1 + (g'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

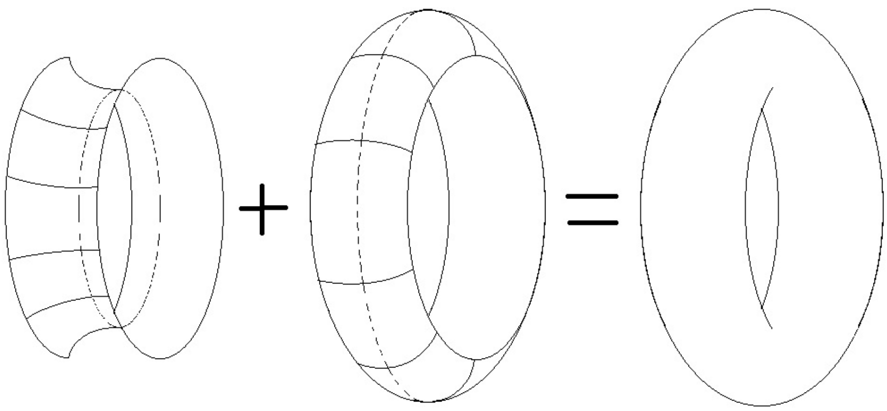
Potrebujeme derivácie funkcií f a g:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \tag{14}$$

Dosaďme a počítajme:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-r}^{r} (a + \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} + (a - \sqrt{r^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_{-r}^{r} 2a\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\pi a \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\pi a \int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,\mathrm{d}x \left|\ \begin{array}{c} x = rt \\ \mathrm{d}x = r\,\mathrm{d}t \end{array}\ \right| \\ &= 4\pi ar \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t = 4\pi ar[\arcsin t]_{-1}^{1} = 4\pi ar\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi^2 ar. \end{aligned}$$

✈



Obr. 4: Príklad 15

Definícia 16 (Nevlastný integrál 1. druhu)**.** Nech f je funkcia definovaná na intervale $[a,\infty)$ a integrovateľná na každom intervale $[a,b]$, kde $b \geq a$. Definujme funkciu $F\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ predpisom $F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ak existuje limita $\lim_{b\to\infty} F(b)$, definujeme nevlastný integrál $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ vzťahom

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} F(b). \tag{15}$$

Ak je táto limita vlastná, povieme, že integrál konverguje, ak je nevlastná, povieme, že diverguje. Rovnako pristupujeme k intervalu $(-\infty,a]$. Ak je funkcia f definovaná na $\mathbb{R}$ a integrovateľná na každom ohraničenom intervale $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ povieme, že integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, ak pre nejaké $a \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ pre každé $a \in \mathbb{R}$) integrály $\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergujú. V takom prípade definujeme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

Definícia 17 (Nevlastný integrál 2. druhu)**.** Nech f je funkcia definovaná na intervale $[a,b)$. Predpokladajme, že je ohraničená a integrovateľná na každom intervale $[a,x]$, kde $a \leq x < b$, a nie je ohraničená na žiadnom intervale $(b-\varepsilon,b)$, kde $0 < \varepsilon < b-a$. Definujme funkciu $F\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ predpisom $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Ak existuje jednostranná limita $\lim_{x\to b^-} F(x)$, definujeme nevlastný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ vzťahom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x). \tag{17}$$

Ak je táto limita vlastná, povieme, že integrál konverguje, ak je nevlastná, povieme, že diverguje. Rovnako pristupujeme k intervalu $(b,a]$.

Všetky pravidlá pre počítanie určitých integrálov platia aj pre nevlastné integrály. Jediný rozdiel je v tom, že občas namiesto funkčných hodnôt sme nútení počítať limitu.

Príklad 18. Vypočítajte nevlastný integrál

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x \left|\begin{array}{c} t = \frac{x+1}{2} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x \\ \infty \rightsquigarrow \infty \\ -\infty \rightsquigarrow -\infty \end{array}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[\arctan t]_{-\infty}^\infty = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to\infty}\arctan t - \lim_{t\to-\infty}\arctan t\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

✈

Príklad 19. Vypočítajte nevlastný integrál

$$\int_{-\infty}^0 \sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}}\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-\infty}^{0}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\sqrt{\frac{(\mathrm{e}^x)^2}{(\mathrm{e}^x)^2+1}}\,\mathrm{d}x\;\left|\begin{array}{c} t=\mathrm{e}^x\\ \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\Rightarrow\ \mathrm{d}x=\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\ 0\rightsquigarrow 1\\ -\infty\rightsquigarrow 0\end{array}\right|=\int_0^1\sqrt{\frac{t^2}{t^2+1}}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t\;\left|\begin{array}{c} t=\tan s\Rightarrow s=\arctan t\\ \mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2 s}\,\mathrm{d}s\\ 1\rightsquigarrow\frac{\pi}{4}\\ 0\rightsquigarrow 0\end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 s}}\cdot\frac{1}{\cos^2 s}\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos s}\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos s}{1-\sin^2 s}\,\mathrm{d}s\;\left|\begin{array}{c} u=\sin s\\ \mathrm{d}u=\cos s\,\mathrm{d}s\\ \frac{\pi}{4}\rightsquigarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\rightsquigarrow 0\end{array}\right|=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1+u}-\frac{-1}{1-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}[\log(1+u)-\log(1-u)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)=\frac{\log(3+2\sqrt{2})}{2}.$$

✈

Príklad 20. Rozhodnite o konvergencii uvedeného integrálu vzhľadom na parametre $a,b\in\mathbb{R}$:

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x.$$

Najprv vyriešime prípad $a=0$:

$$\int_0^{\infty}\cos(bx)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}1\,\mathrm{d}x=[x]_0^{\infty}=\lim_{x\to\infty}x=\infty, & \text{pre } b=0 \text{ integrál diverguje,}\\ \displaystyle\left[\frac{\sin(bx)}{b}\right]_0^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(bx)}{b}, & \text{pre } b\neq 0 \text{ integrál neexistuje.}\end{cases}$$

Teraz pre $a\neq 0$ nájdeme primitívnu funciu k funkcii $\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$:

$$\int\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x\;\left|\begin{array}{ll} u'=\mathrm{e}^{ax} & u=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}\\ v=\cos(bx) & v'=-b\sin(bx)\end{array}\right|$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)}{a}+\frac{b}{a}\int\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x\;\left|\begin{array}{ll} u'=\mathrm{e}^{ax} & u=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}\\ v=\sin(bx) & v'=b\cos(bx)\end{array}\right|$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)}{a}+\frac{b\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\int\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x.$$

Z uvedenej rovnice vyjadríme hľadaný integrál:

$$\int\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x=\frac{a\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)+b\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)}{a^2+b^2}+c=\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx))}{a^2+b^2}+c.$$

Preto platí

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx))}{a^2+b^2}\right]_0^{\infty}$$

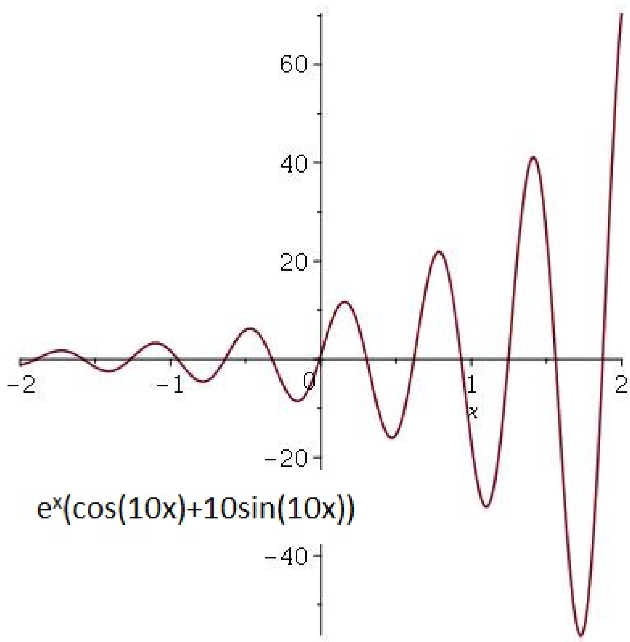
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx))}{a^2+b^2}\right)-\frac{a}{a^2+b^2}=\frac{\lim_{x\to\infty}(e^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx)))-a}{a^2+b^2}$$

Limitu vyšetríme v závislosti od hodnôt parametra a. Pre $a<0$ platí

$$\lim_{x\to\infty}(\underbrace{e^{ax}}_{\to 0}\cdot\underbrace{(a\cos(bx)+b\sin(bx))}_{\text{ohraničená}})=0 \quad\Rightarrow\quad \text{integrál } \int_0^{\infty} e^{ax}\cos(bx)\,dx \text{ konverguje.}$$

Nech $a>0$. Pre $b=0$ zrejme platí $\lim_{x\to\infty}(e^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx)))=\infty$, čo znamená, že integrál diverguje. Ďalej nech je $b\neq 0$ a uvažujme postupnosti $\{x_n=\frac{n2\pi}{b}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n=\frac{\pi+n2\pi}{b}\}_{n=1}^{\infty}$ a označme $F(x)=e^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx))$. Zrejme platí $F(x_n)=ae^{ax}\to\infty$ a $F(y_n)=-ae^{ax}\to-\infty$, pre $x\to\infty$, čo znamená, že limita $\lim_{x\to\infty}(e^{ax}(a\cos(bx)+b\sin(bx)))$ nemôže existovať.

Zistili sme, že integrál konverguje pre $a<0$ bez ohľadu na parameter b. ✈



Obr. 5: Príklad 20

Príklad 21. Vypočítajte nevlastný integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx.$$

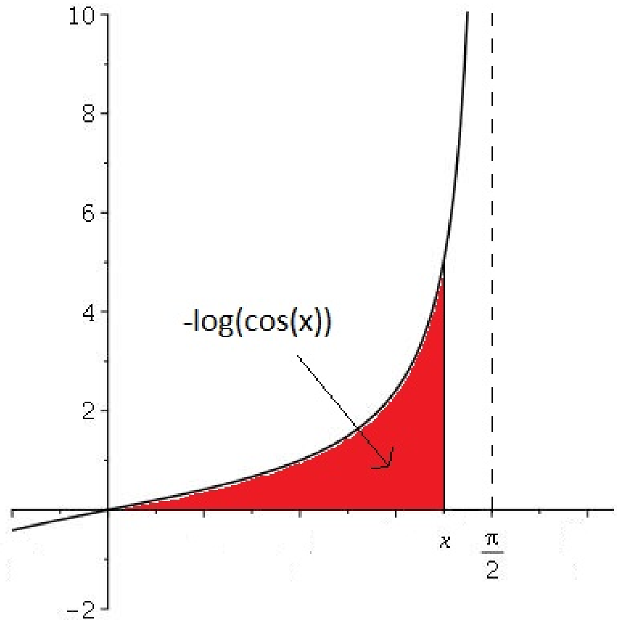
Pre ľubovoľné $0\le x<\frac{\pi}{2}$ platí

$$\int_0^x \tan t\,dt=\int_0^x\frac{\sin t}{\cos t}\,dt=-\int_0^x\frac{-\sin t}{\cos t}\,dt=[-\log(\cos t)]_0^x=-\log(\cos x),$$

a preto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan t\,dt=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(-\log(\cos x))=\lim_{x\to 0^+}-\log x=\infty,$$

čo znamená, že integrál diverguje. ✈



Obr. 6: Príklad 21

Príklad 22. Vypočítajte nevlastný integrál

$$\int_0^1 \log x \, \mathrm{d}x.$$

Pre ľubovoľné $0 < x \leq 1$ platí

$$\int_x^1 \log t \, \mathrm{d}t \left| \begin{matrix} u' = 1 & u = t \\ v = \log t & v' = \dfrac{1}{t} \end{matrix} \right| = [t \log t]_x^1 - \int_x^1 1 \, \mathrm{d}t = -x \log x - [t]_x^1 = -x \log x - 1 + x,$$

a preto

$$\int_0^1 \log t \, \mathrm{d}t = \lim_{x \to 0^+} (-x \log x - 1 + x) = -1 + \lim_{x \to 0^+} (-x \log x) = -1 + \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{-\log x}{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\xrightarrow[\left|\frac{\infty}{\infty}\right|]{\text{l'Hosp.}} -1 + \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -1 + \lim_{x \to 0^+} x = -1 + 0 = -1,$$

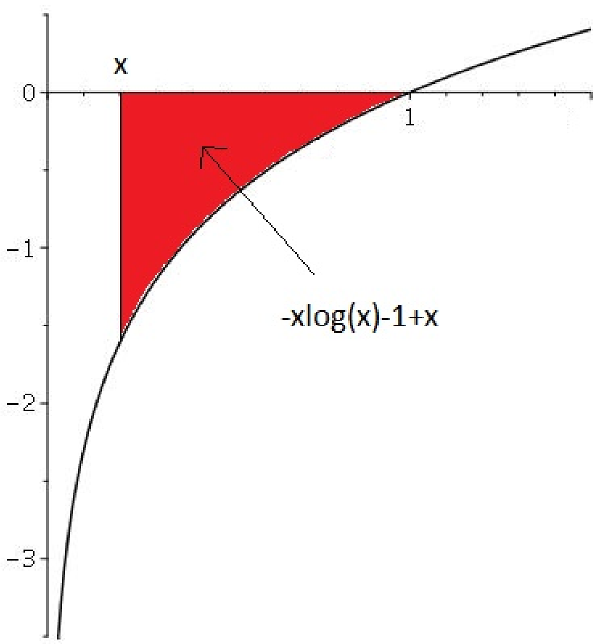
čo znamená, že integrál konverguje. ✈

Príklad 23. Rozhodnite o konvergencii uvedeného integrálu vzhľadom na parametre $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b \, \mathrm{d}x.$$

Použite fakt odvodený v [1] na strane 484, že integrál $\int_0^1 x^a \, \mathrm{d}x$, konverguje pre $a > -1$ a diverguje pre $a \leq -1$.

Vzhľadom k tomu, že pre niektoré hodnoty parametrov môže mať integrand singularitu v obidvoch koncových bodoch intervalu $[0, 1]$, rozdelíme ho na dva intervaly $[0, c]$ a $[c, 1]$, kde $0 < c < 1$ je ľubovoľné, napríklad môžeme zvoliť $c = \frac{1}{2}$. Pred tým než začneme počítať zdôraznime, že pre ľubovoľné hodnoty parametrov a a b sú funkcie x^a a $(1-x)^b$ kladné na intervale $(0, 1)$. Výpočet rozdelíme na štyri rôzne situácie:



Obr. 7: Príklad 22

- $a > -1$, $b > -1$:

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b \,\mathrm{d}x = \int_0^c x^a \underbrace{(1-x)^b}_{\substack{\exists K,\,(1-x)^b \le K \\ \text{pre } x\in[0,c]}} \mathrm{d}x + \int_c^1 \underbrace{x^a}_{\substack{\exists L,\, x^a \le L \\ \text{pre } x\in[c,1]}}(1-x)^b \,\mathrm{d}x$$

$$\le K\int_0^c x^a \,\mathrm{d}x + L\int_c^1 (1-x)^b \,\mathrm{d}x \le K\int_0^1 x^a \,\mathrm{d}x + L\int_0^1 (1-x)^b \,\mathrm{d}x \;\left|\; \begin{array}{c} t = 1-x \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x \\ 1 \rightsquigarrow 0 \\ 0 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right|$$

$$= K\underbrace{\int_0^1 x^a \,\mathrm{d}x}_{\text{konverguje}} + L\underbrace{\int_0^1 t^b \,\mathrm{d}t}_{\text{konverguje}} \quad\Rightarrow\quad \int_0^1 x^a(1-x)^b \,\mathrm{d}x \quad \text{konverguje}$$

- $a \le -1$, $b > -1$:

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b \,\mathrm{d}x = \int_0^c x^a \underbrace{(1-x)^b}_{\substack{\exists K,\,(1-x)^b \ge K \\ \text{pre } x\in[0,c]}} \mathrm{d}x + \int_c^1 x^a(1-x)^b \,\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^c x^a(1-x)^b \,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 0^+}\int_y^c x^a(1-x)^b \,\mathrm{d}x \ge \lim_{y\to 0^+}\int_y^c x^a K \,\mathrm{d}x = K\lim_{y\to 0^+}\int_y^c x^a \,\mathrm{d}x$$

$$= K\underbrace{\int_0^c x^a \,\mathrm{d}x}_{\text{diverguje}} = \infty.$$

To znamená, že integrál $\int_0^1 x^a(1-x)^b \,\mathrm{d}x$ tiež diverguje.

- $a > -1$, $b \le -1$:

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b \,\mathrm{d}x = \int_0^c x^a(1-x)^b \,\mathrm{d}x + \int_c^1 \underbrace{x^a}_{\substack{\exists L,\, x^a \ge L \\ \text{pre } x\in[c,1]}}(1-x)^b \,\mathrm{d}x.$$

$$\int_c^1 x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x = \lim_{y\to 1^-}\int_c^y x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x \geq \lim_{y\to 1^-}\int_c^y L(1-x)^b\,\mathrm{d}x = L\lim_{y\to 1^-}\int_c^y (1-x)^b\,\mathrm{d}x$$

$$= L\int_c^1 (1-x)^b\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} t = 1-x \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x \\ 1 \rightsquigarrow 0 \\ c \rightsquigarrow 1-c \end{array}\right| = L\underbrace{\int_0^{1-c} t^b\,\mathrm{d}t}_{\text{diverguje}} = \infty.$$

To znamená, že integrál $\int_0^1 x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x$ tiež diverguje.

- $a \leq -1$, $b \leq -1$: Rovnako ako v predošlých dvoch prípadoch by sme ukázali, že integrály

$$\int_0^c x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x \qquad \text{a} \qquad \int_c^1 x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x$$

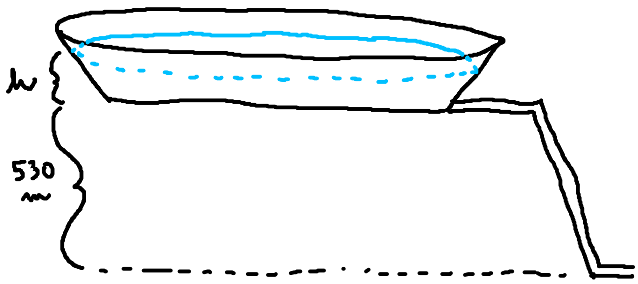
divergujú, a preto opäť diverguje aj ich súčet.

V konečnom dôsledku sme zistili, že pre $a > -1$ a $b > -1$ uvedený integrál konverguje a vo všetkých ostatných prípadoch diverguje. Integrál $B(a,b) = \int_0^1 x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x$ sa nazýva Beta funkcia a používa sa v štatistike. ✈

Aplikácie

Príklad 24. Vypočítajte približne prácu vykonanú pri napĺňaní hornej nádrže prečerpávacej vodnej elektrárne Dlouhé stráně.

Pri maximálnom naplnení hornej nádrže má plocha vodnej hladiny rozlohu 15,4 ha a hĺbka vody je 21,8 m. Pre zjednodušenie výpočtov budeme predpokladať, že plocha vodnej hladiny rastie lineárne s hĺbkou vody a že voda je do nádrže čerpaná z jedného konkrétneho miesta, ktorého nadmorská výška je o 530 m menšia ako nadmorská výška dna hornej nádrže.



Obr. 8: Príklad 24

Práca potrebná pre zdvihnutie telesa hmotnosti m do výšky h je $W = mgh$, kde $g \approx 10\,m/s^2$ je gravitačné zrýchlenie. Plocha rezu telesom vody vo výške h nad dnom nádrže je podľa predpokladov $S = \frac{15{,}4\cdot 10^4}{21{,}8}\cdot h\,[m^2]$. Do výšky $530+h$ je preto nutné zdvihnúť teleso s hmotnosťou

$$m = \rho S\,\mathrm{d}h = \rho\cdot\frac{15,4\cdot 10^4}{21,8}\cdot h\,\mathrm{d}h,$$

kde $\rho \approx 1000\,kg/m^3$ je hustota vody. Vzhľadom k tomu, že pre každé $0 \leq h \leq 21,8$ musíme do výšky $530+h$ zdvihnúť teleso s hmotnosťou $\rho S\,\mathrm{d}h$, je celková práca súčtom týchto dielčích prác:

$$W = \int_0^{21,8} \rho S g(530+h)\,\mathrm{d}h = \frac{15,4\cdot 10^4}{21,8}\rho g\int_0^{21,8}(530+h)h\,\mathrm{d}h$$

$$= \frac{15,4 \cdot 10^4}{21,8}\rho g \left[265h^2 + \frac{h^3}{3}\right]_0^{21,8} = \frac{15,4 \cdot 10^4}{3 \cdot 21,8}\rho g \left[795h^2 + h^3\right]_0^{21,8}$$
$$= 91405365,\overline{3} \cdot 10^5\, J \approx 91 \cdot 10^{11}\, J.$$ ✈

Príklad 25. Vypočítajte únikovú rýchlosť z povrchu Zeme a Mesiaca.

V predošlom príklade sme predpokladali, že gravitačná sila Zeme bola v ľubovoľnej výške nad povrchom rovnaká. V tomto prípade si podobné zjednodušenie už nemôžeme dovoliť. Pripomeňme, že hmotný bod s hmotnosťou m a teleso tvaru gule s hmotnosťou M a polomerom R na seba navzájom pôsobia silou, ktorej veľkosť je daná rovnosťou

$$F = \kappa \frac{mM}{(R+h)^2},$$

kde h je vzdialenosť hmotného bodu od povrchu telesa a $\kappa \approx 6,67 \cdot 10^{-11}\, m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$ je gravitačná konštanta. Na premiestnenie telesa z výšky h do výšky $h + \mathrm{d}h$ nad povrchom telesa je preto potrebná práca $W = F\,\mathrm{d}h$. Práca potrebná pre únik hmotného bodu z gravitačného poľa telesa je súčtom týchto dielčích prác:

$$W = \int_0^\infty F\,\mathrm{d}h = \int_0^\infty \kappa \frac{mM}{(R+h)^2}\,\mathrm{d}h = \kappa m M \left[-\frac{1}{R+h}\right]_0^\infty = \frac{\kappa m M}{R}.$$

Aby došlo k úniku, musí byť kinetická energia hmotného bodu pri povrchu telesa aspoň taká veľká ako práve spočítaná práca:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{\kappa m M}{R} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}}.$$

Keďže $M_{\oplus} = 5,97237 \cdot 10^{24}\, kg$, $R_{\oplus} = 6371\, km$, $M_{\leftmoon} = 7,349 \cdot 10^{22}\, kg$ a $R_{\leftmoon} = 1737,4\, km$, platí

$$v_{\oplus} \approx 11,183\, km \cdot s^{-1} \qquad \text{a} \qquad v_{\leftmoon} \approx 2,375\, km \cdot s^{-1}.$$ ✈

Literatúra

[1] HASIL, Petr a ZEMÁNEK, Petr. *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*, `https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/pdf/SPzMAI.pdf`

[2] HILSCHER, Roman Šimon, HASIL, Petr, VESELÝ, Michal a ZEMÁNEK, Petr. *Přednášky z matematické analýzy na FI*, `http://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MU/MB152/prednasky_MB152.pdf`

[3] DOŠLÝ, Ondřej a ZEMÁNEK, Petr. *Integrální počet v* $\mathbb{R}$

[4] KNÁPEK, Michal. *Posouzení výhodnosti výstavby přečerpávací vodní elektrárny velkého výkonu v lokalitě Cukrová bouda, okres Šumperk*, `https://core.ac.uk/download/pdf/30298379.pdf`