Optimalizace.

Lenka Přibylová

17. listopadu 2010

$\boxed{\text{Najděte minimum funkce } f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 1.}$

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) = 0 \quad 2x + y - 2 &= 0, \\ f'_y(x,y) = 0 \quad x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

$x = -2y$, tj. $2(-2y) + y - 2 = 0, \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}$ a $x = \frac{4}{3}$, řešením je bod $[x_0, y_0] = [\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$.
Determinant Hessovy matice druhých derivací v tomto bodě je

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

extrém v tomto bodě tedy skutečně nastane a protože je $f''_{xx}(x_0, y_0) = 2 > 0$, jde o lokální minimum.
Protože funkce nemá jiné stacionární body a její definiční obor je celá rovina, je to také globální minimum.
To je vidět také z toho, že grafem funkce je eliptický paraboloid (vrstevnice jsou elipsy, řezy paraboly).

$\boxed{\text{Najděte extrémy funkce } f(x,y) = e^{x^2-y^2}.}$

Najdeme stacionární body

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) = 0 \quad e^{x^2-y^2}2x &= 0, \\ f'_y(x,y) = 0 \quad e^{x^2-y^2}(-2y) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením je bod $[x_0, y_0] = [0, 0]$.
$f''_{xx} = e^{x^2-y^2}(4x^2) + e^{x^2-y^2}2$
$f''_{xy} = 2xe^{x^2-y^2}(-2y)$
$f''_{yy} = e^{x^2-y^2}(4y^2) + e^{x^2-y^2}(-2)$
Determinant Hessovy matice druhých derivací v tomto bodě je

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

extrém v tomto bodě nenastává, je zde sedlo. Funkce tedy nemá extrémy.