Průběh vlnění

Lenka Přibylová

24. března 2009

Obsah

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$;

Definiční obor je celá množina $\mathbb{R}$. Obor hodnot jsou kladná reálná čísla.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická

$f(-x) \neq \pm f(x)$

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$y \neq 0$ na celém definičním oboru.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

Funkce je kladná, nemá žádné body nespojitosti.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-2t)^2+1} = 0$$

Pro všechna t je limita typu $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-2t)^2+1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-2t)^2+1} = 0$$

Stejně to platí pro $x \to -\infty$.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-2t)^2+1} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-2t)^2+1} = 0$$

Asymptota se směrnicí je pro $x \to \pm\infty$ stejná: osa x: $y = 0$.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$+$

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\frac{+}{}$$

$$\psi' = \left(\frac{1}{(x-2t)^2+1}\right)'$$

Vyšetříme chování derivace.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\overset{+}{\overline{\qquad}}$$

$$\psi' = \left(\frac{1}{(x-2t)^2+1}\right)' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2}$$

Derivujeme jako složenou funkci $((x-2t)^2+1)^{-1}$.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\frac{+}{}$$

$$\psi' = \left(\frac{1}{(x-2t)^2+1}\right)' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2} = 0$$

Hledáme stacionární body, proto položíme derivaci rovnu nule.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \dots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$+$$

$$\psi' = \left(\frac{1}{(x-2t)^2+1}\right)' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2} = 0$$

$$x = 2t \quad (t = 1, 2, \dots)$$

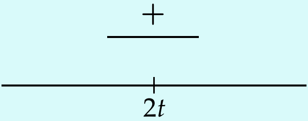
Stacionární bod závisí lineárně na t. S rostoucím t se zvyšuje jeho hodnota.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\psi' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2};$$



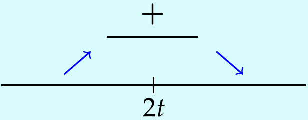
Na reálnou osu zaneseme stacionární bod. Nemáme žádné body nespojitosti.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \dots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\psi' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2};$$



Dosazením nějakého bodu z intervalu $(-\infty, 2t)$ a $(2t, \infty)$ nalezneme znaménko derivace:

$$\psi'(2t-1) = \frac{-2\cdot(-1)}{((-1)^2+1)^2} > 0$$

$$\psi'(2t+1) = \frac{-2\cdot 1}{(1^2+1)^2} < 0$$

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \dots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\psi' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2};$$

$$\begin{array}{c|c}
+ & - \\
\nearrow \quad \text{MAX} & \searrow \\
\hline
 & \hspace{-1em} 2t
\end{array}$$

Ve stacionárním bodě $x = 2t$ nastává lokální maximum.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\psi' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2};$$

	$+$	
$\nearrow$	MAX	$\searrow$
	$2t$	

$$\psi'' = \frac{8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1)}{((x-2t)^2+1)^3}$$

Spočteme druhou derivaci, derivujeme jako podíl: $\psi'' = \dfrac{-2((x-2t)^2+1)^2 + 2(x-2t)\cdot 2((x-2t)^2+1)\cdot 2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^4}$ a upravíme.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \dots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\psi' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2};$$

$$\begin{array}{ccc} & + & \\ \nearrow & \text{MAX} & \searrow \\ \hline & 2t & \end{array}$$

$$\psi'' = \frac{8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1)}{((x-2t)^2+1)^3} = 0$$

Položíme druhou derivaci nule.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\psi' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2};$$

$$\begin{array}{ccc} & + & \\ \nearrow & \text{MAX} & \searrow \\ \hline & 2t & \end{array}$$

$$\psi'' = \frac{8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1)}{((x-2t)^2+1)^3} = 0$$

$$8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1) = 0$$

Zlomek je roven nule, jestliže je jeho čitatel roven nule.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \dots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá

Vypočteme x:

$$\begin{aligned}
8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1) &= 0\\
6(x-2t)^2 - 2 &= 0\\
(x-2t)^2 &= \frac{1}{3}\\
x-2t &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\\
x &= 2t \pm \sqrt{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\psi' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2};$$

$$\begin{array}{ccc} & + & \\ \nearrow & \text{MAX} & \searrow \\ \hline & 2t & \end{array}$$

$$\psi'' = \frac{8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1)}{((x-2t)^2+1)^3};$$

$2t-\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\qquad$ $2t+\sqrt{\frac{1}{3}}$

Nakreslíme reálnou osu s kritickými body. Nemáme žádné body nespojitosti, proto se druhá derivace může měnit pouze v inflexních bodech.

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

$$\psi' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2};$$

$$\begin{array}{ccc} & + & \\ \nearrow & \text{MAX} & \searrow \\ \hline & 2t & \end{array}$$

$$\psi'' = \frac{8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1)}{((x-2t)^2+1)^3};$$

$$\begin{array}{ccccc} \cup & & \cap & & \cup \\ \hline & 2t-\sqrt{1} & & 2t+\sqrt{1} & \end{array}$$

Konvexitu zjistíme dosazením do ψ'':

$$\psi''(2t-1) = \frac{1}{2} > 0, \quad \psi''(2t) = -2 < 0, \quad \psi''(2t+1) = \frac{1}{2} > 0$$

Ukažte průběh vlnění, které je dáno funkcí $\psi(x,t) = \dfrac{1}{(x-2t)^2+1}$ pro $t = 1, 2, \ldots$

$D(f) = \mathbb{R}$; $H(f) = \mathbb{R}^+$; ani sudá ani lichá, není periodická a nemá průsečík s osou x.

$\psi(+\infty) = 0$, $\psi(-\infty) = 0$;

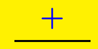
$$\psi' = \frac{-2(x-2t)}{((x-2t)^2+1)^2};$$

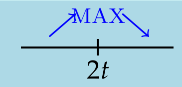
$$\begin{array}{ccc} \nearrow & \begin{array}{c} + \\ \hline \text{MAX} \end{array} & \searrow \\ \hline & 2t & \end{array}$$

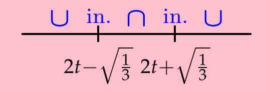
$$\psi'' = \frac{8(x-2t)^2 - 2((x-2t)^2+1)}{((x-2t)^2+1)^3};$$

$$\begin{array}{ccccc} \cup & \text{in.} & \cap & \text{in.} & \cup \\ \hline & 2t-\sqrt{\frac{1}{3}} & & 2t+\sqrt{\frac{1}{3}} & \end{array}$$

Body $x = 2t \pm \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ jsou inflexní.

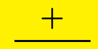


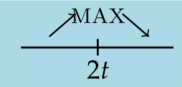


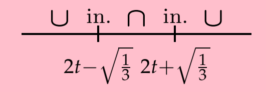


$f(+\infty) = 0$ $\quad$ $f(-\infty) = 0$ $\quad$ $f(2t) = 1$

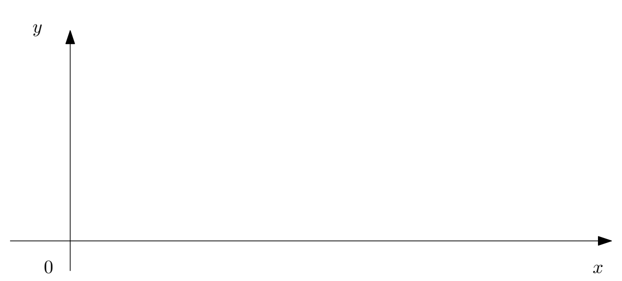
Shrneme dosažené výpočty.







$f(+\infty) = 0$ $\quad$ $f(-\infty) = 0$ $\quad$ $f(2t) = 1$



Nakreslíme souřadný systém.

$+$

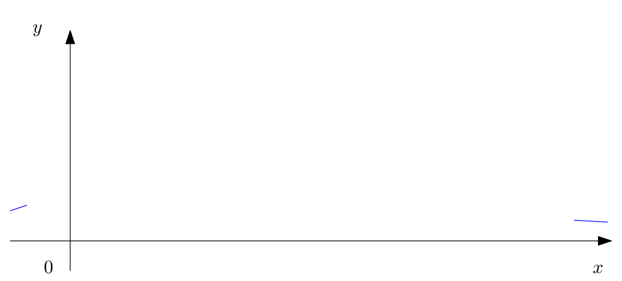
MAX

$2t$

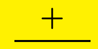
∪ in. ∩ in. ∪

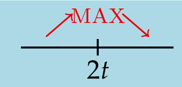
$2t-\sqrt{\frac{1}{3}}$ $2t+\sqrt{\frac{1}{3}}$

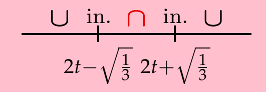
$f(+\infty) = 0$ $f(-\infty) = 0$ $f(2t) = 1$



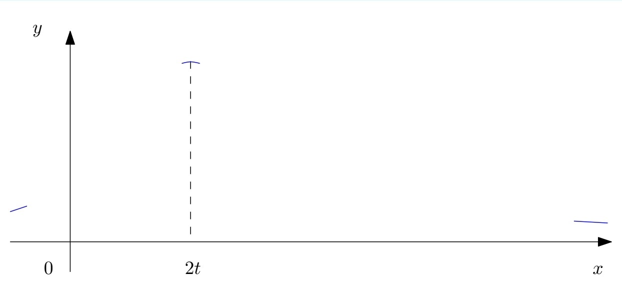
Nakreslíme značky v blízkosti nevlastních bodů. Funkce roste v okolí $-\infty$ a klesá v okolí $+\infty$. Je kladná.



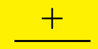


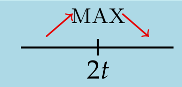


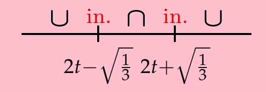
$f(+\infty) = 0$ $f(-\infty) = 0$ $f(2t) = 1$



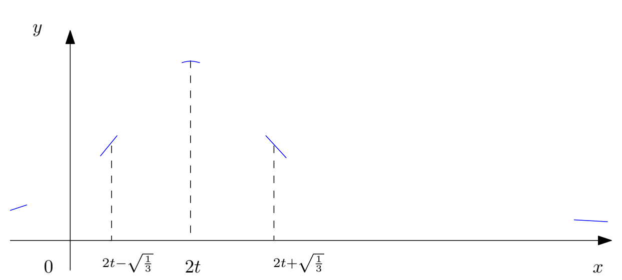
Nakreslíme lokální maximum.







$f(+\infty) = 0$ $f(-\infty) = 0$ $f(2t) = 1$



Nakreslíme inflexní body. Funkce v bodě $2t-\sqrt{\frac{1}{3}}$ roste a v bodě $2t+\sqrt{\frac{1}{3}}$ klesá.

$+$

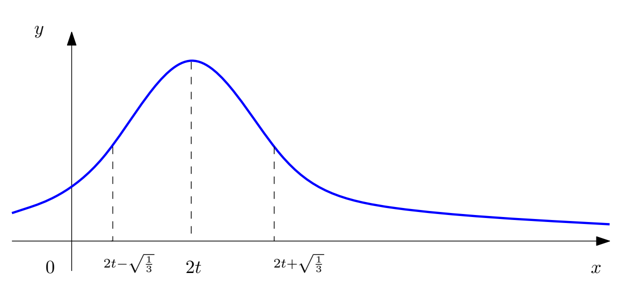
MAX

$2t$

$\cup$ in. $\cap$ in. $\cup$

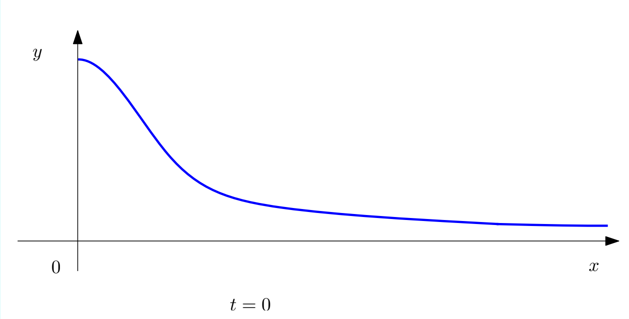
$2t-\sqrt{\frac{1}{3}}$ $2t+\sqrt{\frac{1}{3}}$

$f(+\infty) = 0$ $f(-\infty) = 0$ $f(2t) = 1$



Spojíme nakreslené části do grafu.

Vlna se šíří v čase následujícím způsobem:



KONEC