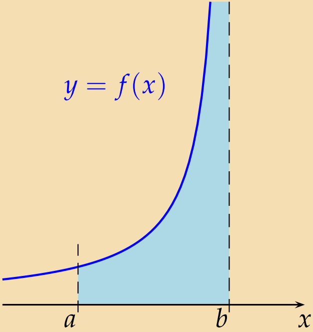
Nevlastní integrál vlivem funkce

Lenka Přibylová

3. srpna 2006

Obsah

Definice - singularita v horní mezi



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-} [F(t) - F(a)]$$

Najděte $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x.$

Najděte $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

V horní mezi má integrál singularitu vlivem funkce, protože pro $x = 1$ funkce není definovaná. Jde o výraz typu $\left\|\frac{1}{0}\right\|$. Nelze spočítat určitý integrál, protože v $x = 1$ neexistuje primitivní funkce.

Najděte $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t z levého okolí $x = 1$ je nyní integrál určitý,

Najděte $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-}\Big[-\ln|1-x|\Big]_0^t$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-} \big[-\ln|1-x|\big]_0^t$$
$$= \lim_{t\to 1^-} \big(-\ln|1-t| + \ln 1\big)$$

Dosadíme meze.

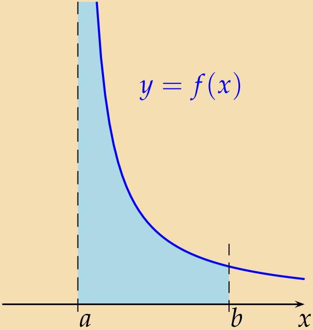
Najděte $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-}\big[-\ln|1-x|\big]_0^t$$
$$= \lim_{t\to 1^-}\big(-\ln|1-t| + \ln 1\big) = \infty$$

Spočteme limitu. Integrál diverguje.

$$\lim_{t\to 1^-}\ln|1-t| = \ln|0^+| = \infty$$

Definice - singularita v dolní mezi



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} [F(b) - F(t)]$$

Najděte $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x.$

Najděte $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

V dolní mezi má integrál singularitu vlivem funkce, protože pro $x = 0$ funkce není definovaná. Jde o výraz typu $\left\|\frac{1}{0}\right\|$. Nelze spočítat určitý integrál, protože v $x = 0$ neexistuje primitivní funkce.

Najděte $\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t z pravého okolí $x = 0$ je nyní integrál určitý, Najděte $\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_t^8$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_t^8$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{t\to 0^+}\left[\sqrt[3]{x^2}\right]_t^8$$

Zjednodušíme zlomek. Konstantu lze vytknout až před limitu.

Najděte $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_t^8$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{t\to 0^+}\left[\sqrt[3]{x^2}\right]_t^8 = \frac{3}{2}\lim_{t\to 0^+}\left(4-\sqrt[3]{t^2}\right)$$

Dosadíme meze.

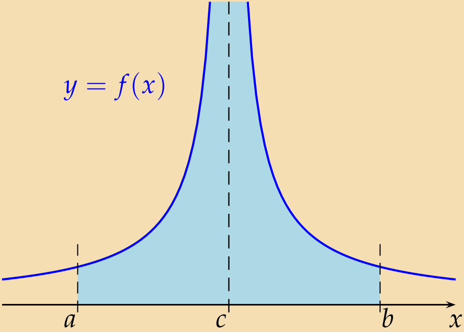
Najděte $\int_0^8 \frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\int_t^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_t^8$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{t\to 0^+}\left[\sqrt[3]{x^2}\right]_t^8 = \frac{3}{2}\lim_{t\to 0^+}\left(4-\sqrt[3]{t^2}\right) = 6$$

Spočteme limitu.

$$\lim_{t\to 0^+}\sqrt[3]{t^2} = 0$$

Definice - singularita uvnitř intervalu integrace



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Najděte $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x.$

Najděte $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$$

Integrál má singularitu uvnitř intervalu integrace. Funkce není definovaná pro $x = 1$. Nelze spočítat určitý integrál, protože zde funkce není ohraničená.

Najděte $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$$

Rozdělíme na dva nevlastní integrály s jednou singularitou.

Najděte $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t v levém resp. pravém okolí $x=1$ jsou nyní integrály určité,

Najděte $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t\to1^-}\int_0^t \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to1^+}\int_t^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{t\to1^-}\Big[3\sqrt[3]{x-1}\Big]_0^t + \lim_{t\to1^+}\Big[3\sqrt[3]{x-1}\Big]_t^2\end{aligned}$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to1^-} \Big[3\sqrt[3]{x-1}\Big]_0^t + \lim_{t\to1^+} \Big[3\sqrt[3]{x-1}\Big]_t^2 \\
&= \lim_{t\to1^-} \left(3\sqrt[3]{t-1}+3\right) + \lim_{t\to1^+} \left(3-3\sqrt[3]{t-1}\right)
\end{aligned}$$

Dosadíme meze.

Najděte $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 1^-} \Big[3\sqrt[3]{x-1}\Big]_0^t + \lim_{t\to 1^+} \Big[3\sqrt[3]{x-1}\Big]_t^2 \\
&= \lim_{t\to 1^-} \big(3\sqrt[3]{t-1}+3\big) + \lim_{t\to 1^+} \big(3-3\sqrt[3]{t-1}\big) = 6
\end{aligned}$$

Spočteme limity.

Najděte $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$.

Najděte $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Integrál má singularitu uvnitř intervalu integrace. Funkce není definovaná pro $x = 0$. Nelze spočítat určitý integrál, protože zde funkce není ohraničená.

Najděte $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Rozdělíme na dva nevlastní integrály s jednou singularitou.

Najděte $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Přepíšeme pomocí limitního přechodu v mezi. Pro všechna reálná t v levém resp. pravém okolí $x = 0$ jsou nyní integrály určité, Najděte $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \big[\ln|x|\big]_{-1}^{t} + \lim_{t\to 0^+} \big[\ln|x|\big]_{t}^{1}$$

lze proto použít Newton-Leibnitzovu formuli.

Najděte $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0^-} \big[\ln|x|\big]_{-1}^{t} + \lim_{t\to 0^+} \big[\ln|x|\big]_{t}^{1} \\
&= \lim_{t\to 0^-} \big(\ln|t| - \ln 1\big) + \lim_{t\to 0^+} \big(\ln 1 - \ln|t|\big)
\end{aligned}
$$

Dosadíme meze.

Najděte $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0^-} \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{t} + \lim_{t\to 0^+} \Big[\ln|x|\Big]_{t}^{1} \\
&= \lim_{t\to 0^-} \big(\ln|t| - \ln 1\big) + \lim_{t\to 0^+} \big(\ln 1 - \ln|t|\big)
\end{aligned}$$

Spočteme limity.

$$\lim_{t\to 0^+} \ln|t| = -\infty$$

Integrál neexistuje.

KONEC