

Radiologická fyzika

**rovnice a funkce
neznámé a proměnné
řešení a grafy**

podzim 2008, čtvrtá přednáška

Rovnice, neznámé, řešení

aneb

**neznámé se schovávají v rovnicích,
ale my je odhalíme**

Zlý sen vrchní sestry aneb

k čemu jsou zdravotnickému personálu rovnice

V jedné nejmenované nemocnici byli zvyklí na dodávku ampulí s lékem, který se přidával do infuzí. Ampule měly vždy objem V a koncentrace účinné látky v ní byla $p\%$ objemových. Personál měl příkaz vrchní sestry dávat do infuze o výsledném objemu W vždy jednu ampuli léku.

Jednou dodala lék jiná firma a ampule měly objem dvojnásobný, tj. $2V$, koncentrace účinné látky byla také dvojnásobná. Vrchní sestra přikázala dávat do infuzí polovinu obsahu ampule.

Co myslíte, je to správný příkaz??

Řešení úlohy

Označení: objemy v cm^3 (ml)

W ... objem infuze

V ... objem ampule první firmy

p ... koncentrace účinné látky v objemových procentech

W ... výsledný objem v obou případech

Objem účinné látky

$$U = \left(\frac{p}{100} \right) V$$

Předepsaná koncentrace
účinné látky v infuzi

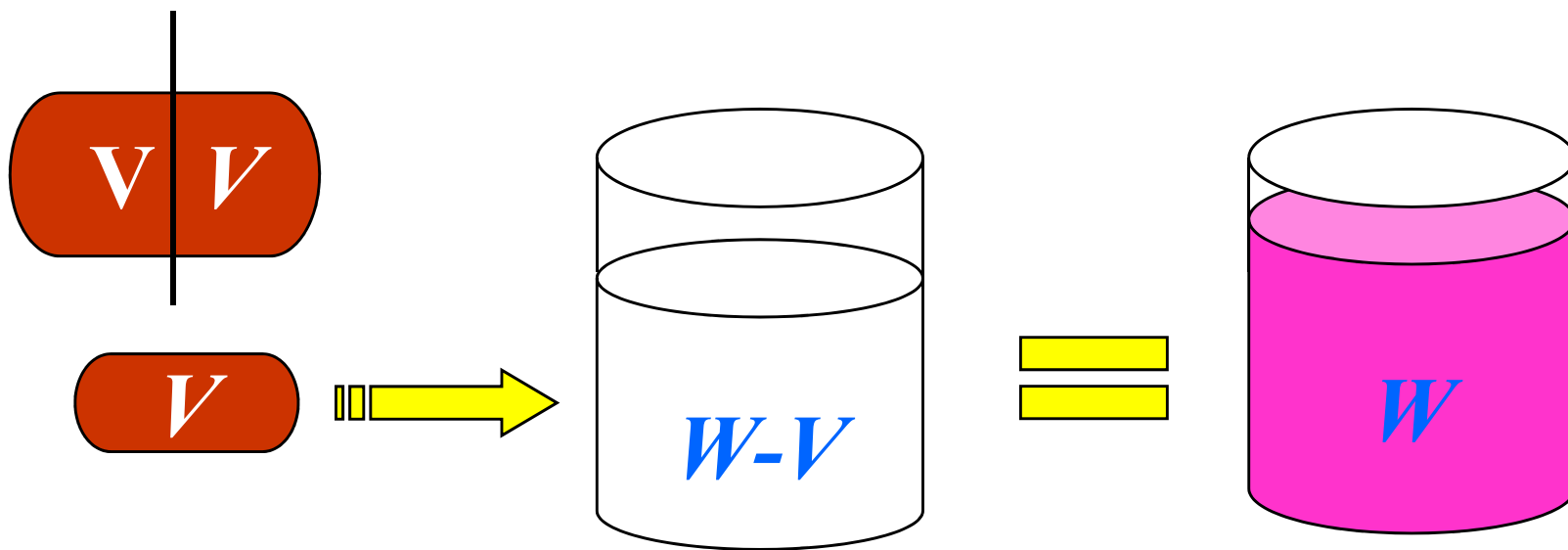
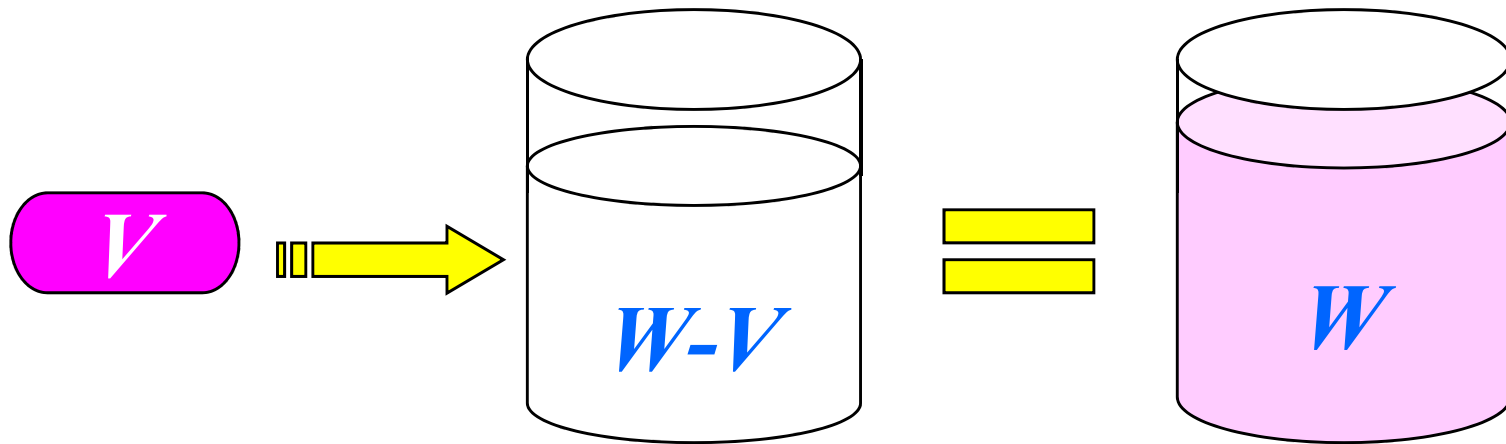
$$q = 100 \cdot \frac{U}{W} = \frac{pV}{W}$$

Koncentrace účinné látky
podle nového příkazu

$$\bar{p} = 2p \Rightarrow \bar{q} = \frac{2pV}{W} = 2q$$

Závěr: Snad nebyla dvojnásobná dávka smrtelná.

Řešení úlohy názorně



Obecnější úloha

Předpokládejme, že druhá firma dodala ampule o objemu $\Omega = 20$ ml s koncentrací účinné látky $\pi = 50$ % (objemových). Do jakého objemu základu infuze mají sestry vmíchat jednu ampuli, aby dosáhly předepsané koncentrace $q = 5$ % ?

x ... objem infuze (neznámá místo objemu W z předchozí úlohy)

Objem účinné látky v ampuli $\omega = \frac{\pi}{100} \cdot \Omega$

Rovnice pro x

lineární rovnice
o neznámé x $q = 100 \cdot \frac{\omega}{x + \Omega} \Rightarrow qx + (q - \pi)\Omega = 0$

řešení $x = \Omega \left(\frac{\pi}{q} - 1 \right) = 20 \left(\frac{50}{5} - 1 \right) = 180$ ml

Ještě doplnění

Jaká část objemu ampule bude v infuzi, jejíž výsledný objem je předepsán jako W ? Jaký výsledek očekáváte pro $W = 200$ ml?

y ... část objemu ampule v infuzi o předepsaném objemu W

Objem účinné látky v infuzi $w = y\omega = \frac{\pi}{100} \cdot y\Omega$

Rovnice pro y

**lineární rovnice
o neznámé y**

$$q = 100 \cdot \frac{w}{W} \Rightarrow q = \frac{y\pi\Omega}{W}$$

řešení

$$y = \frac{qW}{\pi\Omega} = \frac{5 \cdot 200}{50 \cdot 20} = 1$$

Složitější úloha

Do infuze o celkovém objemu $W = 200$ ml se přidávají dvě účinné látky. První z nich je v ampulích o objemu $V_1 = 20$ ml v koncentraci $p_1 = 30\%$ (objemových), druhá v ampulích o objemu $V_2 = 40$ ml v koncentraci $p_2 = 50\%$. Výsledná koncentrace obou účinných látek v infuzi má být $q = 15\%$ a poměr jejich koncentrací $q_1 / q_2 = p = 0,5$ (jedna ku dvěma).

- (1) Kolik ml roztoku 1 a kolik ml roztoku 2 je třeba dát do infuze ?
- (2) Kolik infuzí připravíme, máme-li k dispozici $a = 20$ ampulí roztoku 1 a $b = 15$ ampulí roztoku 2 ?

Část (1) spočteme nyní, část (2) snadno dokončíte sami.

Řešení složitější úlohy – sestavení rovnic

x ... hledaný objem roztoku 1 (první neznámá)

y ... hledaný objem roztoku 2 (druhá neznámá)

U_1 ... objem účinné látky 1 v objemu x

U_2 ... objem účinné látky 2 v objemu y

$$U_1 = \frac{p_1}{100} \cdot x, U_2 = \frac{p_2}{100} \cdot y$$

koncentrace

q_1 ... látky 1 v infuzi

q_2 ... látky 2 v infuzi

$$q_1 = \frac{U_1}{W} = \frac{p_1}{100} \cdot \frac{x}{W}, q_2 = \frac{U_2}{W} = \frac{p_2}{100} \cdot \frac{y}{W}$$

$$U_1 + U_2 = U \quad \Rightarrow \quad p_1 x + p_2 y = qW$$

$$\frac{q_1}{q_2} = p \Rightarrow \frac{p_1 x}{p_2 y} = p \Rightarrow p_1 x - p p_2 y = 0$$

**soustava lineárních rovnic
o dvou neznámých x, y**

Řešení složitější úlohy – řešení rovnic

výchozí rovnice

$$p_1 x + p_2 y = qW$$

$$p_1 x - p p_2 y = 0$$

odečtení druhé rovnice od první

$$p_2(1+p)y = qW \Rightarrow y = \frac{qW}{p_2(1+p)}$$

dosazení y do kterékoli z výchozích rovnic – x vyjde stejně

$$x = \frac{p q W}{p_1(1+p)}, y = \frac{q W}{p_2(1+p)} \Rightarrow x \square 33, y = 40$$

získaná dvojice $x=33$ ml, $y=40$ ml je řešením soustavy

I ve zdravotnictví někdy třeba řešit rovnice, hlavně lineární.

Řešení soustavy více lineárních rovnic snadno a rychle

soustava m lineárních rovnic
o n neznámých

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

matice soustavy
rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

$a_{ij}, b_i, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \dots$ **koeficienty** (známá čísla)

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots$ **neznámé**

všechny n -tice, které vyhovují rovnicím, tvoří **řešení** soustavy rovnic

Ekvivalentní úpravy

ekvivalentní úpravy soustavy rovnic

jsou ty, které nemění její řešení

- (1) násobení libovolné rovnice nenulovým číslem
- (2) přičtení k -násobku libovolné rovnice k jiné libovolné rovnici

ekvivalentní úpravy matice soustavy

co provádíme s rovnicemi, provádíme s příslušnými řádky matice

- (1) násobení všech prvků v libovolném řádku nenulovým číslem
- (2) přičtení k -násobku prvků v libovolném řádku k jinému libovolnému řádku

poznámka: možnosti pro m a n ... $m = n$... $m < n$... $m > n$

Případ $m = n = 3 \dots$ příklad 1 ... (I)

$$\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 2 \\ -2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

(2) první rovnici vynásobenou (-1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)

$$\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 2 \\ 5y + 5z = 5 \\ -y - 2z = 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Případ $m = n = 3 \dots$ příklad 1 ... (II)

další úpravy

(3) druhou rovnici násobíme $1/5$ (tj. dělíme ji 5)

(4) druhou rovnici (po předchozí úpravě) přičteme k třetí rovnici

$$\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 2 \\ y + z = 1 \\ -z = 1 \end{array} \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

ekvivalentní soustava rovnic (která má stejné řešení jako původní)
řešení najdeme dosazováním „odzadu“

jediné řešení ... $x = 1, y = 2, z = -1$ Proved'te zkoušku, prosím !

A ještě se podívejte na matici – je ve schodovitém tvaru.

Matrice z koeficientů levých stran má stejně schodů jako celá matice (braná i se sloupcem pravých stran).

Případ $m = n = 3 \dots$ příklad 2 ... (I)

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ -2x + y - z = 1 \\ -3x + 4y + z = 4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

(2) první rovnici vynásobenou 3 přičteme k třetí

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ 5y + 5z = 5 \\ 10y + 10z = 10 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & 10 & 10 \end{array} \right)$$

Případ $m = n = 3 \dots$ příklad 2 ... (II)

další úpravy

(3) druhou rovnici násobíme $1/5$ (tj. dělíme ji 5)

(4) třetí rovnici násobíme $1/10$ (tj. dělíme ji 10)

(5) druhou rovnici vynásobenou (-1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)

$$\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 2 \\ y + z = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ekvivalentní soustava rovnic (která má stejné řešení jako původní)
řešení najdeme dosazováním „odzadu“

jedna volná neznámá

nekonečně mnoho řešení ... $x = -z$, $y = 1 - z$, z je libovolné

Proveďte zkoušku! Matice jsou opět ve schodovitém tvaru.

Matice mají shodný počet schodů, ale o jeden menší než počet neznámých.

Případ $m = n = 3 \dots$ příklad 3 ... (I)

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ -2x + y - z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 8 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

(2) první rovnici přičteme k třetí

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ 5y + 5z = 5 \\ 5y + 5z = 10 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

Případ $m = n = 3 \dots$ příklad 1 ... (II)

další úpravy

(3) druhou rovnici vynásobenou (-1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)

(4) Druhou rovnici násobíme $1/5$ (tj. dělíme ji 5)

$$x + 2y + 3z = 2$$

$$y + z = 1$$

$$0 = 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

ekvivalentní soustava rovnic (která má stejné řešení jako původní)
řešení najdeme dosazováním „odzadu“

žádné řešení ... poslední rovnici nelze splnit

Matice jsou zase ve schodovitém tvaru. Ale:

Matice koeficientů levých stran má méně schodů než celá matice.

Případ $m < n \dots$ příklad 1

$$\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 2 \\ -2x + y - z = 1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

(2) upravenou druhou rovnici vynásobíme 1/5 (tj. vydělíme 5)

$$\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 2 \\ y + z = 1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

jedna volná neznámá

nekonečně mnoho řešení ... $x = -z$, $y = 1 - z$, z je libovolné

Matice jsou opět ve schodovitém tvaru.

Matice mají shodný počet schodů, ale o jeden menší než počet neznámých.

Případ $m < n \dots$ příklad 2

$$\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 2 \\ -2x - 4y - 6z = -5 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -6 & -5 \end{array} \right)$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

$$\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 2 \\ 0 = -1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

žádné řešení ... druhou rovnici nelze splnit
Matice jsou opět ve schodovitém tvaru.

Matice koeficientů levých stran má méně schodů než celá matice.

Případ $m > n \dots$ příklad 1 ... (I)

$$\begin{array}{rclcrcl} x + 2y + 3z & = & 2 & 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ -2x + y - z & = & 1 & -2 & 1 & -1 & | & 1 \\ x + y + z & = & 2 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ -x + 2y & = & 3 & -1 & 2 & 0 & | & 3 \end{array}$$

úpravy

- (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé
- (2) první rovnici vynásobenou (-1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)
- (3) první rovnici přičteme ke třetí

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 2 \\ 5y + 5z & = & 5 \\ -y - 2z & = & 0 \\ 4y + 3z & = & 5 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

Případ $m > n \dots$ příklad 1 ... (II)

další úpravy

(3) druhou rovnici vynásobíme $1/5$ (tj. vydělíme 5)

(4) upravenou druhou rovnici přičteme k třetí rovnici

(5) upravenou druhou rovnici vynásobenou (-4) přičteme k třetí

(6) upravenou třetí rovnici odečteme od čtvrté

$$x + 2y + 3z = 2$$

$$y + z = 1$$

$$-z = 1$$

$$0 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Dokončete a charakterizujte řešení. Popište schodovitý tvar obou matic.

Případ $m > n \dots$ příklad 2 ... (I)

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ -2x + y - z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

úpravy

- (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé
- (2) první rovnici přičteme k třetí
- (3) první rovnici vynásobenou (-3) přičteme ke čtvrté

$$\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ 5y + 5z = 5 \\ 5y + 5z = 5 \\ -5y - 5z = -5 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{array} \right)$$

Případ $m > n \dots$ příklad 2 ... (II)

$$x + 2y + 3z = 2$$

$$y + z = 1$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Úpravy rovnic, které vedly ke schodovitému tvaru matic popište.

nekonečně mnoho řešení

$x = -z, y = 1 - z, z$ libovolné (volná neznámá)

Počet schodů obou matic je stejný a roven 2, o jeden menší než počet neznámých.

Případ $m > n \dots$ příklad 3 ... (I)

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z = & 2 & \\ -x - 2y - 3z = & -2 & \\ 2x + 4y + 6z = & 4 & \\ -3x - 6y - 9z = & -3 & \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -3 & -6 & -9 & -3 \end{array} \right)$$

Popište úpravy a získejte ekvivalentní soustavu ve tvaru

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z = & 2 & \\ 0 = & 0 & \\ 0 = & 0 & \\ 0 = & 0 & \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

**nekonečně mnoho řešení $x = 2 - 2y - 3z$, y a z libovolné
dvě volné neznámé – počet schodů matic je shodný a o dvě menší
než počet neznámých**

Obecné závěry

Gaussova eliminační („likvidační“) metoda

právě předvedený způsob řešení soustavy rovnic převodem matice a rozšířené matice (o sloupec pravých stran) na schodovitý tvar

hodnost matice

počet nenulových řádků jejího schodovitého tvaru

soustava lineárních rovnic

$h(A)$, $h(B)$... hodnosti matice a rozšířené matice soustavy

řešitelnost soustavy m rovnic o n neznámých $\Leftrightarrow h(A) = h(B) = h$
(schodovité tvary matic mají stejně schodů)

počet volných neznámých ... $d = n - h$

jediné řešení $\Leftrightarrow d = 0$, tj. $h = n$

Úlohy na rovnice

Úloha 1. Proveďte rozbor řešitelnosti a počtu řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých, jsou-li všechny pravé strany nulové. Zdůvodněte, proč má vždy řešení a jaké.

Úloha 2.

$$-x - y - 2z = 1$$

$$2x + 3y + 4z = -4$$

$$-5x + 2y + 3z = 4$$

$$x + 2y + 5z = 0$$

Úloha 3.

$$-x - y - 2z = 1$$

$$2x + 3y + 4z = 2$$

Úloha 4. Vymyslete soustavu tří rovnic o třech neznámých, která nemá řešení.

Úloha 5. Vymyslete soustavu tří rovnic o dvou neznámých, která má právě jedno řešení.

Funkce, proměnné, grafy

aneb

podnět, odezva a jejich znázornění

Dokonalé smysly a jak to souvisí s funkcemi

„Kdyby náš sluch, zrak, čich, hmat a chuť reagovaly úměrně intenzitě působících podnětů, čili lineárně, nebylo by možné obsáhnout tak velký rozsah jejich intenzity, s nimiž se setkáváme. Například bychom dobře viděli doma při práci, ale navečer by pro nás byla úplná tma. Naopak za slunného dne bychom oslepli. Každé čidlo je totiž nejcitlivější při určité dopadající intenzitě. Při nepatrných intenzitách nereaguje, naopak příliš velké intenzity jej zahltí nebo i zničí.“

„Je umožněno vnímání v obrovském rozsahu, ale je i zachována výborná rozlišovací schopnost relativních změn. Např. změní-li se intenzita nějakého pole z hodnoty 1000 na 10 000, vnímáme tuto změnu stejně dobře jako např. z hodnoty 0,1 na 1. Je to výborně zařízeno.“

Ale jak je to zařízeno?

Smysly umí převádět násobení na sečítání – vnímají logaritmicky.

Naše smysly

sluch ... Tím, že ucho vnímá logaritmicky, je schopno pojmout obrovský rozsah intenzit. Obdobně jsou na tom ostatní smysly.

zrak ... Oko je schopné vnímat bodový zdroj, ze kterého dopadají desítky fotonů za sekundu, výjimečně i jen několik za sekundu.

čich ... Zředění čichově rozeznatelných látek může dosahovat hodnot jedna ku miliardě, i vyšší. Taková ohromná citlivost není často možná ani s použitím nejlepší techniky.

chut' ... Citlivost je podobná jako u čichu, navíc čich pomáhá k lepšímu rozlišení.

Co jsou to decibely aneb uši umí logaritmovat

Kavárna byla prázdná, jen někde v rohu tiše hrál houslista a kousek opodál prováděl asistent hygienika měření hlučnosti prostředí. Naměřil 30 decibelů. Přicházeli lidé, usedali ke kávě a hovořili. Měření ukázalo 50 decibelů. Začala diskotéka, hudba sílila, a naráz bylo 100 decibelů. Zaburácel hrom – 120 decibelů.

Co to znamená? Znamená to, že zvuk diskotéky je dvakrát intenzivnější než hovor v kavárně?

K odpovědi na tuto a podobné otázky potřebujeme samozřejmě definici intenzity, definici hlasitosti a také vědět něco o matematických závislostech – funkcích.

Aritmetické a geometrické narůstání intenzita zvuku

intenzita zvuku

energie zvukového vlnění, která projde plochou 1m^2 za dobu 1s

jednotky ... $\text{J m}^{-2}\text{s}^{-1} = \text{W m}^{-2}$

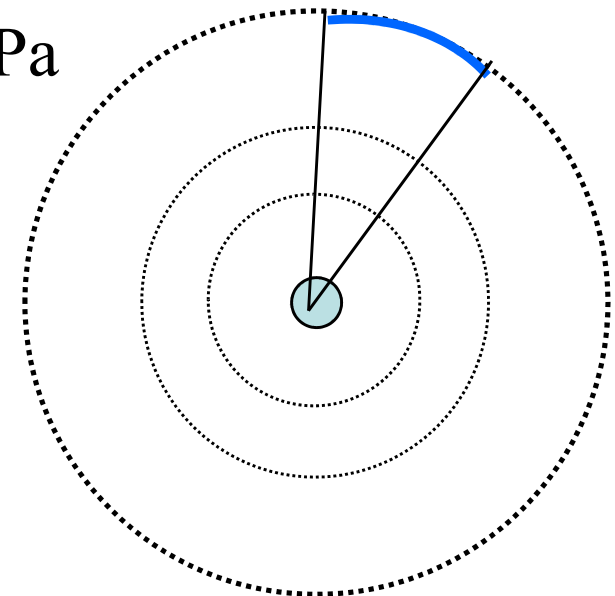
akustický tlak ... p , $I \sim p^2$

1m^2 ... $I = P/4\pi R^2$

práh slyšení ... $I_0 = 10^{-12} \text{W m}^{-2}$, $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{Pa}$

práh bolesti ... $I_B = 10 \text{W m}^{-2}$

rozsah intenzit ... 13 řádů



Aritmetické a geometrické narůstání hladina intenzity zvuku (hlasitost) (I)

Weberův – Fechnerův zákon

narůstá-li intenzita řadou geometrickou, narůstá subjektivní sluchový vjem řadou aritmetickou

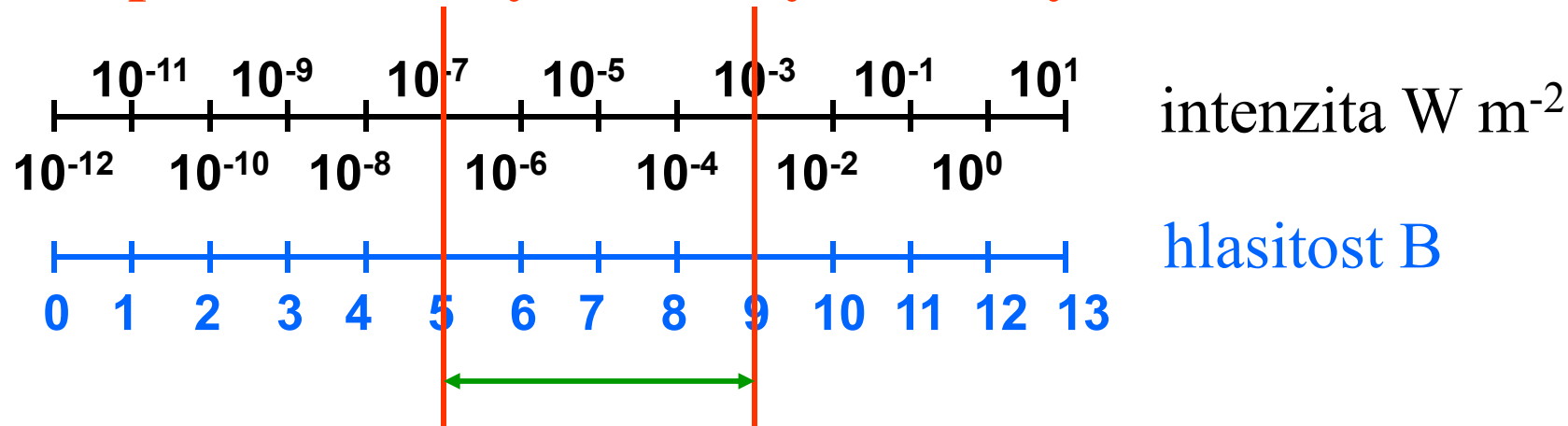
vzroste-li intenzita desetkrát, vzroste hladina intenzity, vyjadřující sluchový vjem, o 1 B (bel)

vzroste-li intenzita stokrát, vzroste hladina intenzity, vyjadřující sluchový vjem, o 2 B

vzroste-li intenzita 10^n - krát, vzroste hladina intenzity, vyjadřující sluchový vjem, o n B

Aritmetické a geometrické narůstání hladina intenzity zvuku (hlasitost) (II)

stupnice intenzity a hladiny intenzity

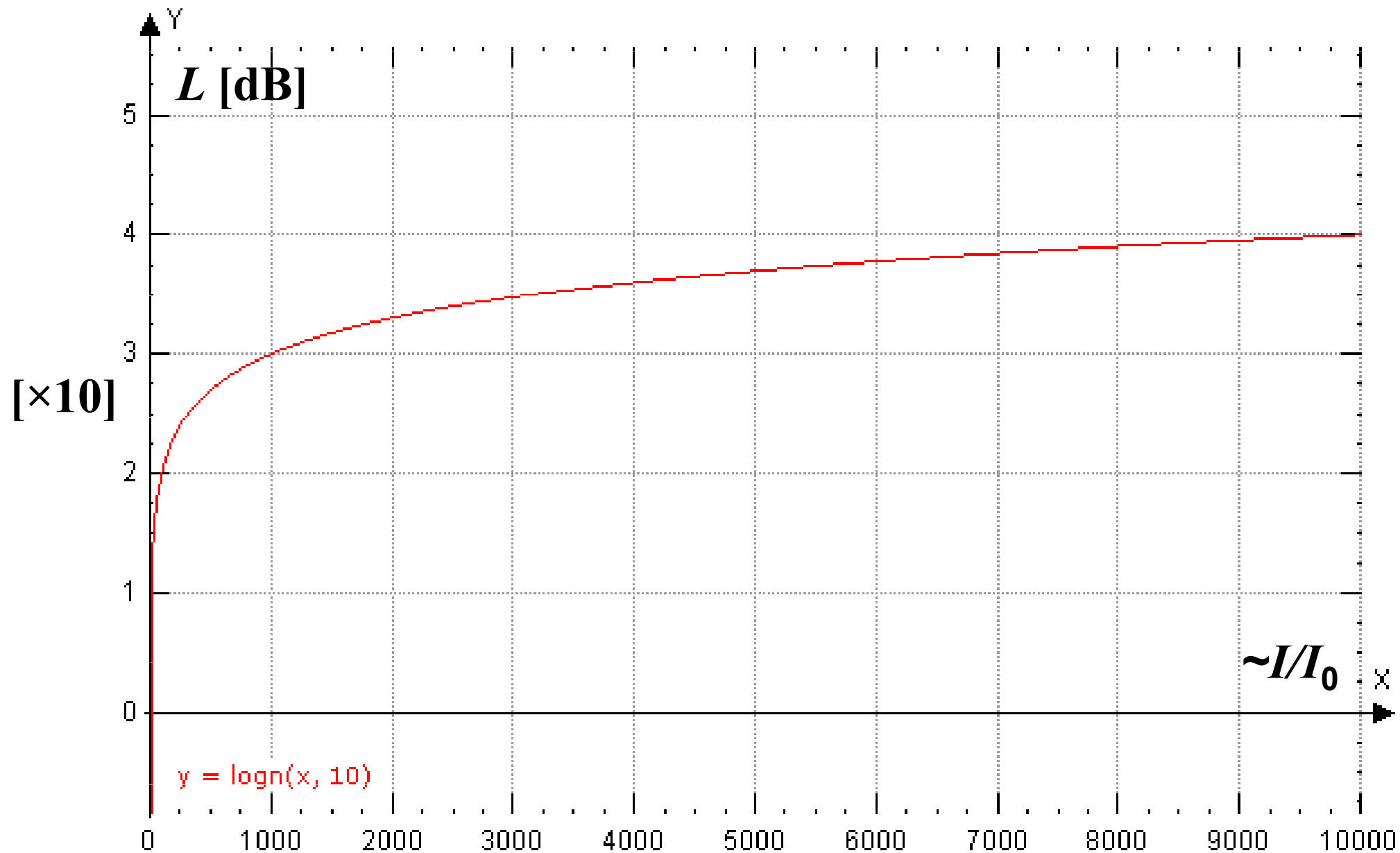


$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-3}}{10^{-7}} = 10^4, \quad L_1 - L_2 = 4, \quad \log_{10} \frac{I_1}{I_2} = 4$$

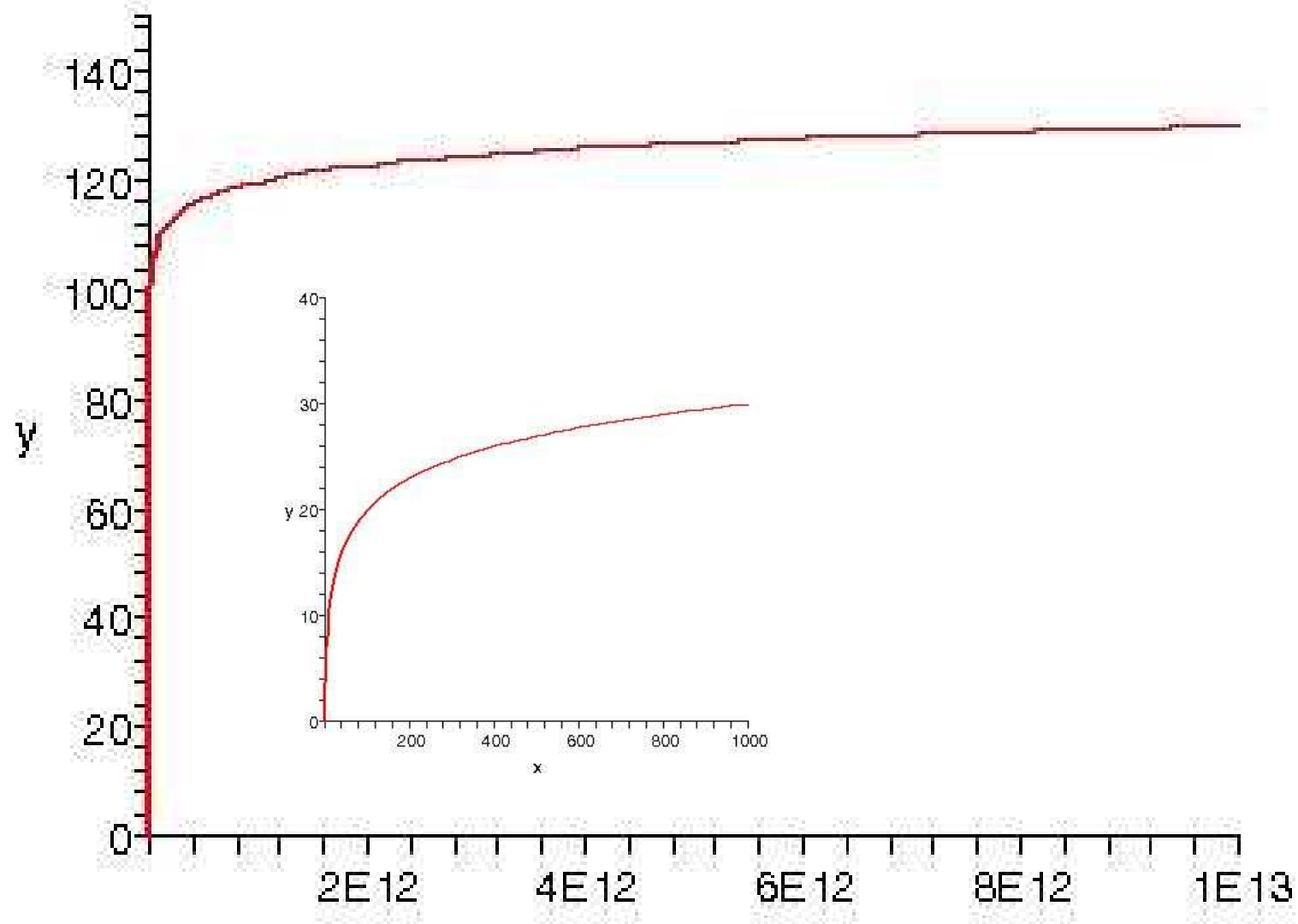
$$\Delta L = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_2}, \quad L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

jednotka hlasitosti L ... 1 decibel

Závislost hlasitosti na intenzitě

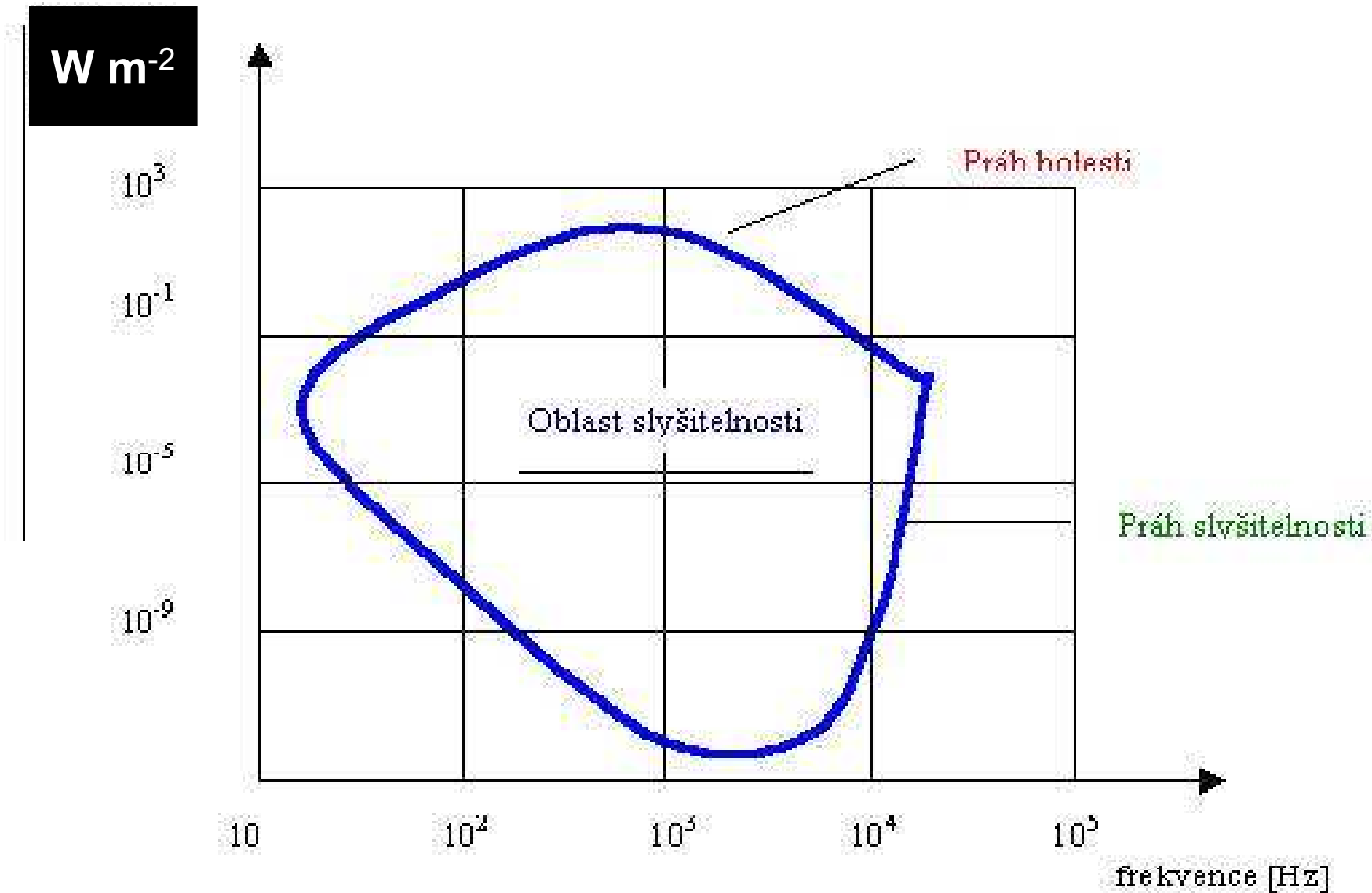


Závislost hlasitosti na intenzitě celý rozsah



SITUACE	L [dB]	I [W m^{-2}]	p [Pa]
práh slyšitelnosti	0	10^{-12}	0,000 02
šepot, šelest listí	10	10^{-11}	0,000 065
tichá zahrada	20	10^{-10}	0,000 2
housle – pianissimo	30	10^{-9}	0,000 65
kroky, tichá hudba	40	10^{-8}	0,002
hluk v kavárně	50	10^{-7}	0,006 5
hluk v obchodě	60	10^{-6}	0,02
hluk automobilu	70	10^{-5}	0,064 5
kancelář s psacími stroji	80	10^{-4}	0,204
rušná ulice, klakson auta	90	10^{-3}	0,645
orchestr fortissimo, siréna	100	10^{-2}	2,04
sbíječka	110	10^{-1}	6,45
tryskový motor, hrom	120	1	20,4
práh bolesti	130	10	64,5

Citlivost ucha k frekvencím



Jak se tlumí záření aneb

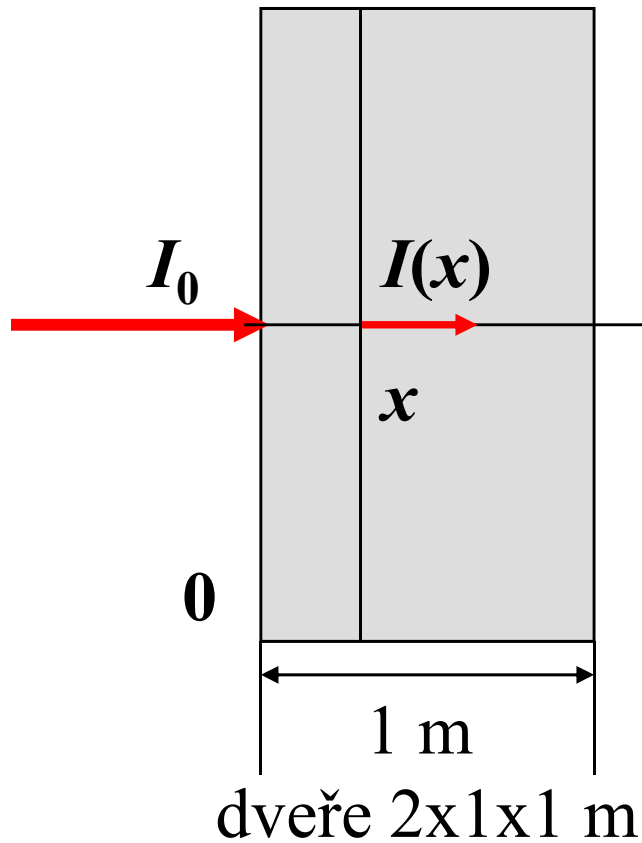
potřebuje funkce také radiologický asistent?

Tento příběh se stal při jedné exkurzi skupiny studentů lékařské fyziky na velmi dobře vybavené rentgenové pracoviště. Vedoucí radiologický asistent se studentům velice ochotně věnoval, ukazoval jim funkci přístrojů a zabýval se také problematikou ochrany před zářením.

Ujišťoval studenty, že se personálu nemůže nic stát, neboť obsluhuje přístroj zpoza dveří se zabudovanou olověnou deskou, přičemž rentgenové záření se v desce tlumí „úměrně čtverci její tloušťky“. Studenti fyziky se poněkud rozpačitě usmívali.

Víte proč? Báli se ozáření nebo byl důvod jiný?

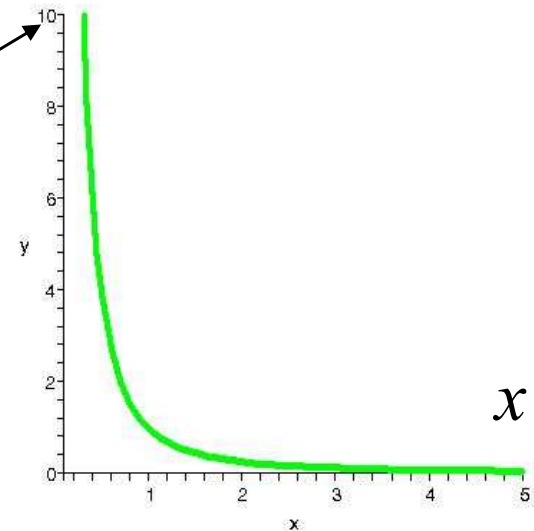
Jak by mělo vypadat tlumení intenzity „se čtvercem tloušťky“ ?



Pb, $\rho = 11\,800 \text{ kg m}^{-3}$
 $m = 23,6 \text{ t}$

$$I(x) = K \frac{I_0}{x^2}$$

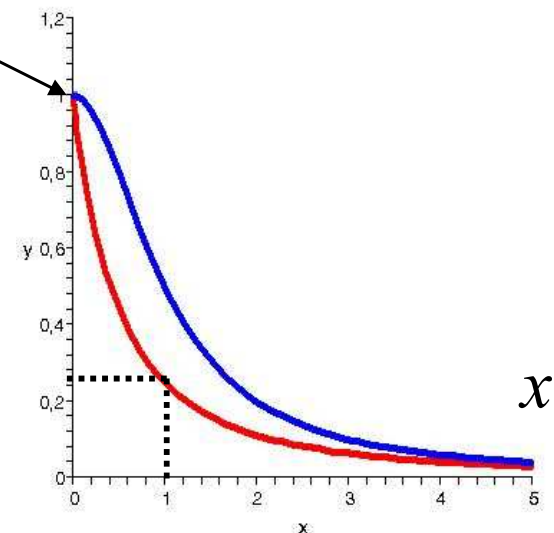
$$I(x) = 10 I_0$$



$$I(x) = I_0$$

$$I(x) = \frac{I_0}{(1+x)^2}$$

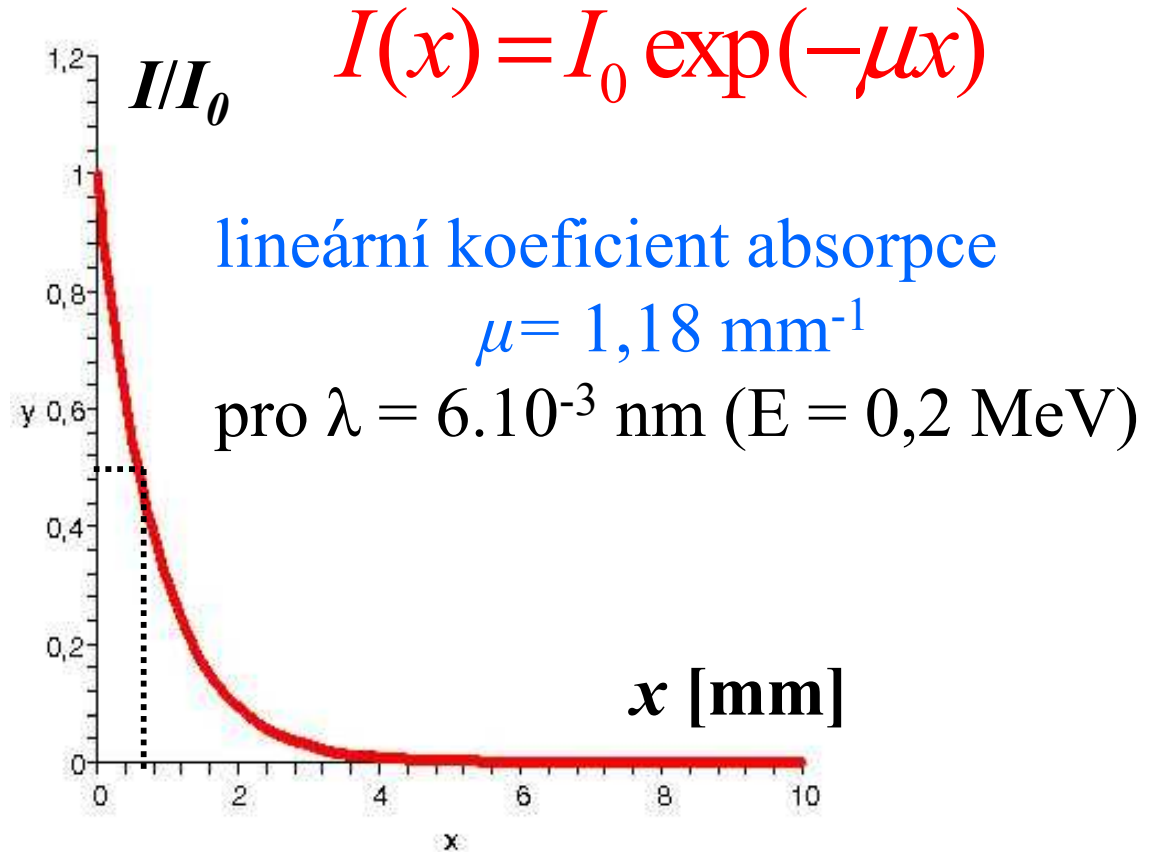
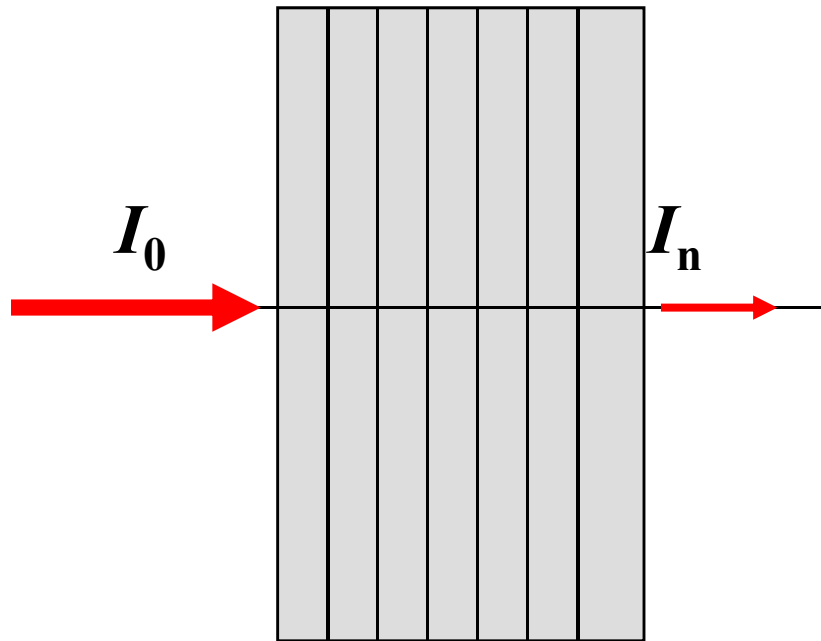
$$I(x) = \frac{I_0}{1+x^2}$$



A co teprve zástěra ?

A jak to je doopravdy ?

0 1 2 ... n
stejně tlusté vrstvy



$$\frac{I_1}{I_0} = K, \frac{I_2}{I_1} = K, \dots, \frac{I_n}{I_{n-1}} = K, \dots, K = e^{-\mu}, \quad e = 2,71828\dots$$

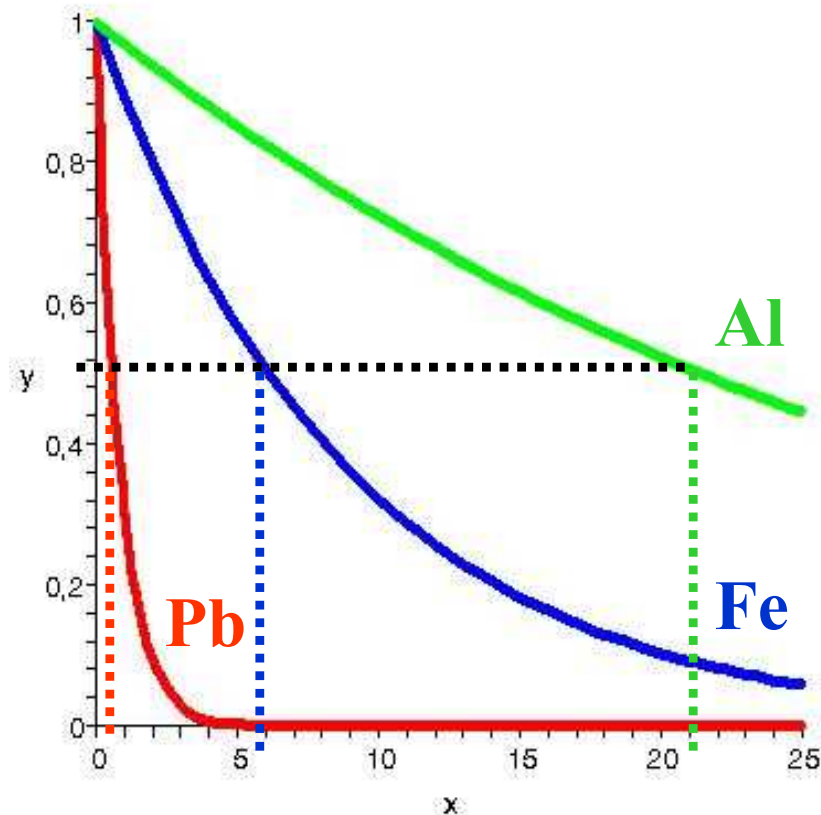
**Ke snížení intenzity na polovinu stačí ani ne milimetr silná deska.
Hmotnost olověné výplně dveří 1 mm x 1 m x 2 m je asi $m = 23,6 \text{ kg}$.**

Srovnání absorpce materiálů – čísla

http://www.eamos.cz/amos/kbf/externi/kbf_0252/ra-rozpad_absorpce.ppt

E_γ [MeV]	μ [cm ⁻¹]			$d_{1/2}$ [mm]		
	Pb (Z=82)	Fe (Z=26)	Al (Z=13)	Pb (Z=82)	Fe (Z=26)	Al (Z=13)
0,15	24,4	1,58	0,362	0,28	4,39	19,15
0,175	15,4	1,27	0,336	0,45	5,44	20,63
0,2	11,8	1,13	0,323	0,59	6,13	21,46
0,25	6,58	0,94	0,296	1,05	7,37	23,42
0,3	4,76	0,85	0,278	1,46	8,15	24,93
0,5	1,72	0,66	0,228	4,03	10,50	30,40
1,0	0,79	0,47	0,166	8,77	14,75	41,76
2,0	0,51	0,43	0,117	13,59	21,00	59,24
5,0	0,49	0,25	0,075	14,15	27,73	92,42
10,0	0,60	0,23	0,062	11,55	30,14	111,8

Srovnání absorpce materiálů – grafy



E = 0,2 MeV

$$y = \frac{I(x)}{I_0} = \exp(-\mu x)$$

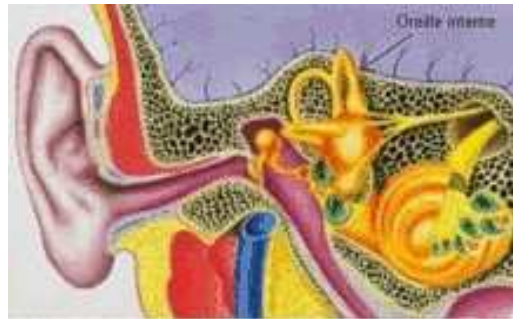
**Význam hodnoty $d_{1/2}$
(polovrstva):**

Pro $x = d_{1/2}$ klesne hodnota intenzity záření na polovinu původní hodnoty.

Co jsou to funkce ?

Reálná funkce jedné reálné proměnné

podnět – zvuková vlna



odezva – do mozku (vjem)



nezávisle proměnná
(x ... intenzita zvuku)



funkční předpis
 f

závisle proměnná
(y ... hlasitost, $y = f(x)$)



$$y = f(x), \quad x = \frac{I}{I_0}, \quad y = L, \quad L = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Obory funkce

Definiční obor funkce D_f

soubor přípustných hodnot nezávisle proměnné x

Příklad: $x=I$ (intenzita slyšitelného zvuku), $D_f = [10^{-12}, 10]$ [W m⁻²]

Obor hodnot funkce H_f

soubor hodnot, kterých nabývá závisle proměnná y , když x !!
proběhne celý definiční obor. Každému x se přiřadí **právě jedno** y .

Příklad: $y = L$ (hlasitost), $H_f = [0, 130]$ [dB]

Graf funkce G_f

soubor dvojic $[x,y]$, kde $y=f(x)$, většinou znázorněný v rovině $x-y$

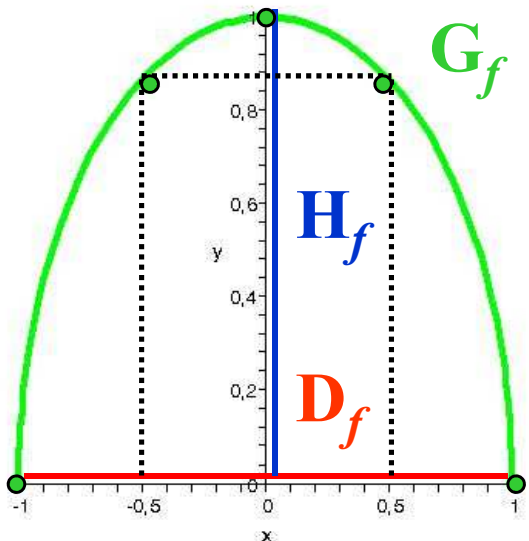
Úkol: Zamyslete se nad tím, jaký asi je D_f a H_f pro funkci popisující závislost intenzity záření na tloušťce materiálu, jímž záření prošlo. Vezměte v úvahu, že některé veličiny mohou nabývat (z matematického hlediska) i libovolně velkých (malých) hodnot, i když se tyto hodnoty nedají prakticky realizovat.

Způsoby zadání funkce

Funkce je pravidlo, které **každé hodnotě x z D_f** přiřadí **právě jedno $y = f(x)$** . Je zadána vždy spolu s definičním oborem.

Definiční obor buď zadáme přímo, nebo jej určíme z funkčního předpisu tak, aby všechny operace v předpisu měly smysl.

Obor hodnot je pak již jednoznačně určen zadáním funkce.

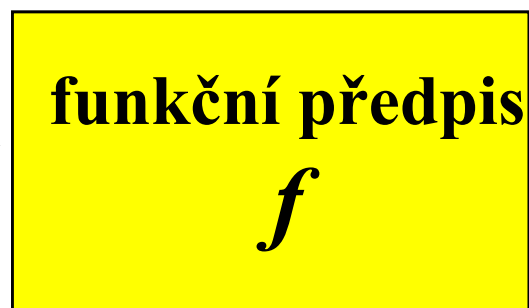
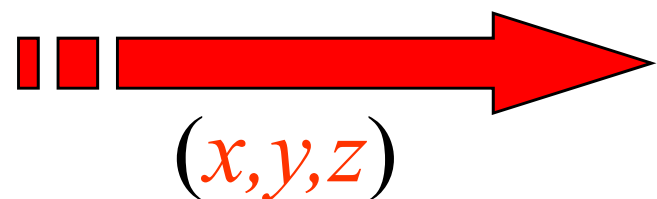
zadání předpisem	zadání tabulkou	zadání grafem												
$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $D_f = [-1, 1]$ $H_f = [0, 1]$ <p>Pro x mimo D_f nemá odmocnina smysl.</p>	jen některé hodnoty <table border="1" data-bbox="869 995 1308 1509"><thead><tr><th>x</th><th>$y=f(x)$</th></tr></thead><tbody><tr><td>-1,00</td><td>0,00</td></tr><tr><td>-0,50</td><td>0,87</td></tr><tr><td>0,00</td><td>1,00</td></tr><tr><td>0,50</td><td>0,87</td></tr><tr><td>1,00</td><td>0,00</td></tr></tbody></table>	x	$y=f(x)$	-1,00	0,00	-0,50	0,87	0,00	1,00	0,50	0,87	1,00	0,00	 <p>The graph shows a green semi-circle on a coordinate system. The x-axis is labeled 'x' and has tick marks at -1, -0.5, 0, 0.5, and 1. The y-axis is labeled 'y' and has tick marks at 0.2, 0.4, 0.6, and 0.8. The curve starts at (-1, 0), goes up to (0, 1), and then down to (1, 0). A red horizontal line segment on the x-axis from -1 to 1 is labeled D_f. A blue vertical line segment on the y-axis from 0 to 1 is labeled H_f. Two points on the curve are marked with green dots at approximately (-0.5, 0.87) and (0.5, 0.87), with dashed lines connecting them to the axes. The entire curve is labeled G_f.</p>
x	$y=f(x)$													
-1,00	0,00													
-0,50	0,87													
0,00	1,00													
0,50	0,87													
1,00	0,00													

Vsuvka – funkce několika proměnných – I

Reálná skalární funkce více reálných proměnných

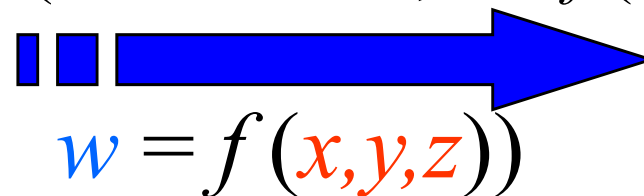
nezávisle proměnné $x, y, z \dots$

(třeba souřadnice)



závisle proměnná w

(třeba hustota, $w = f(x, y, z)$)



Reálná vektorová funkce několika reálných proměnných

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Například indukce magnetického pole Země v závislosti na poloze

$$\vec{r} \rightarrow \vec{B}, \quad \vec{B}(\vec{r}) = (B_1(x, y, z), B_2(x, y, z), B_3(x, y, z))$$

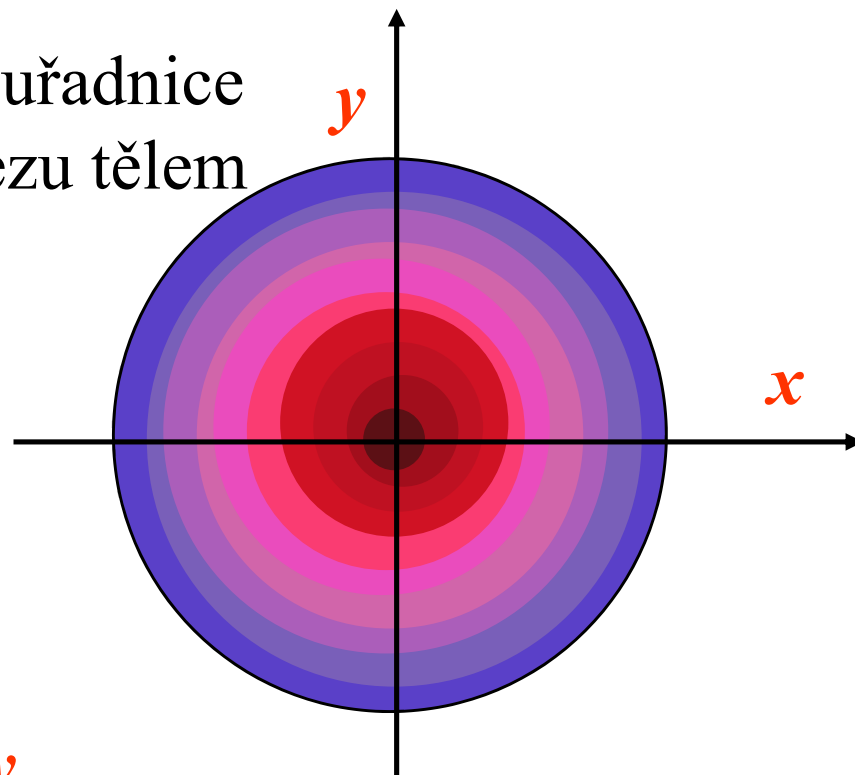
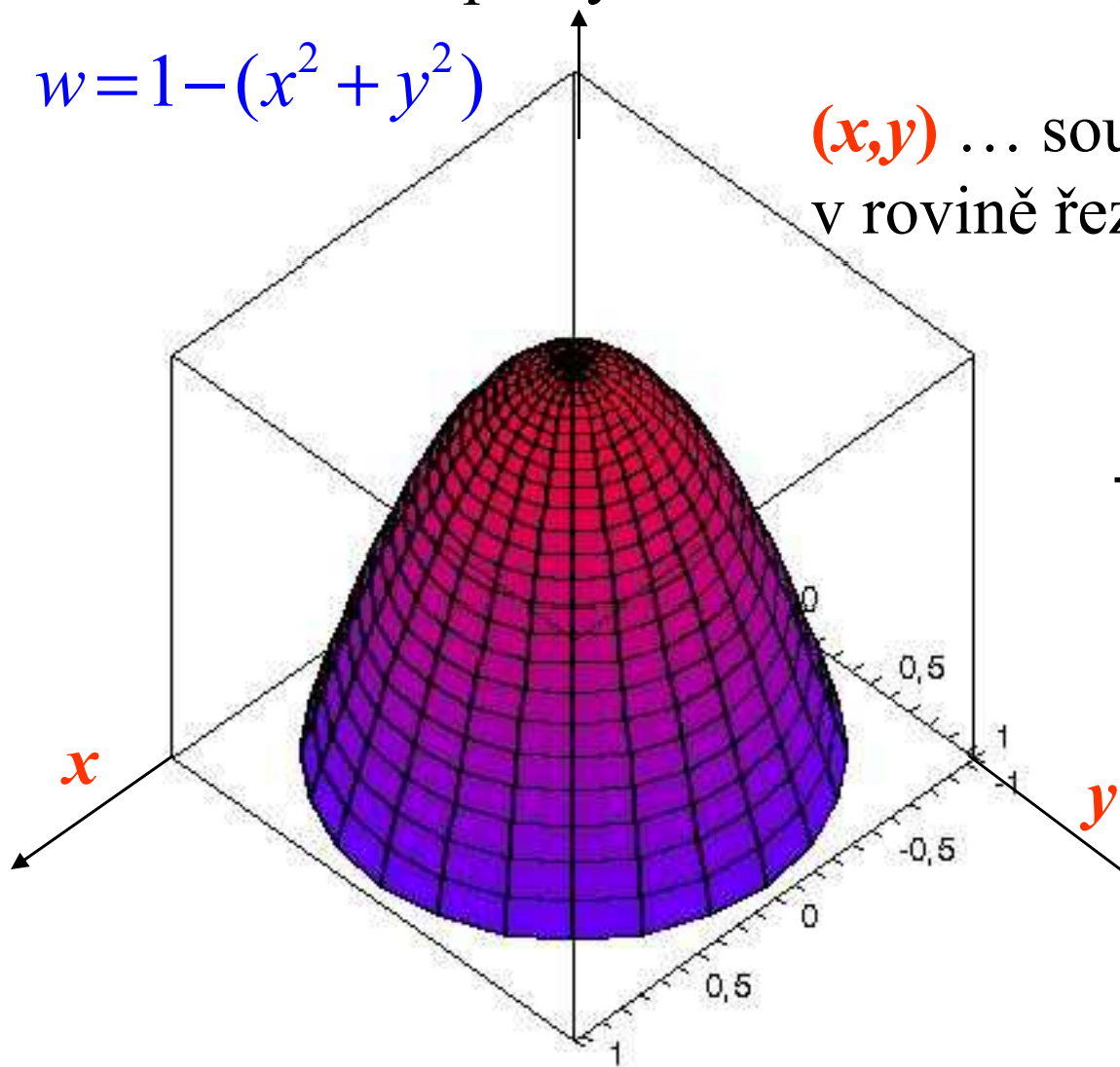
Vsuvka – funkce několika proměnných – II

Příklad funkce dvou proměnných

hustota tkáně v pomyslném řezu tělem (zviditelněná zobrazením CT)

$$w = 1 - (x^2 + y^2)$$

(x, y) ... souřadnice
v rovině řezu tělem



barva odpovídá jistému
rozmezí funkčních hodnot w ,
tj. hodnot hustoty tkáně

Vsuvka – funkce několika proměnných – III

skutečný rentgenový počítačový tomogram



tomogram břišní
dutiny

místo barvy jsou
hodnoty hustoty
odstupňovány
odstíny šedi

Divné funkce - příklady

(1)

$$D_f = [0, 1] \dots f: x \rightarrow y = f(x) = \begin{cases} 1 & \dots \text{pro } x \text{ racionální} \\ 0 & \dots \text{pro } x \text{ iracionální} \end{cases}$$

$H_f = \{0, 1\}$

(2)

$$D_f = [1, 2, 3, \dots] \dots f: x_i \rightarrow y_i = f(x_i) \dots \text{posloupnost}$$

$$H_f = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$$

(3)

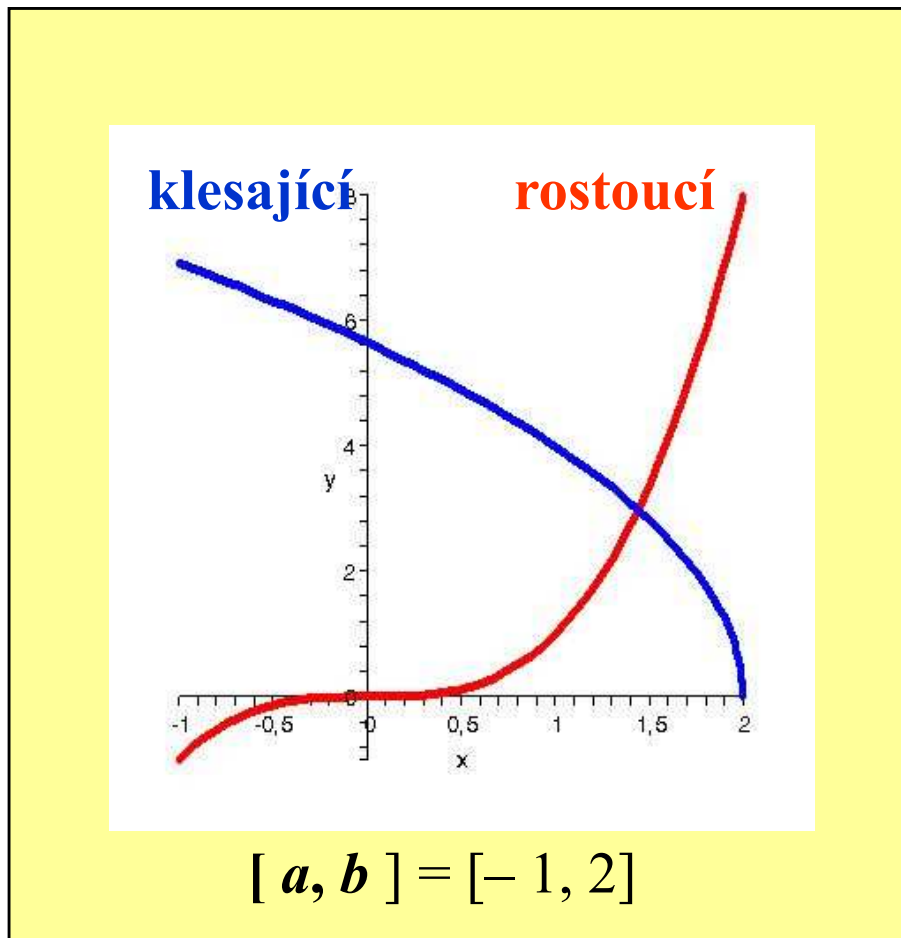
$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{1, 2\} \dots f: x_i \rightarrow y_i = f(x_i) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$H_f = \mathbf{R} \setminus \{5, 7\}$

Některé funkce nemají hladké nebo spojité grafy, nebo je ani graficky znázornit nelze. Ale těmi se zatím zabývat nebudeme.

Základní vlastnosti funkcí – I

Monotonie na intervalu – A



funkce na intervalu $[a, b]$

rostoucí

pro všechny hodnoty $x_1 < x_2$ z $[a, b]$
platí $f(x_1) < f(x_2)$

klesající

pro všechny hodnoty $x_1 < x_2$ z $[a, b]$
platí $f(x_1) > f(x_2)$

neklesající

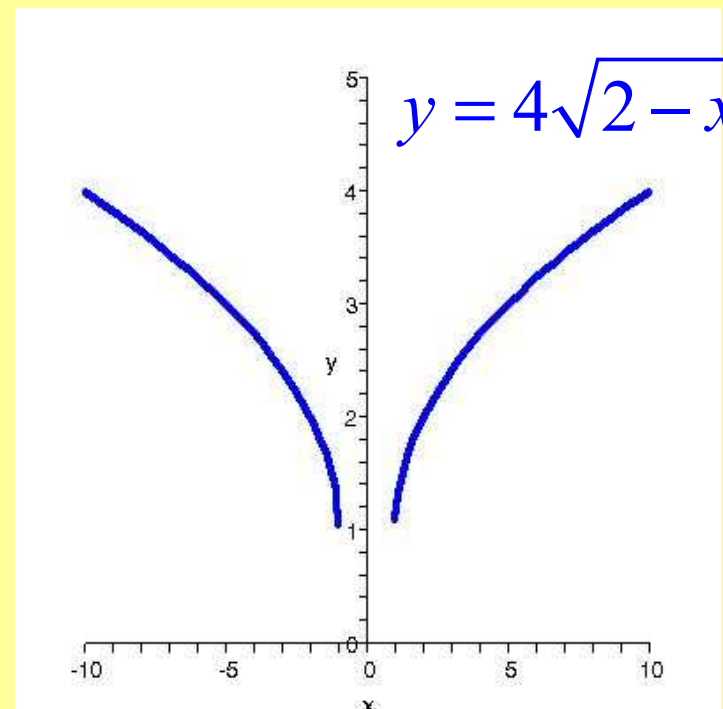
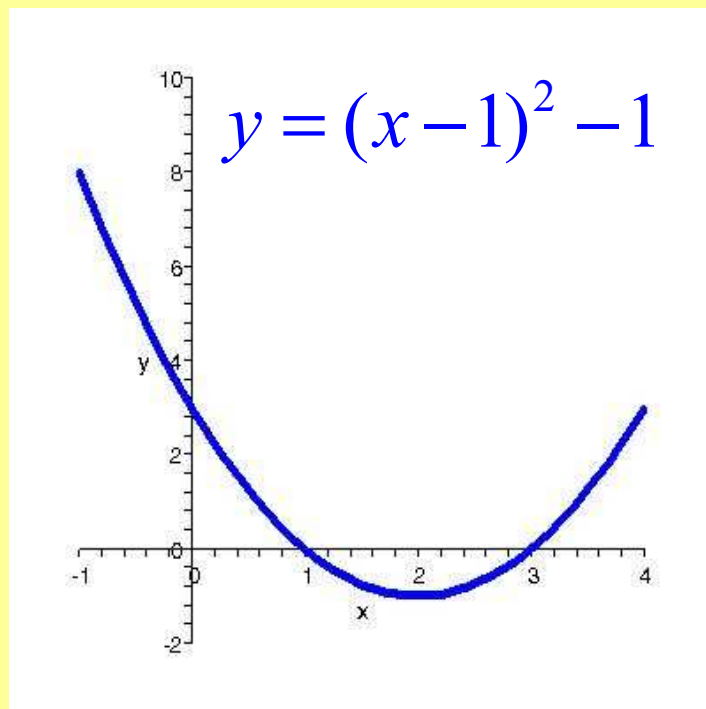
pro všechny hodnoty $x_1 < x_2$ z $[a, b]$
platí $f(x_1) \leq f(x_2)$

nerostoucí

pro všechny hodnoty $x_1 < x_2$ z $[a, b]$
platí $f(x_1) \geq f(x_2)$

Základní vlastnosti funkcí – II

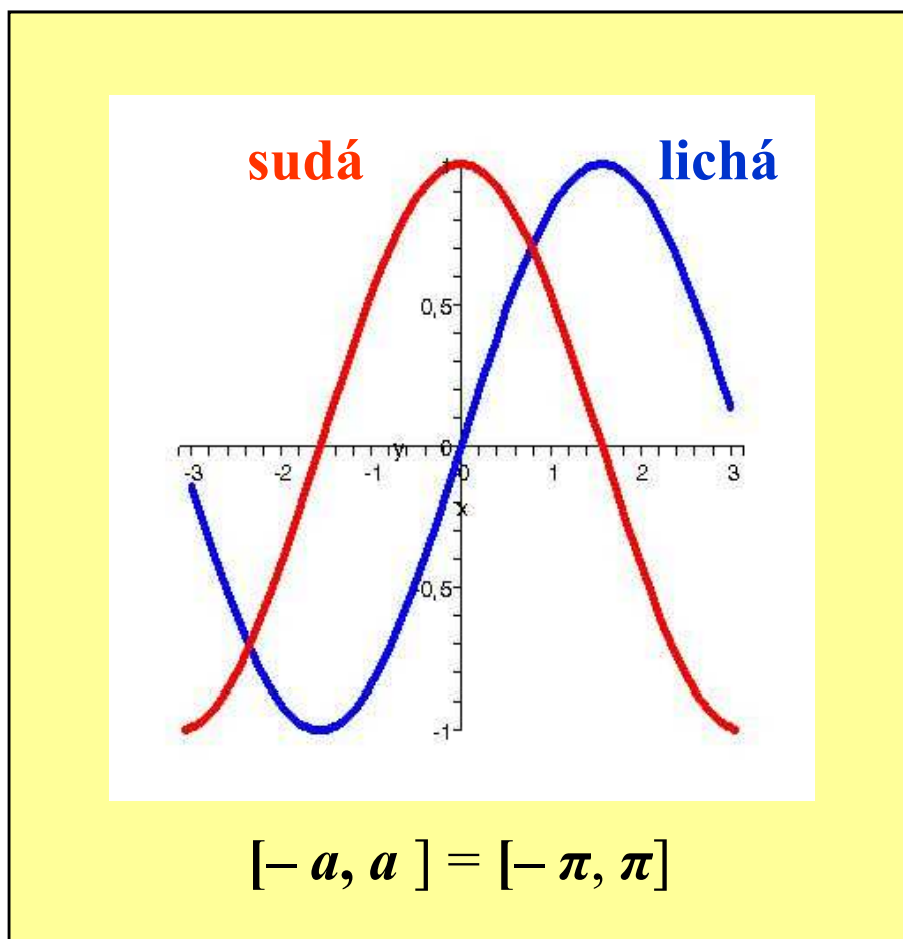
Monotonie na intervalu – B



Úkol: Určete největší možné definiční obory a obory hodnot znázorněných funkcí a intervaly, na kterých jsou tyto funkce rostoucí, resp. klesající.

Základní vlastnosti funkcí – III

Symetrie



funkce na intervalu $[-a, a]$,
(resp. oboru, který spolu s každou
hodnotou x obsahuje také $-x$)

sudá

pro všechny hodnoty x z $[-a, a]$
platí $f(x) = f(-x)$

lichá

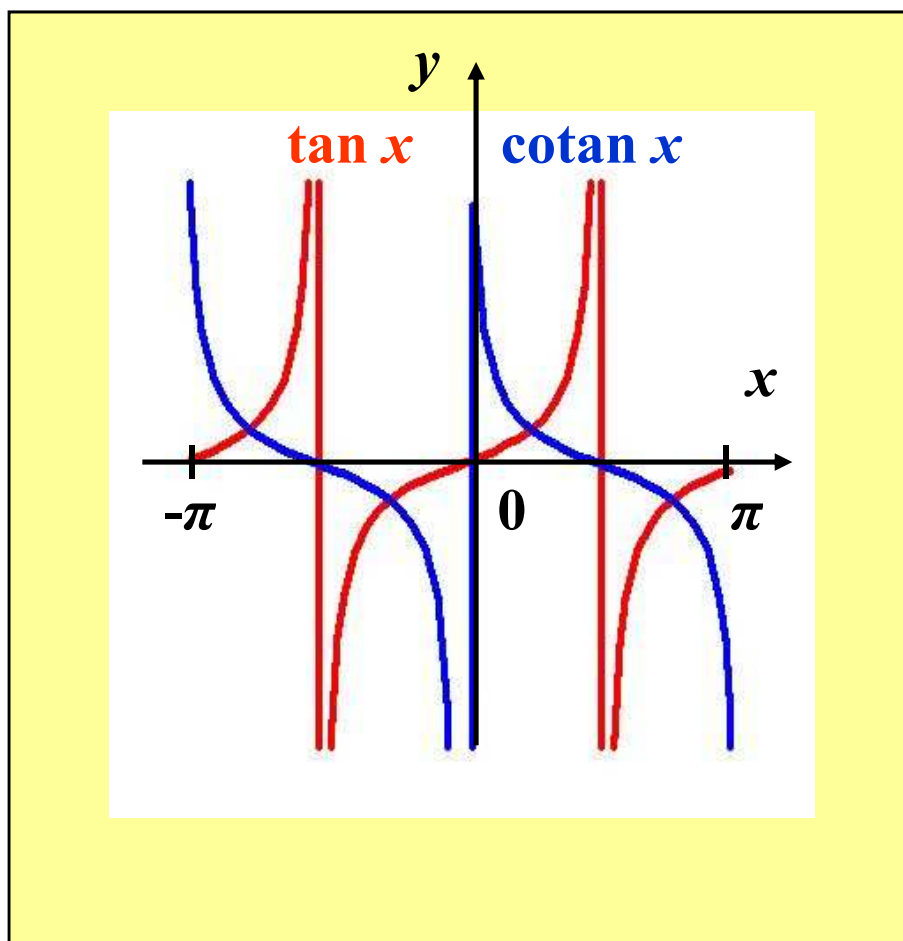
pro všechny hodnoty x z $[-a, a]$
platí $f(x) = -f(-x)$

na obrázku ... $\cos x$ (sudá na $[-\pi, \pi]$)
 $\sin x$ (lichá na $[-\pi, \pi]$)

Úkol: Na kterých intervalech z obrázku (a určete to i obecně) jsou funkce $\cos x$ a $\sin x$ rostoucí, resp. klesající? Jsou tyto funkce rostoucí či klesající na celém $[-\pi, \pi]$?

Základní vlastnosti funkcí – IV

Periodicita



funkce na oboru D , který spolu s každou hodnotou x obsahuje také $x + p, p > 0 \dots$ perioda

periodická

pro všechny hodnoty $x \in D$
platí $f(x) = f(x + p)$

na obrázku ... $\tan x, \cotan x$
(periodické na \mathbf{R} s periodou $p = \pi$)

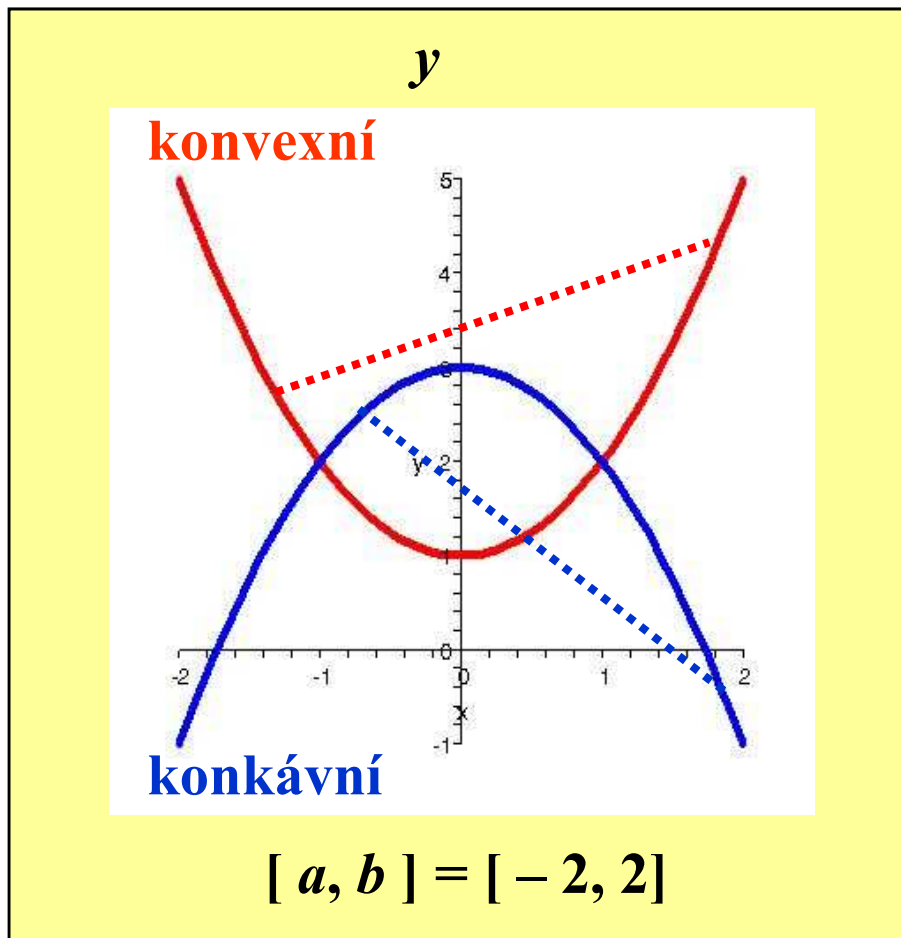
$$D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\} \quad D_f = \mathbf{R} \setminus \{n\pi\}$$

Úkol: Na kterých intervalech jsou $\tan x$ a $\cotan x$ rostoucí, resp. klesající? Na kterých intervalech jsou sudé, resp. liché? Jsou $\sin x$ a $\cos x$ periodické? S jakou periodou?

Základní vlastnosti funkcí – V

Konvexnost - konkávnost

funkce na intervalu $[a, b]$



konvexní

pro všechny hodnoty x_1, x_2 z $[a, b]$
leží graf funkce mezi body $[x_1, f(x_1)]$
a $[x_2, f(x_2)]$ pod jejich přímkou spojnici

konkávni

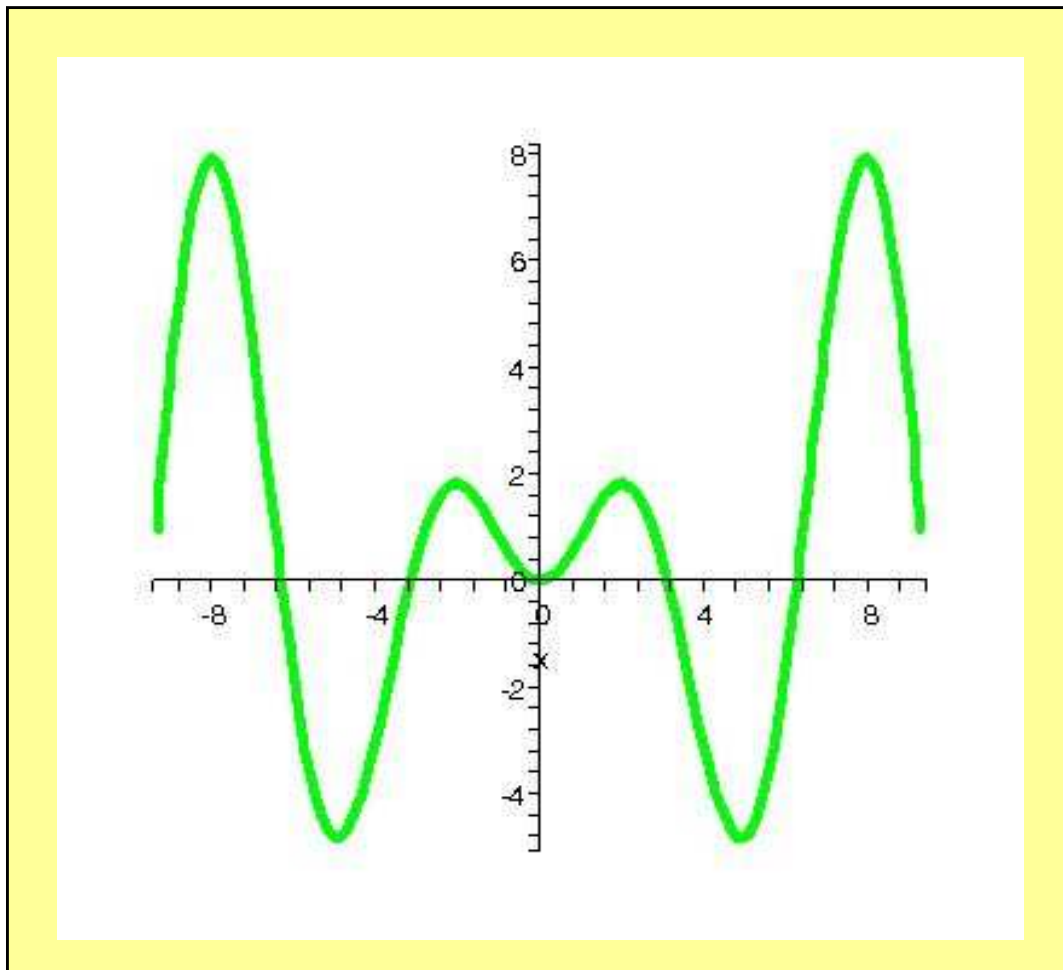
pro všechny hodnoty x_1, x_2 z $[a, b]$
leží graf funkce mezi body $[x_1, f(x_1)]$
a $[x_2, f(x_2)]$ nad jejich přímkou spojnici

na obrázku ... $y = 1 + x^2$, $y = 3 - x^2$

Úkol: U všech předchozích grafů rozhodněte, na kterých intervalech jsou znázorněné funkce konvexní, resp. konkávni.

Základní vlastnosti funkcí – VI

„Komplexnější“ úloha



Funkce je zadána na intervalu $[a, b]$ předpisem

$$y = x \cdot \sin x$$

$$[a, b] = [-3\pi, 3\pi]$$

Úkol: Určete největší možný definiční obor a obor hodnot znázorněné funkce, a intervaly v $[a, b]$, na kterých je rostoucí, resp. klesající, sudá, resp. lichá, konvexní, resp. konkávní. Je tato funkce periodická ?

Elementární funkce - I

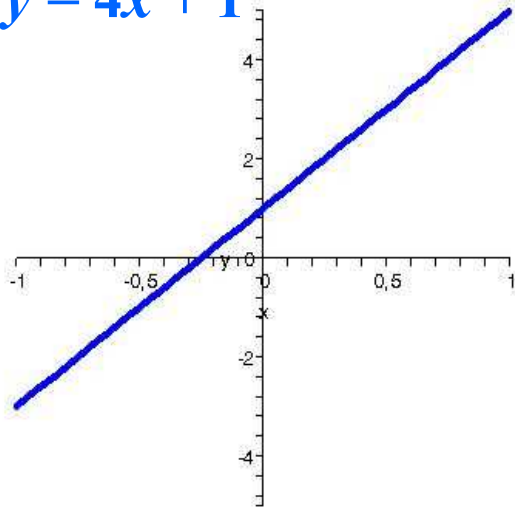
Polynomy (stupně n s reálnými koeficienty)

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

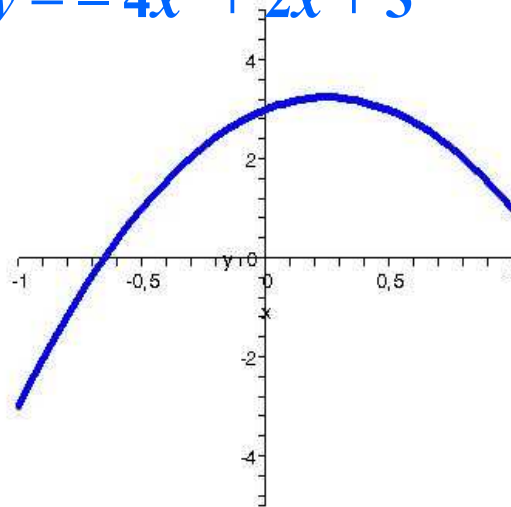
$n = 1$... lineární funkce $y = ax + b$

$n = 2$... kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$

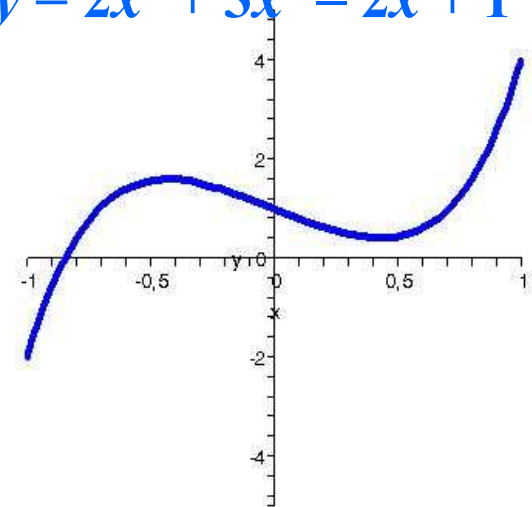
$$y = 4x + 1$$



$$y = -4x^2 + 2x + 3$$



$$y = 2x^5 + 3x^3 - 2x + 1$$



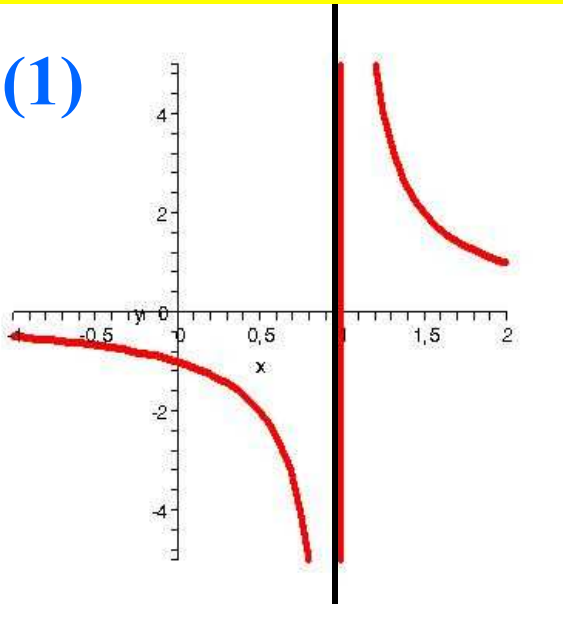
Elementární funkce - II

Racionální lomené funkce

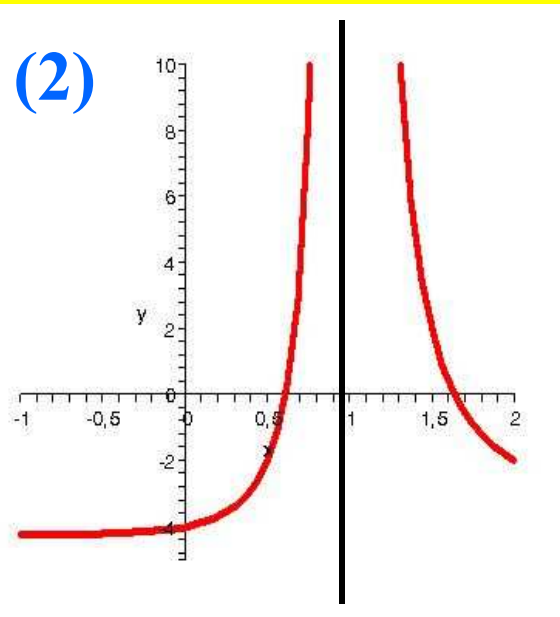
$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

$n = 0, m = 1 \dots$ nepřímá úměra $y = a(x - c)^{-1}$

(1)



(2)



$$(1) y = \frac{1}{x-1}$$

$$(2) y = \frac{-3x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

Elementární funkce – III

Goniometrické funkce ... $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cotan x$

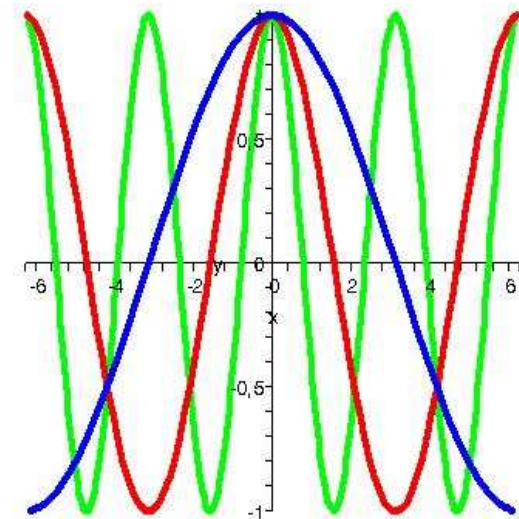
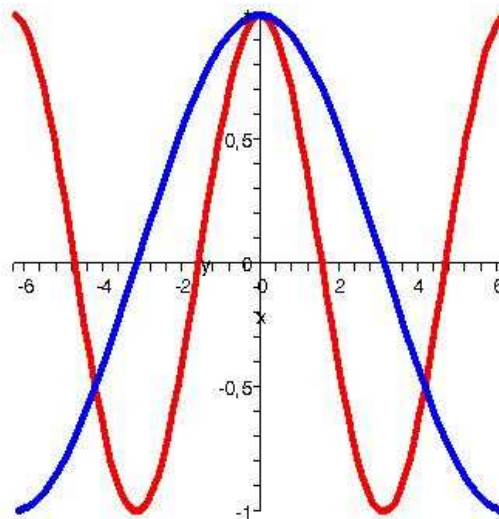
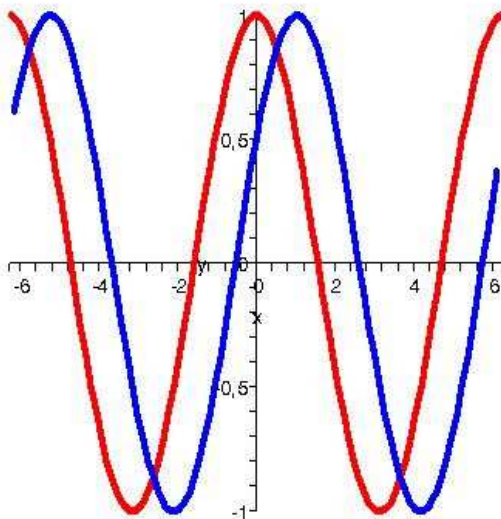
Připomeňte si dosud uvedené vlastnosti těchto funkcí.

Goniometrické funkce obecného lineárního argumentu $A = ax+b$

$$\cos x, \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos x, \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x, \cos \frac{x}{2}, \cos 2x$$



Elementární funkce - IV

Exponenciální a logaritmické funkce

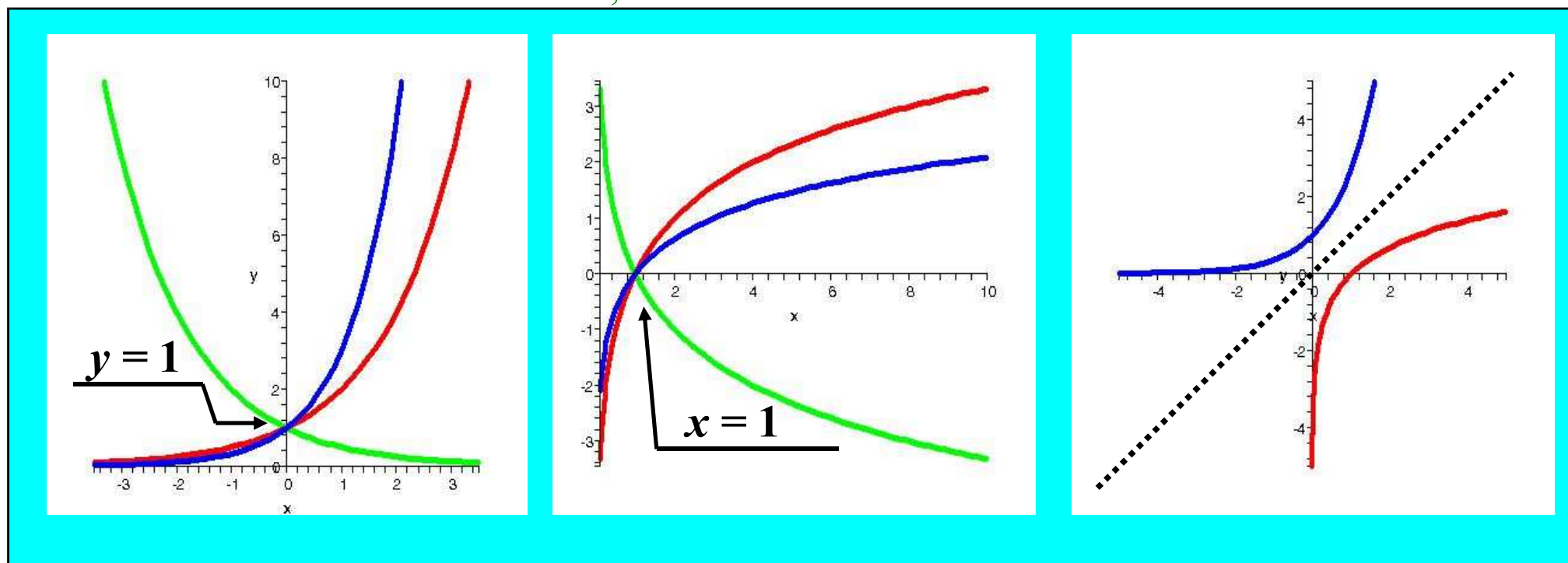
Umocnění pevného základu na hodnotu x a inverzní operace

$$y = z^x, \quad x = \log_z y, \quad z > 0, \quad z \neq 1$$

$$0,5^x, 2^x, 3^x$$

$$\log_{0,5} x, \log_2 x, \log_3 x$$

$$10^x, \log x$$



Příště:

Radiologická fyzika

**základy diferenciálního počtu
derivace a tečny, integrály a plochy
diferenciální rovnice**

podzim 2008, pátá přednáška