Matematika pro radiologické asistenty

7. Řešení dvou jednoduchých diferenciálních rovnic

7.1 Rovnice radioaktivního rozpadu

Statistická podstata procesu rozpadu je vyjádřena tvrzením, že pro vzorek s N radioaktivními jádry je rychlost rozpadu $-dN/dt$ úměrná N

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

Konstanta rozpadu λ má charakteristickou hodnotu pro každý radionuklid. Jak vidíme z rovnice, její rozměr v soustavě SI je převrácená sekunda (s^{-1}). Jak najdeme řešení rovnice? Nechceme-li užívat pojmu integrálu (což by byl standardní postup), zavedeme nejprve novou proměnnou $x = -\lambda t$, v této proměnné má rovnice tvar

$$\frac{dN(x)}{dx} = N(x)$$

Vzpomeneme si, že toto platí právě pro exponenciální funkci, tj.

$$\frac{d\left[\exp(x)\right]}{dx} = \exp(x)$$

Nakonec uvážíme, že derivace součinu konstanty a libovolné funkce je součin této konstanty s derivací funkce. Takže i exponenciála vynásobená konstantou vyhovuje naší rovnici. Máme tedy řešení $N(x) = N_0 \exp(x)$ neboli

$$\boxed{N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)}$$

Označení konstanty indexem nula má důvod: N_0 je počet jader v počátečním čase $t=0$, neboť $N(0) = N_0 \exp(0) = N_0$.

Radionuklidy bývají také charakterizovány **poločasem rozpadu** τ**.** Souvislost této charakteristiky s konstantou rozpadu je jednoduchá. Z definice poločasu je

$$N(\tau) = \frac{1}{2} N(0) = \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad N_0 \exp(-\lambda \tau) = \frac{N_0}{2}$$

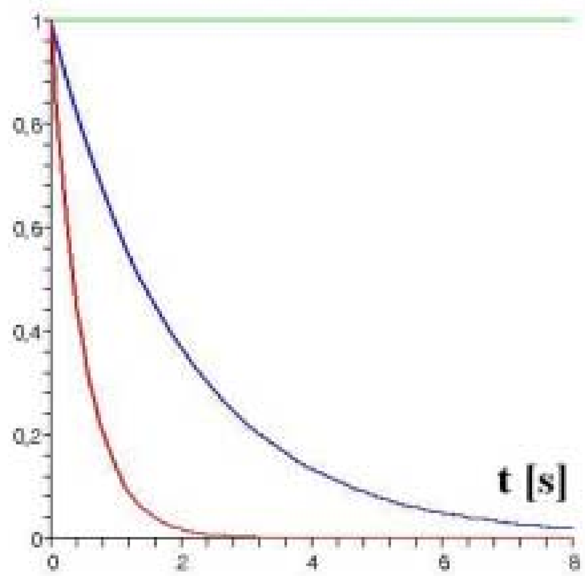
Vykrácení rovnice nenulovou konstantou N_0 a logaritmování dává pak hledaný vztah mezi poločasem rozpadu τ a rozpadovou konstantou λ

$$\boxed{\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

Při logaritmování jsme použili skutečnosti, že logaritmus a exponenciála jsou inversní funkce, tj. $\ln(\exp(x)) = x$. Dále pak toho, že logaritmus mocniny čísla je součinem mocnitele a logaritmu základu, tj. $\ln(x^a) = a \ln(x)$ – v našem případě $x = 2$, $a = -1$. Místo tohoto obecného vzorce jsme mohli uvážit, že logaritmus převrácené hodnoty čísla je roven záporně vzatému logaritmu čísla $\ln(1/x) = -\ln(x)$, což vidíme z rovností

$$0 = \ln(1) = \ln\left(\frac{1}{x} x\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x)$$

Obrázek ukazuje průběh funkce $\exp(-\lambda t)$ pro $\lambda = 0\,\mathrm{s}^{-1}$ (zelená), $\lambda = 1/2\,\mathrm{s}^{-1}$ (modrá) a $\lambda = 2\,\mathrm{s}^{-1}$ (červená).



7.2 Rovnice harmonického oscilátoru

Budeme pro jednoduchost uvažovat jen pohyb na přímce. Předpokládejme, že částice hmotnosti *m* má stabilní rovnovážnou polohu v $x = 0$. Pokud je z této polohy vychýlena, bude přitahována zpět silou tím větší, čím větší je výchylka. V nejjednodušším přiblížení bude závislost síly na výchylce lineární

$$F = -k\,x$$

kde $k > 0$ je konstanta. Znaménko mínus vyjadřuje působení síly směrem k rovnovážné poloze. Je-li částice vychýlena z počátku ve směru orientace osy x ($x > 0$), působí síla v opačném směru ($F<0$) a podobně je-li částice vychýlena z počátku proti směru orientace osy x ($x<0$), působí síla ve směru orientace osy x ($F>0$). Druhý Newtonův zákon pak říká, že

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-k\,x(t)$$

Rovnici vydělíme m a kladnou konstantu k/m označíme ω^2

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\omega^2\,x(t)$$

Této rovnici říkáme rovnice harmonického oscilátoru. Zavedeme si novou proměnnou $\tau=\omega t$, ve které bude mít rovnice tvar

$$\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2}=-x(\tau)$$

Vzpomeneme si, že toto platí jak pro funkci sinus, tak pro funkci kosinus. Rovnici vyhovují také tyto funkce vynásobené konstantu a stejně tak jejich součet (říkáme, že rovnice pro funkci $x(\tau)$ je lineární). Máme tedy řešení $x(\tau)=A\sin(\tau)+B\cos(\tau)$ neboli

$$x(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$$

kde A a B jsou zatím neurčené konstanty. Rovnice radioaktivního rozpadu byla prvního řádu, obsahovala proto jedinou konstantu – tu jsme určili jako počet jader v čase $t=0$. Rovnice harmonického oscilátoru je druhého řádu, budeme tedy pro určení dvou konstant potřebovat dvě podmínky. Jednou z nich může být výchylka v čase $t=0$, kterou si označíme x_0. Protože $\sin 0=0$ a $\cos 0=1$, dostáváme $x(0)=B=x_0$. Druhou podmínkou může být počáteční rychlost, tj. rychlost v čase $t=0$, kterou si označíme v_0. Rychlost je okamžitá časová změna výchylky, tedy derivace funkce $x(t)$. Potřebné derivace dobře známe, můžeme tedy psát

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\omega A\cos(\omega t)-\omega B\sin(\omega t)$$

Po dosazení $\sin 0=0$ a $\cos 0=1$ dostáváme $v(0)=\omega A=v_0$. Konečně tedy můžeme psát

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)+x_0\cos(\omega t)$$

Nad získaným výsledkem je vždy velmi dobré provést co nejvíce kontrolních úvah. U našeho řešení především musí souhlasit rozměry členů. Složitější kontrolou je limitní přechod pro $\omega\to 0$. Potom je totiž výchozí rovnice rovnicí pohybu volné částice a její řešení musí být rovnoměrný pohyb

$$x(t)_{\omega=0} = x_0 + v_0\, t$$

Provedeme potřebné limity (tyto případy známe)

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin(\omega t)}{\omega} = t \quad , \quad \lim_{\omega\to 0}\cos(\omega t) = 1$$

a zjistíme, že naše řešení skutečně přechází pro $\omega \to 0$ na řešení, popisující rovnoměrný pohyb.