

# Radiologická fyzika

Michal Lenc, Jana Musilová  
podzim 2009

# Matematické a fyzikální základy radiologie

Záření: částice a vlny. Spektrum elektromagnetického pole.

Struktura látek. Atomy. Jádra. Zákony zachování.

Matematika: funkce, rovnice.

Matematika: základy diferenciálního počtu.

Matematika: pravděpodobnost, měření a zpracování dat.

Radioaktivita.

Rentgenové záření.

Zdroje a detektory záření.

Interakce záření s hmotou.

Ultrazvuk.

Matematika: principy tomografických metod.

Repetitorium.

# Moderní diagnostické metody

**MRI** – zobrazení pomocí jaderné magnetické resonance

(magnetic resonance imaging)

**CT** – zobrazení pomocí absorpce rentgenového záření

(computer tomography)

**PET** – zobrazení pomocí positronů emitovaných při  $\beta^+$  rozpadu (positron emission tomography)

**USI** – zobrazení pomocí absorpce, odrazu nebo frekvenčního posuvu ultrazvukových vln (ultrasound imaging)

# Co je to za zařízení?



CT



MRI

# Typický problém

Ionizující elektromagnetické záření ( $f > 3 \cdot 10^{15}$  Hz neboli  $\lambda < 100$  nm - UV, rtg a gama) má dostatek energie pro ionizaci atomů tvořících naše tělo. Ionty způsobují tvorbu volných radikálů (H, OH) a vysoce chemicky reaktivních sloučenin ( $\text{H}_2\text{O}_2$ ), které vyvolávají změny biologicky významných molekul (DNA) a vedou k biologickým účinkům jako je kancerogeneze a mutageneze. Čím vyšší je počet fotonů absorbovaných tělem a čím vyšší je energie těchto fotonů, tím vyšší je počet vytvářených volných radikálů, tím vyšší je riziko. **Ale...**

# Kvalita obrazu souvisí s dávkou

Obecně platí, že lepší obraz vyžaduje více fotonů a tím i vyšší dávku.



# Něco jaderné terminologie

Pokud se o jádra atomů zajímáme jen z hlediska různých jaderných vlastností, nikoli jako o části atomů, nazýváme je obecně **nuklidy**.

Jádro se skládá z protonů a neutronů. Počet protonů v jádře (**atomové číslo** nebo také **protonové číslo** jádra) je označováno symbolem **Z**; počet neutronů (**neutronové číslo**) symbolem **N**. Celkovému počtu neutronů a protonů v jádře říkáme **hmotnostní číslo A**. Máme-li na mysli jak neutrony, tak protony, používáme společného pojmenování **nukleony**.

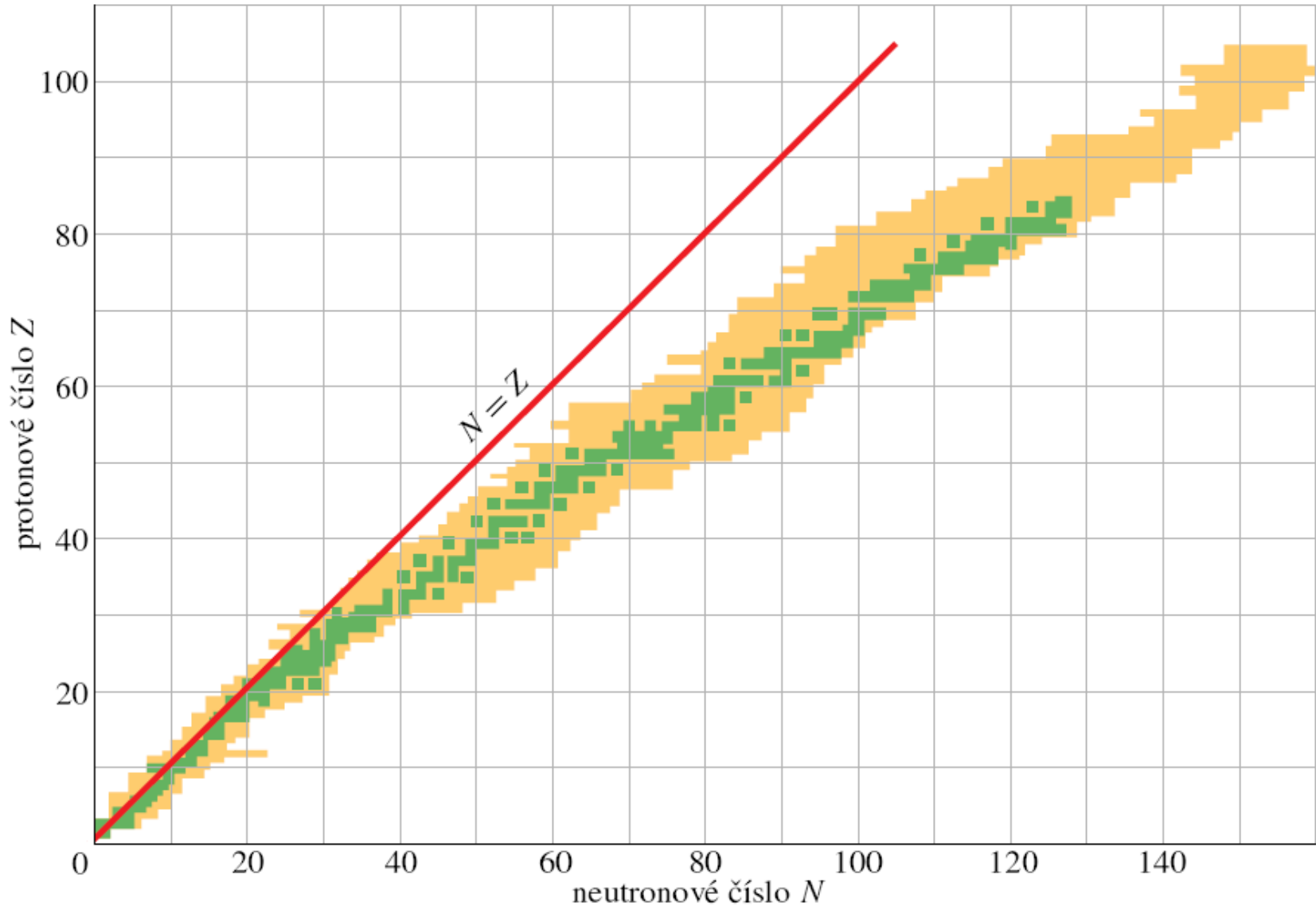
$$A = Z + N$$

# Značení nuklidů

NUKLID	$Z$	$N$	$A$	
${}^1\text{H}$	1	0	1	<b>A</b> <b>X</b>
${}^7\text{Li}$	3	4	7	
${}^{31}\text{P}$	15	16	31	
${}^{84}\text{Kr}$	36	48	84	
${}^{120}\text{Sn}$	50	70	120	
${}^{157}\text{Gd}$	64	93	157	<b>A</b> <b>X</b> <b>Z</b>
${}^{197}\text{Au}$	79	118	197	
${}^{227}\text{Ac}$	89	138	227	
${}^{239}\text{Pu}$	94	145	239	



# Známé nuklidy (zeleně stabilní)



# Nuklidy v okolí zlata

Diagram showing the isotopes of elements near gold (Z=79) and the line of stability (A=198).

protonové číslo Z	115	116	117	118	119	120	121
82	<sup>197</sup> Pb 43 min	<sup>198</sup> Pb 2,4 h	<sup>199</sup> Pb 1,5 h	<sup>200</sup> Pb 21,5 h	<sup>201</sup> Pb 9,33 h	<sup>202</sup> Pb 53 000 y	<sup>203</sup> Pb 2,16 d
81	<sup>196</sup> Tl 1,84 h	<sup>197</sup> Tl 2,83 h	<sup>198</sup> Tl 5,3 h	<sup>199</sup> Tl 7,4 h	<sup>200</sup> Tl 26,1 h	<sup>201</sup> Tl 72,9 h	<sup>202</sup> Tl 12,2 d
80	<sup>195</sup> Hg 9,5 h	<sup>196</sup> Hg 0,15 %	<sup>197</sup> Hg 64,1 h	<sup>198</sup> Hg 10,0 %	<sup>199</sup> Hg 16,9 %	<sup>200</sup> Hg 23,1 %	<sup>201</sup> Hg 13,2 %
79	<sup>194</sup> Au 39,4 h	<sup>195</sup> Au 186 d	<sup>196</sup> Au 6,18 d	<sup>197</sup> Au 100 %	<sup>198</sup> Au 2,69 d	<sup>199</sup> Au 3,14 d	<sup>200</sup> Au 48,4 min
78	<sup>193</sup> Pt 60 y	<sup>194</sup> Pt 32,9 %	<sup>195</sup> Pt 33,8 %	<sup>196</sup> Pt 25,3 %	<sup>197</sup> Pt 18,3 h	<sup>198</sup> Pt 7,2 %	<sup>199</sup> Pt 30,8 min
77	<sup>192</sup> Ir 73,8 d	<sup>193</sup> Ir 62,7 %	<sup>194</sup> Ir 19,2 h	<sup>195</sup> Ir 2,8 h	<sup>196</sup> Ir 52 s	<sup>197</sup> Ir 5,8 min	<sup>198</sup> Ir ≈ 8 s
76	<sup>191</sup> Os 15,4 d	<sup>192</sup> Os 41,0 %	<sup>193</sup> Os 30,5 h	<sup>194</sup> Os 6,0 y	<sup>195</sup> Os 6,5 min	<sup>196</sup> Os 35 min	—

neutronové číslo N

# „Klasické“ třídění na $\alpha$ , $\beta$ a $\gamma$ rozpad

## $\alpha$ rozpad

Radium se změní na radon při emisi  $\alpha$  částice (jádra helia)



## obecně

Nuklid X se změní na nuklid Y při emisi  $\alpha$  částice (jádra helia)



# „Klasické“ třídění na $\alpha$ , $\beta$ a $\gamma$ rozpad

## $\beta$ rozpad

Kobalt se změní na nikel (v nabuzeném stavu) při emisi elektronu a antineutrína



## obecně

Nuklid X se změní na nuklid Y při emisi elektronu a antineutrína



# „Klasické“ třídění na $\alpha$ , $\beta$ a $\gamma$ rozpad

## $\gamma$ rozpad

Nikl v nabuzeném stavu přejde do základního stavu při emisi dvou fotonů



## obecně

Nuklid v nabuzeném stavu  $X^*$  přejde do základního stavu  $X$  při emisi dvou fotonů



# Další typy přechodů

## $\beta^+$ rozpad

Dusík se změní na uhlík při emisi pozitronu a neutrina



## obecně

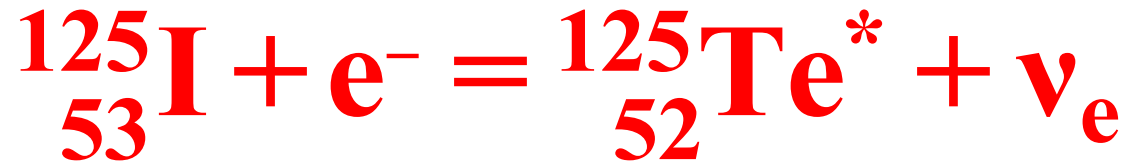
Nuklid X se změní na nuklid Y při emisi pozitronu a neutrina



# Další typy přechodů

## Elektronový záchyt

Jod se přemění na tellur v nabuzeném stavu při emisi neutrina



## obecně

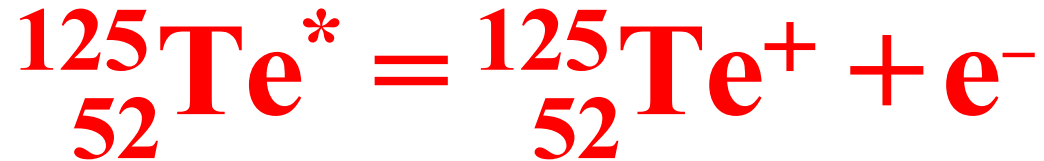
Elektron z vnitřní hladiny „se sloučí“ s protonem jádra na neutron při emisi neutrina



# Další typy přechodů

## Vnitřní konverse

Tellur z nabuzeného stavu přejde do jedenkrát ionizovaného stavu při emisi elektronu



## obecně

Prvek uvolní energii nabuzeného stavu emisí vnitřního elektronu





# Jak podrobný popis je potřeba pro porozumění jevu?

Dva příklady:

1) Stručný:

Jak je popisován na různých úrovních  $\beta$  rozpad

2) Podrobnější:

Proč jsou při  $\alpha$  rozpadu emitovány právě nuklidy helia

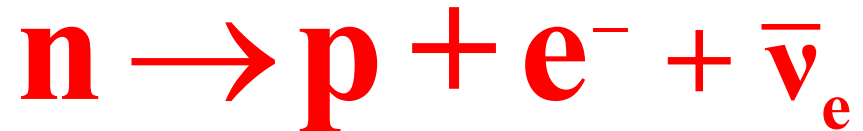
# Popis $\beta$ - rozpadu

fosfor se změní na síru  
při emisi elektronu a neutrina



Zákon zachování počtu nukleonů ( $32=32$ ) a elektrického náboje  
( $15=16-1$ )

neutron se změní na proton  
při emisi elektronu a  
elektronového antineutrina



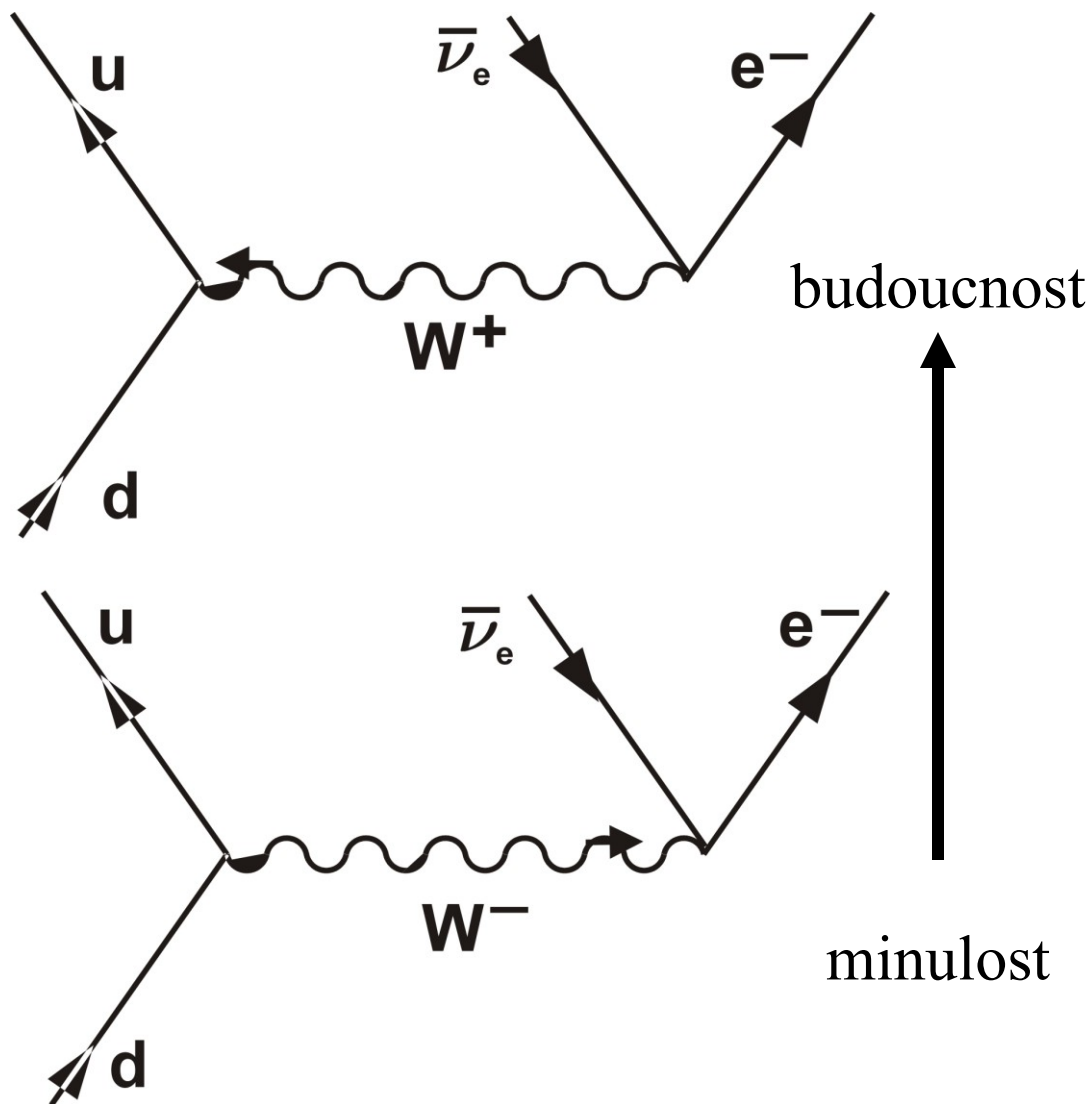
Zákon zachování baryonového ( $1=1$ ), leptonového ( $0=1-1$ )  
a elektrického náboje ( $0=1-1$ )

d-kvark se změní na u-kvark  
při emisi elektronu a  
elektronového antineutrina



Zákon zachování baryonového ( $1/3=1/3$ ), leptonového ( $0=1-1$ )  
a elektrického náboje ( $-1/3=2/3-1$ )

# Popis $\beta$ - rozpadu



V každém vrcholu  
Feynmanova diagramu  
jsou splněny zákony  
zachování:

**baryonového náboje**  
**leptonového náboje**  
**elektrického náboje**  
**energie a hybnosti**

# Einsteinovy vztahy I

Vztah mezi energií  $E$  a hmotností  $m$  částice

$$E = m c^2$$

Pokud se částice pohybuje rychlostí velikosti  $v$ , platí

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

# Einsteinovy vztahy II

Vztah mezi energií fotonu  $E$  a frekvencí elmg. záření  $\omega$

$$E = \hbar \omega$$

Vztah mezi energií fotonu  $E$  a vlnovou délkou elmg. záření  $\lambda$

$$E = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

# Fundamentální konstanty

Rychlost světla ve vakuu  $c$

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$

Planckova konstanta  $\hbar$

$$\hbar = 571\,628(53) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

Elementární náboj  $e$

$$e = 1,602\,176\,487(40) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Newtonova gravitační konstanta  $G$

$$G = 6,674\,28(67) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

# Jednotky pro vyjádření hmotnosti

V soustavě SI je touto jednotkou kilogram. Díky Einsteinově vztahu mezi energií a hmotností částice v klidu můžeme vyjadřovat hmotnost pomocí jednotek pro energii nebo si zvolit nějakou hmotnost jako normál, se kterým budeme ostatní hmotnosti porovnávat. Pro atomovou a jadernou fyziku je vhodnou jednotkou energie elektronvolt (eV) a jeho násobky, tj. 1 eV je energie získaná nebo ztracená elementárním nábojem při překonání potenciálového rozdílu 1 V. Hmotnosti se většinou vyjadřují v  $\text{MeV}/c^2$  ( $1 \text{ MeV}=10^6 \text{ eV}$ ) nebo v atomových jednotkách hmotnosti u.

$$1 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 1,782\,661\,758(44) \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} m({}^{12}\text{C}) = 1,660\,538\,782(83) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

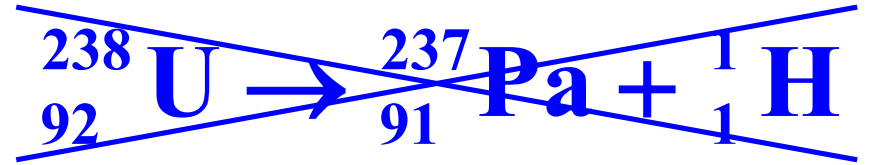
# Hmotnostní přebytek nuklidu

$$\frac{\Delta}{u} = \left( \frac{m}{u} - A \right)$$

	Z	A	$\Delta/u$
proton	1	1	0,007 276
neutron	0	1	0,008 665
deuteron	1	2	0,013 553
triton	1	3	0,015 501
helion	2	3	0,014 932
$\alpha$ částice	2	4	0,001 506



# Přirozený $\alpha$ rozpad uranu



atom	Z	A	$m[\text{u}]$
uran	92	238	238,050 79
protaktinium	91	237	237,051 21
thorium	90	234	234,043 63
helium	2	4	4,002 60
vodík	1	1	1,007 83

# Spontánní $\alpha$ rozpad uranu

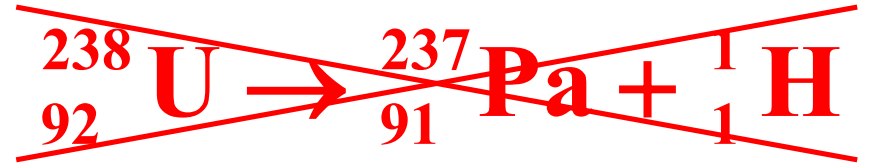


$$\Delta m c^2 =$$

$$(238,050\,79 - 234,043\,63 - 4,002\,60) \text{u} c^2 =$$

$$0,00456 \text{u} c^2 = \boxed{4,25 \text{MeV}}$$

Spontánní rozpad nastává, poločas rozpadu je  $4,47 \cdot 10^9$  let.



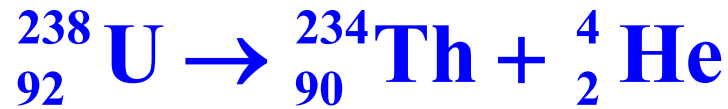
$$\Delta m c^2 =$$

$$(238,050\,79 - 237,051\,21 - 1,007\,83) \text{u} c^2 =$$

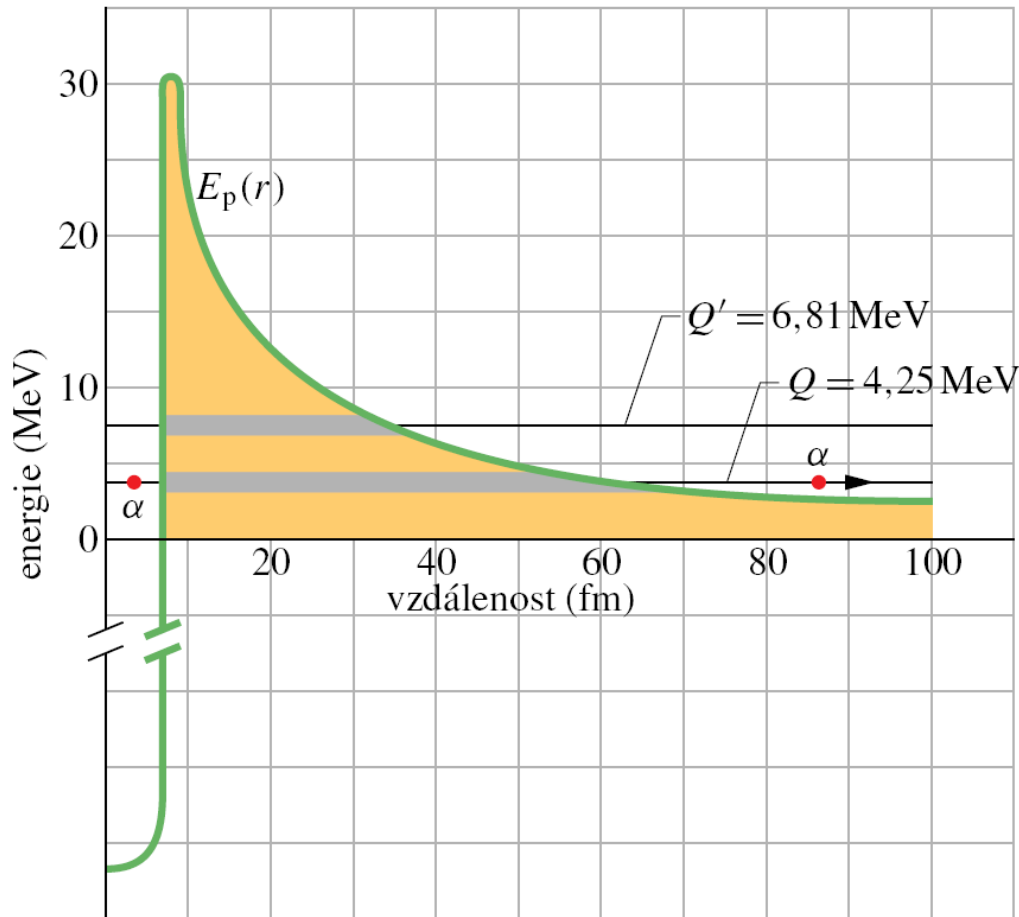
$$-0,00825 \text{u} c^2 = \boxed{-7,68 \text{MeV}}$$

Spontánní rozpad nemůže nastat.

# Tunelování při $\alpha$ rozpadu uranu

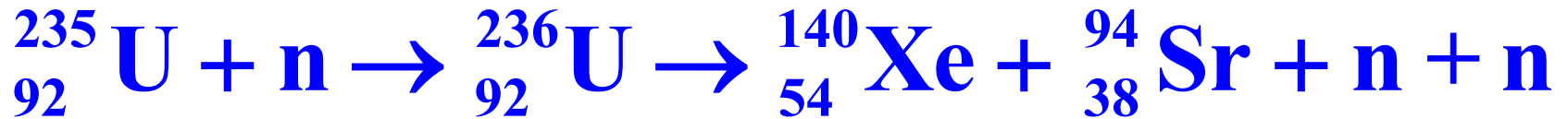


$4,5 \cdot 10^9$  let



9,1 min

# Štěpení uranu

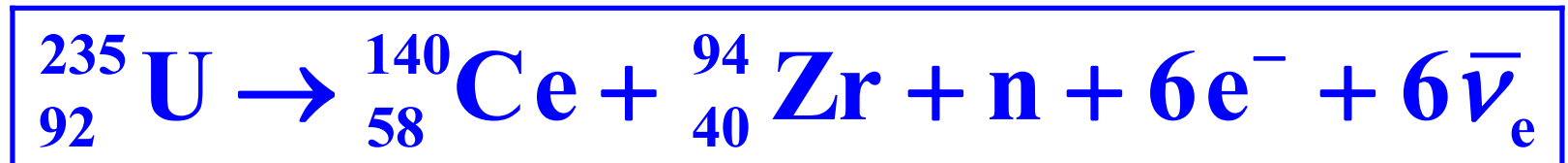


$${}^{140}\text{Xe} \rightarrow {}^{140}\text{Cs} \rightarrow {}^{140}\text{Ba} \rightarrow {}^{140}\text{La} \rightarrow {}^{140}\text{Ce}$$

$\tau$	14 s	64 s	13 d	40 h	stabilní
$Z$	54	55	56	57	58

$${}^{94}\text{Sr} \rightarrow {}^{94}\text{Y} \rightarrow {}^{94}\text{Zr}$$

$\tau$	75 s	19 min	stabilní
$Z$	38	39	40



# Záření: částice nebo vlny?

Obecná odpověď je „ani částice, ani vlny“ nebo „někdy částice, někdy vlny“.

Elektrony, pozitrony, protony, neutrony, ...nebo vlnové funkce

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Hmotnost, rychlost,  
impuls (= hybnost),  
energie

$$\lambda = \frac{2\pi \hbar}{|\vec{p}|} = 2\pi f = \frac{E}{\hbar}$$

Vlnová délka,  
frekvence

# Záření: částice nebo vlny?

Obecná odpověď je „ani částice, ani vlny“ nebo „někdy částice, někdy vlny“.

Elektromagnetické vlnění nebo fotony

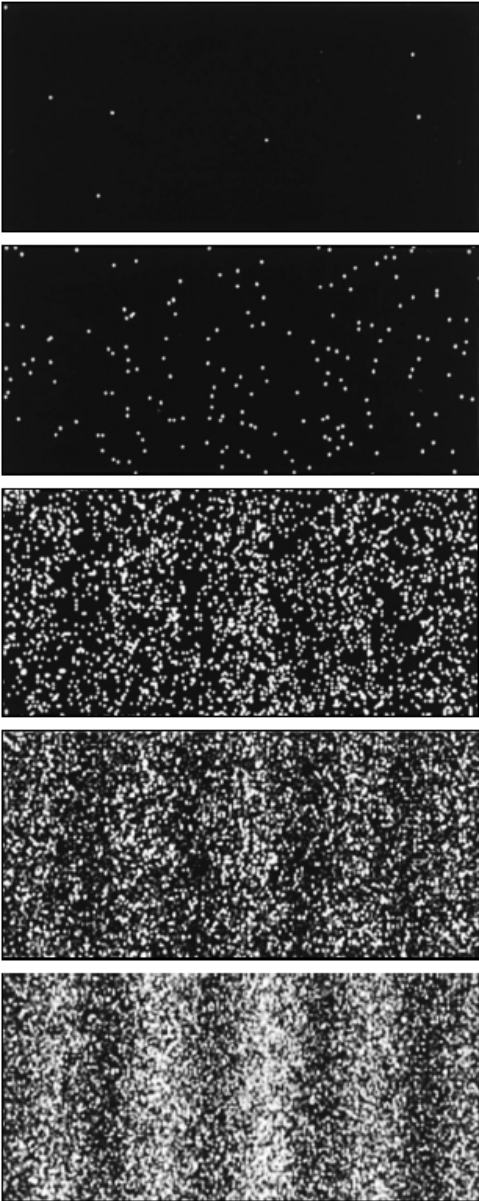
$$\lambda, \omega = 2\pi f$$

Vlnová délka,  
frekvence

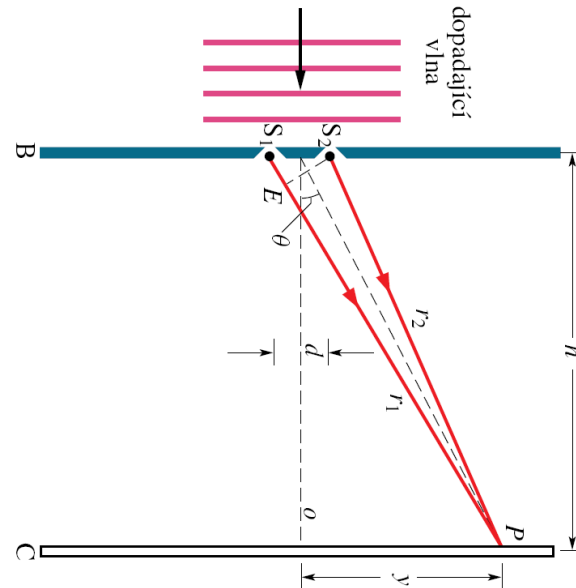
$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}, \quad E = \hbar\omega$$

Impuls ( = hybnost ),  
energie

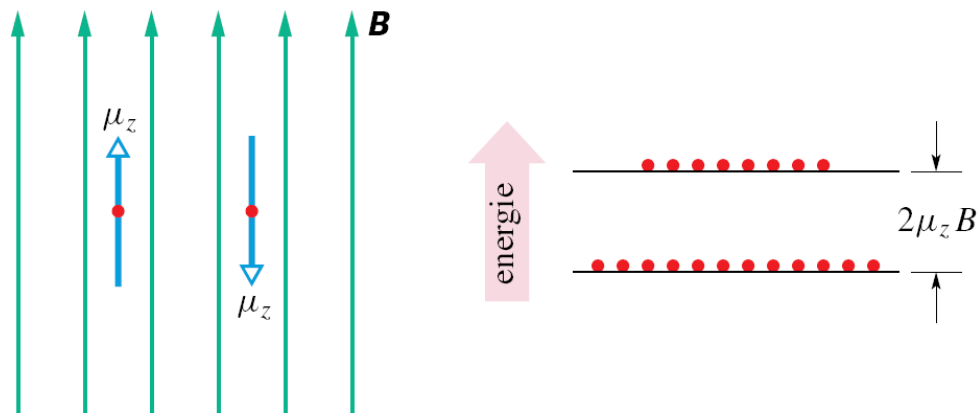
# Záření: částice nebo vlny?



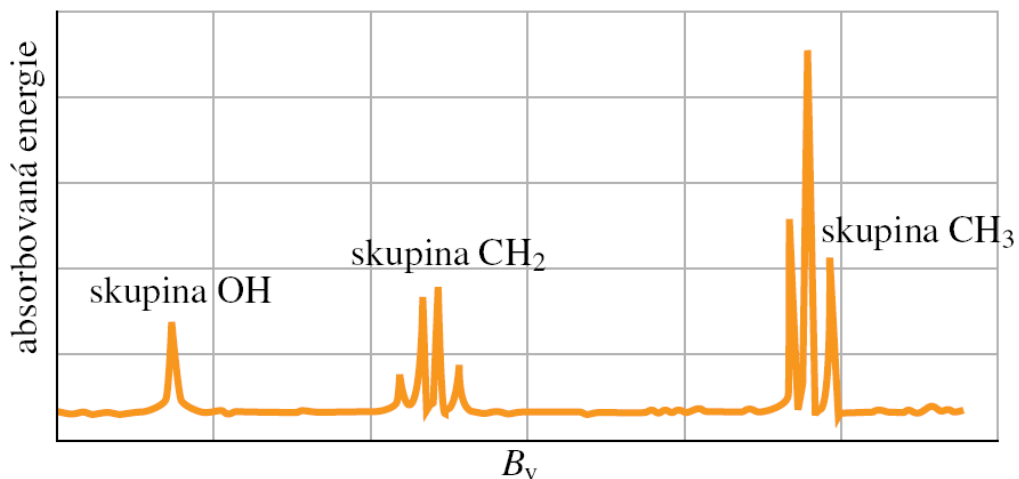
Interference je jistě projev vlnových vlastností. Ale podívejme se, jak se takový typický interferenční obrazec postupně vytváří. Jde o známou Youngovu interferenci na dvojštěrbině (v tomto případě ne se světelnou, ale elektronovou vlnou). Obrázky vytváří postupně 7, 100, 3000, 20000 a 70000 elektronů.



# Příklad: jaderná magnetická rezonance

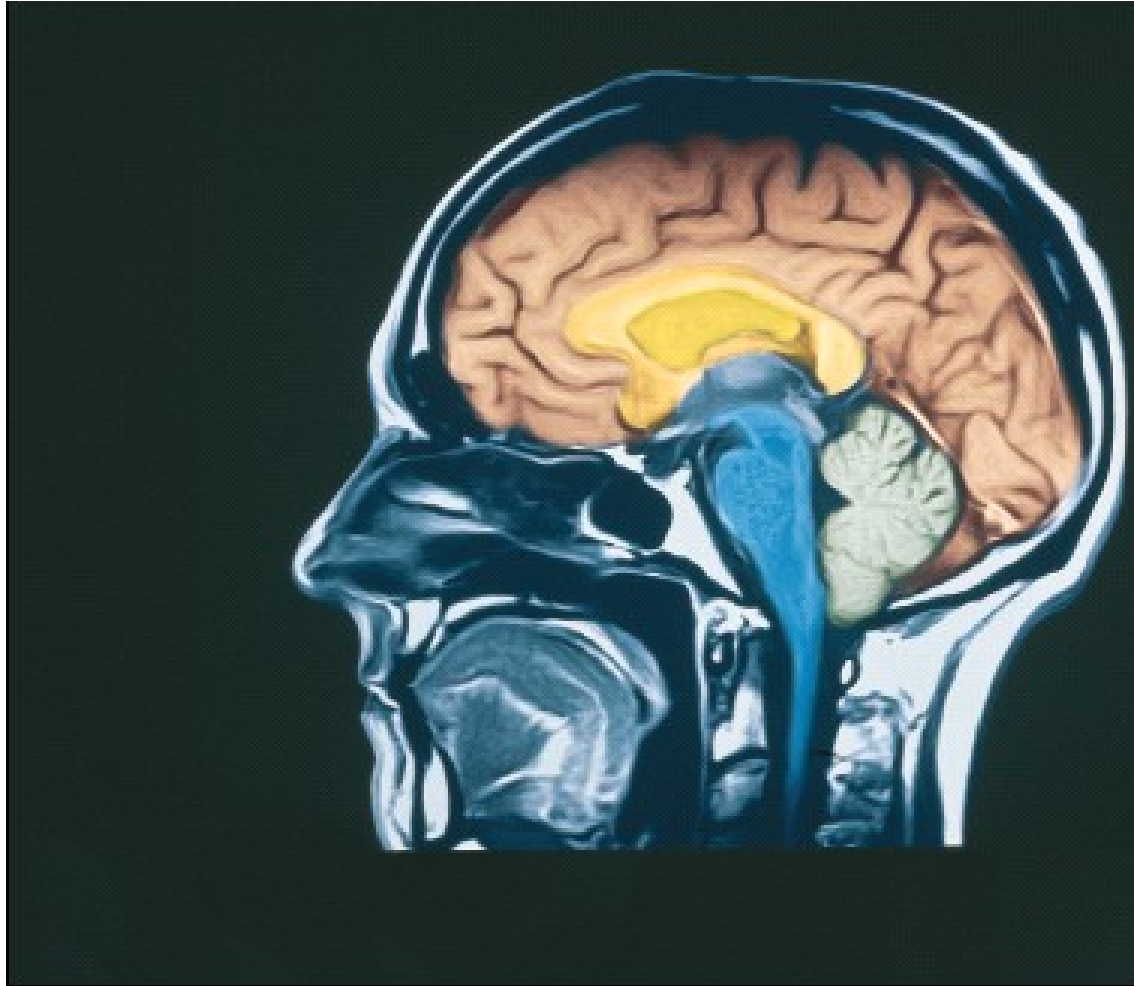


$$\hbar \gamma \cdot (B_{\text{vnější}} + B_{\text{vnitřní}})$$





# Příklad: jaderná magnetická rezonance



# Příklad: jaderná magnetická rezonance

Kapka vody je vložena do stálého magnetického pole  $\mathbf{B}$  o velikosti 1,80 T a střídavého elektromagnetického pole takové frekvence, aby došlo k překlápění spinů protonů. Složka  $\mu_z$  magnetického dipólového momentu protonu ve směru vektoru  $\mathbf{B}$  má velikost  $1,41 \cdot 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$ . Předpokládejme, že lokální magnetické pole můžeme proti  $\mathbf{B}$  zanedbat. Jaká musí být frekvence  $f$  a vlnová délka  $\lambda$  střídavého magnetického pole?

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (41.13) plyne

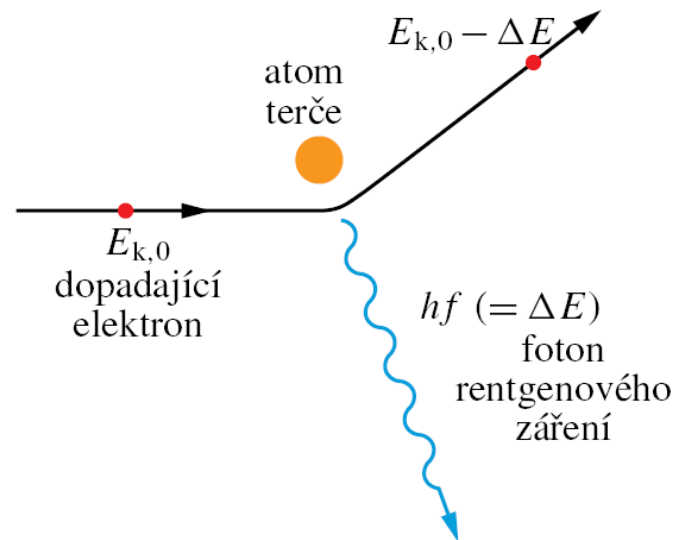
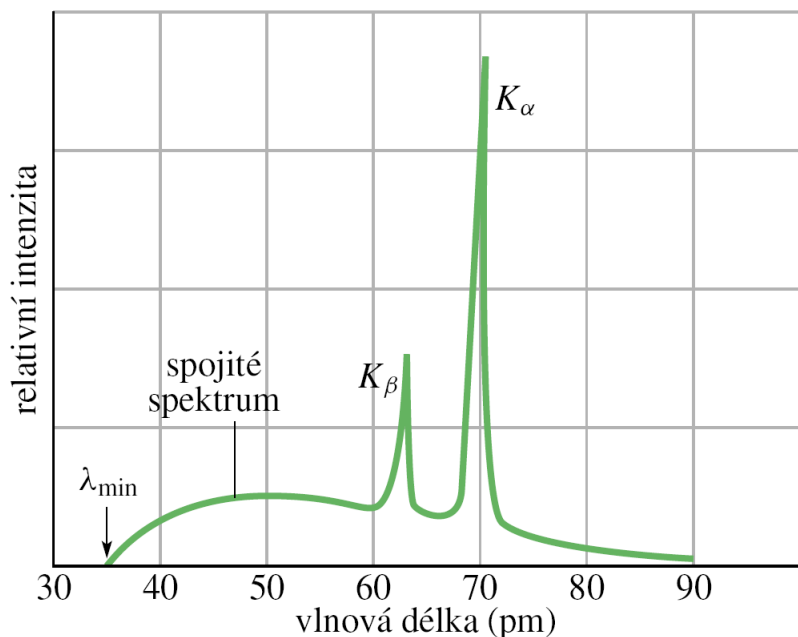
$$\begin{aligned} f &= \frac{2\mu_z B}{h} = \frac{2(1,41 \cdot 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1})(1,80 \text{ T})}{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})} = \\ &= 7,66 \cdot 10^7 \text{ Hz} = 76,6 \text{ MHz}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Odpovídající vlnová délka je

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{(3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})}{(7,66 \cdot 10^7 \text{ Hz})} = 3,92 \text{ m}. \quad (\text{Odpověď})$$

Tyto hodnoty frekvence a vlnové délky leží v krátkovlnné rádiové oblasti elektromagnetického spektra.

# Příklad: rentgenové záření



Svazek elektronů o energii 35,0 keV dopadá na molybdenový terč a vytváří tak rentgenové záření, jehož spektrum je znázorněno na obr. 41.15.

(a) Jaká je prahová vlnová délka?

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (41.15) plyne

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} &= \frac{hc}{E_{k,0}} = \frac{(4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})}{(35,0 \cdot 10^3 \text{ eV})} = \\ &= 3,55 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 35,5 \text{ pm}. \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$