Radiologická fyzika

základy diferenciálního počtu

derivace a tečny, integrály a plochy

diferenciální rovnice

podzim 2009, čtvrtá přednáška

Derivace a tečny

aneb

matematika

„libovolně malých“ změn

Nejen velké, ale i malé změny „jsou život“
aneb
opravdu potřebujeme diferenciální počet?

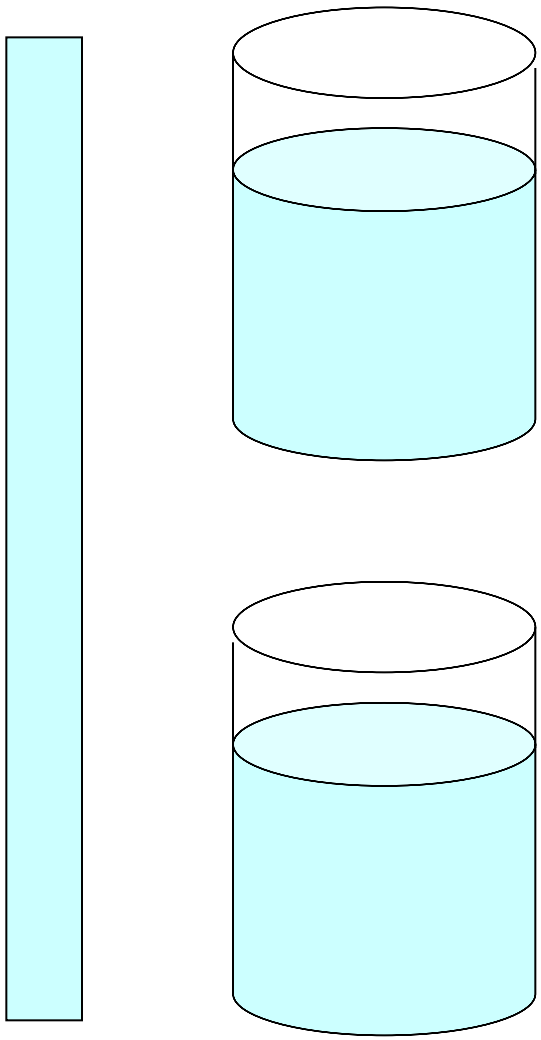
Zkuste si představit situaci: Sedíte v místnosti, kde tikají hodiny. Za chvíli je nevnímáte. Ale hned si uvědomíte, kdyby se zastavily.

Nebo: Máte dlaň položenou na stole v klidu. Za chvíli nic nehmatáte. Abyste hmat „oživili“, musíte prsty po stole posunout.

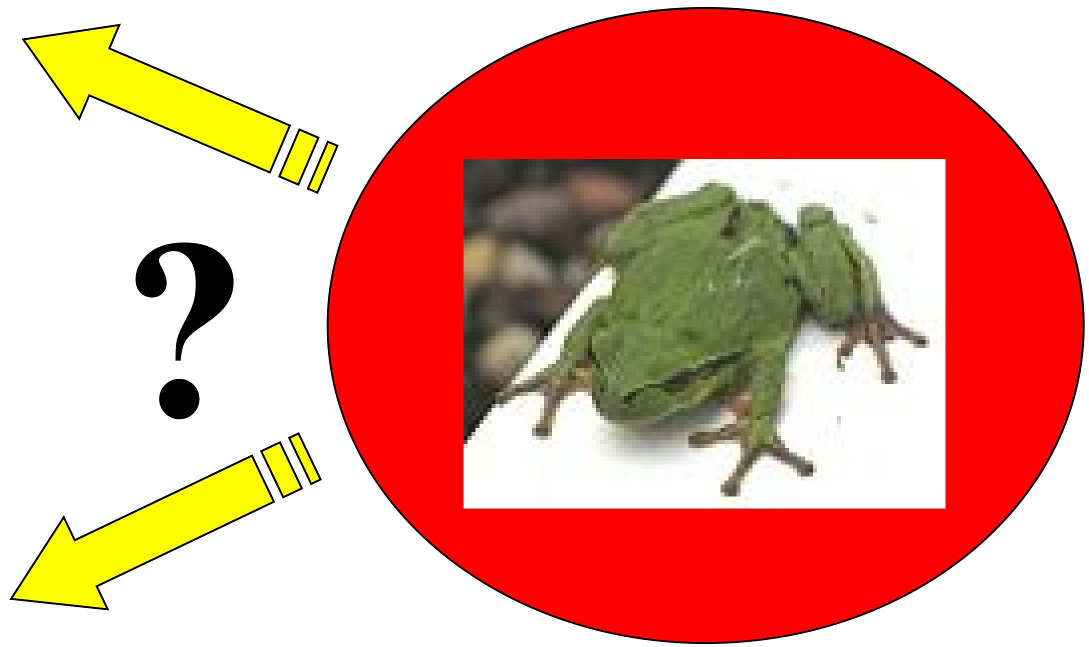
Organismus reaguje na časovou změnu.

Abychom jeho chování (a další jevy související se změnami) pochopili, potřebujeme aparát k počítání s malými změnami.

Batesonův pokus se žábou



rychlé zahřívání nádoby s vodou a žábou:
žába změnu pozná a vyskočí



?

pomalé zahřívání nádoby s vodou a žábou:
žába změnu nepozná a uvaří se

Batesonův zákon

Bateson – Ehrenberg

Organismus reaguje na časovou změnu (derivaci) vnímaných počitků.

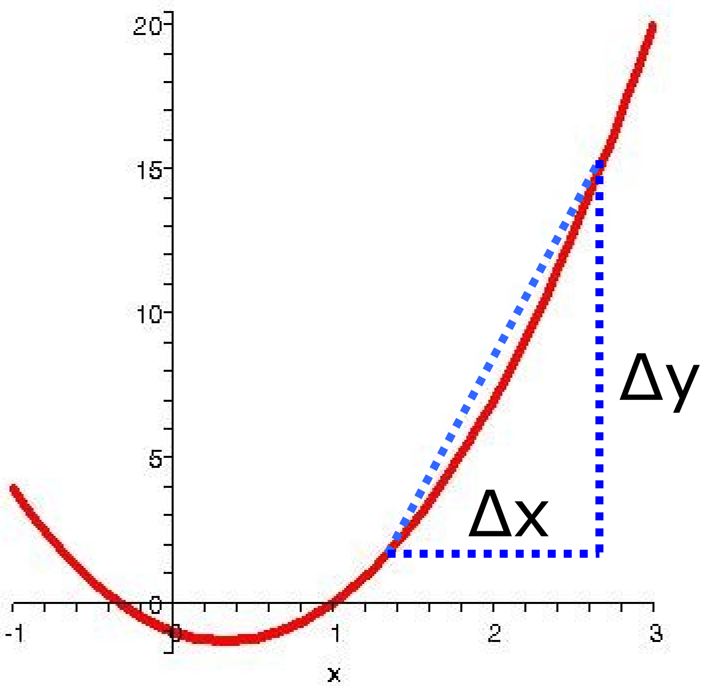
„Matematizace“:

P … signál, podnět

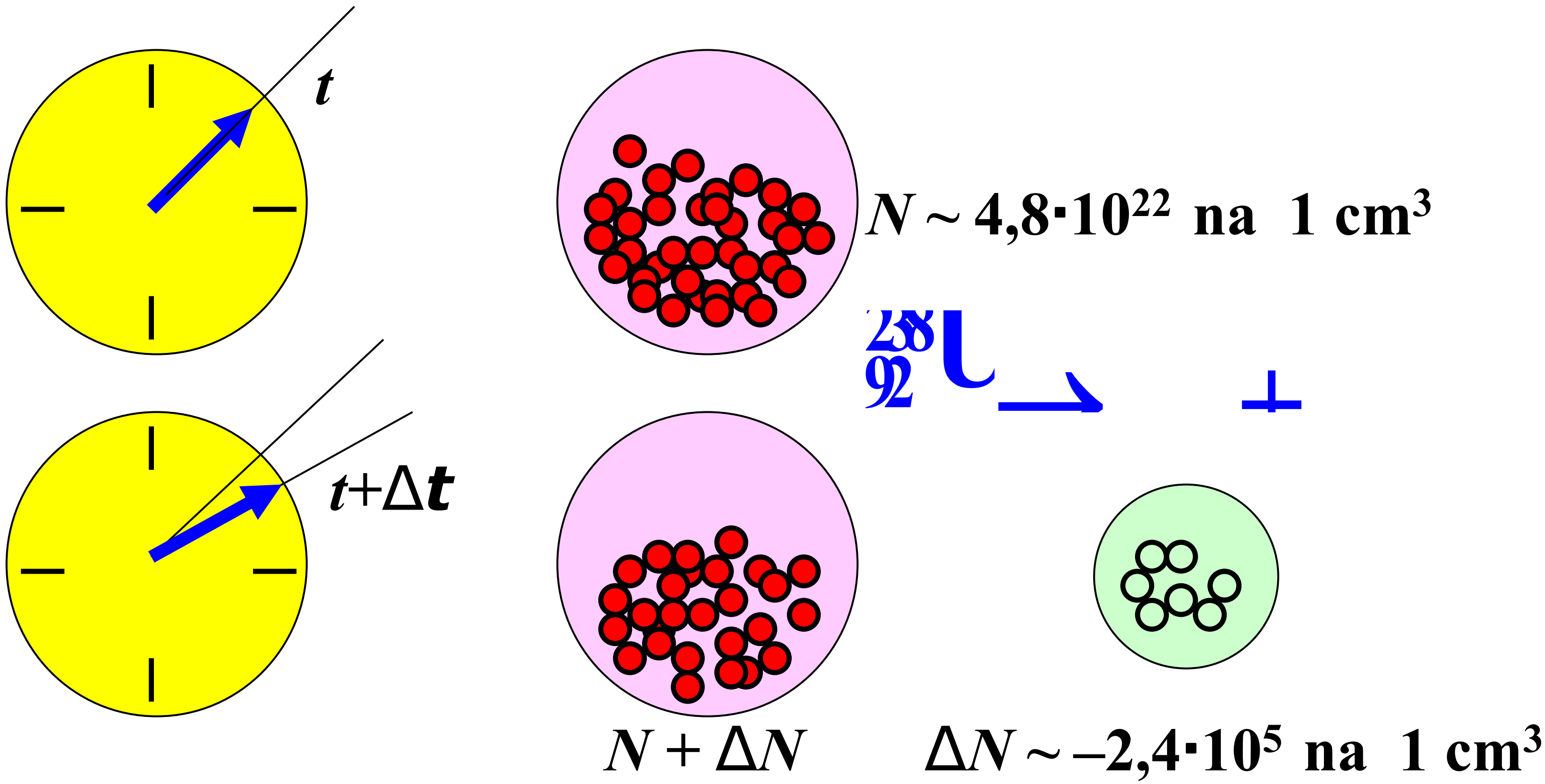
(vnímaný počitek)

R **…** odezva, reakce

$$\langle R \rangle = \Lambda \cdots dP$$

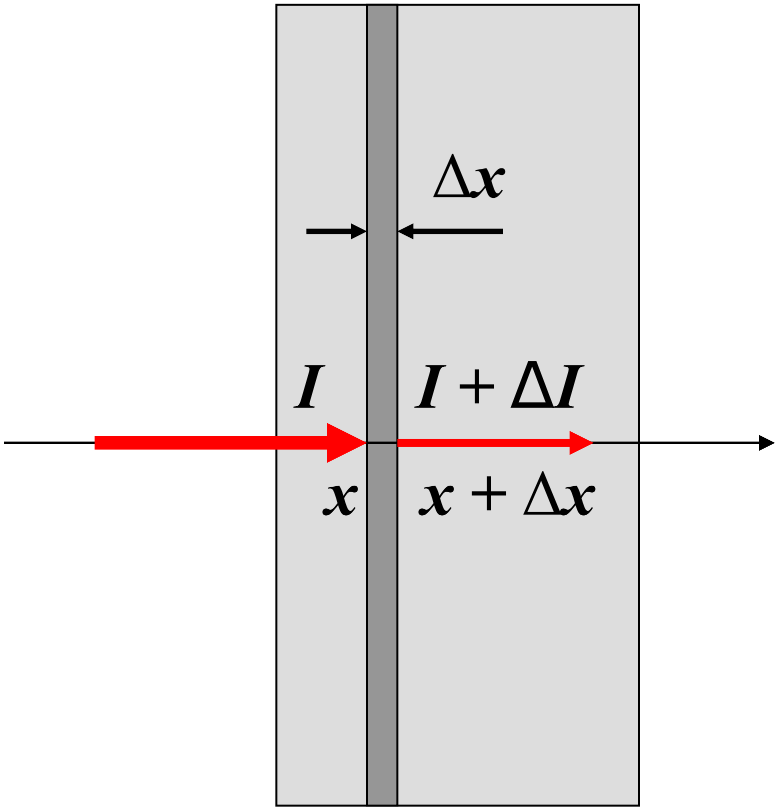


Rozpad jader



$\Delta t = 1$ s

Absorpce záření



$\Delta \quad dI(x) \quad =-$

Δ

$\mu = \quad = \quad a$

$I(d_{1/2}) = \quad 1$

Přírodní zákony - příklady

Klasická mechanika – Newtonův druhý pohybový zákon

m

Klasická elektrodynamika – zákon elektromagnetické indukce

$U_{indukované} = - \quad \Phi$

Kvantová mechanika – časový vývoj systému

$i\hbar \quad \psi$

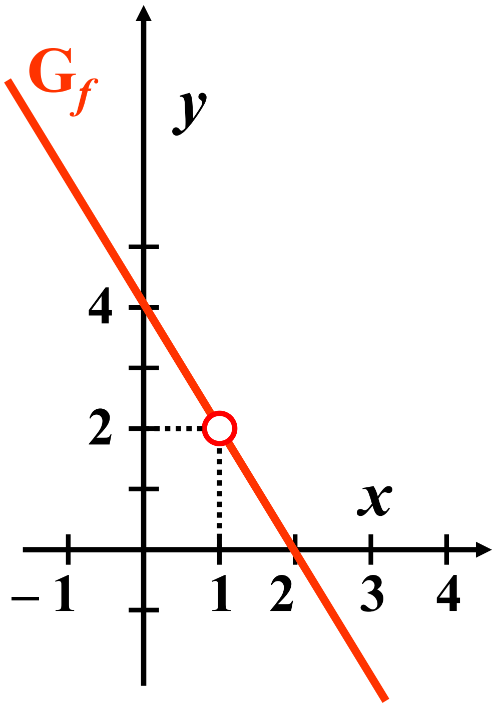
Příroda nás informuje o změnách. Zákony přírody nejčastěji představují chování časových a prostorových změn veličin.

Je tedy dobré umět se změnami počítat?

Jak se dělí nula nulou

$$f(x) = \qquad = \square$$

$$f(x) = - \quad + \qquad \in$$



„Pokus“ o dělení nulou

x	1,200	1,100	1,050	1,020	1,110	1,005	1,002	1,001
$f(x)$	1,600	1,800	1,900	1,960	1,980	1,990	1,996	1,998

x	0,800	0,900	0,950	0,980	0,990	0,995	0,998	0,999
$f(x)$	2,400	2,200	2,100	2,040	2,020	2,010	2,004	2,002

Co si myslíte o možnosti dělení nulou? Jde to provést, nebo se tomu lze za určitých podmínek „přiblížit“?

Limitní chod

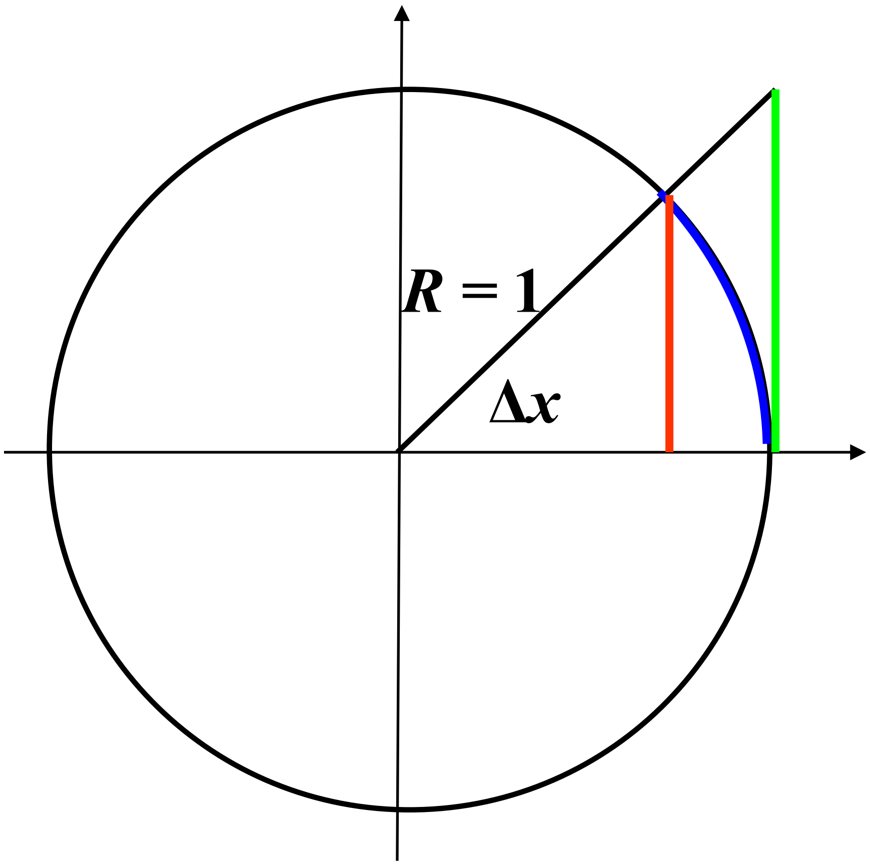
Nulou dělit nelze. Je-li například funkce ***h*(*x*),** jmenovatelem podílu ***p*(*x*) = *g*(*x*) / *h*(*x*)**, a ***h*(*x*)** pro určitou hodnotu ***a*** proměnné ***x*** nabývá nuly, nelze hodnotu ***a*** do zlomku dosadit (nedal by se vyčíslit).

Viděli jsme ale, že když se ve zlomku ***p*(*x*)** blíží k nule jak čitatel, tak jmenovatel, může se stát, že se hodnota zlomku blíží k jistému definovanému číslu ***L***.

Číslo ***L*** se pak nazývá limitou funkce ***p*(*x*)** a píšeme

$$\lim_{x \to} p(x) = \quad = \quad =$$

Jedna důležitá limita



$$\sin \Delta \le \Delta \le \Delta \Rightarrow$$

$$\sin \Delta \quad \Delta \quad \Delta$$

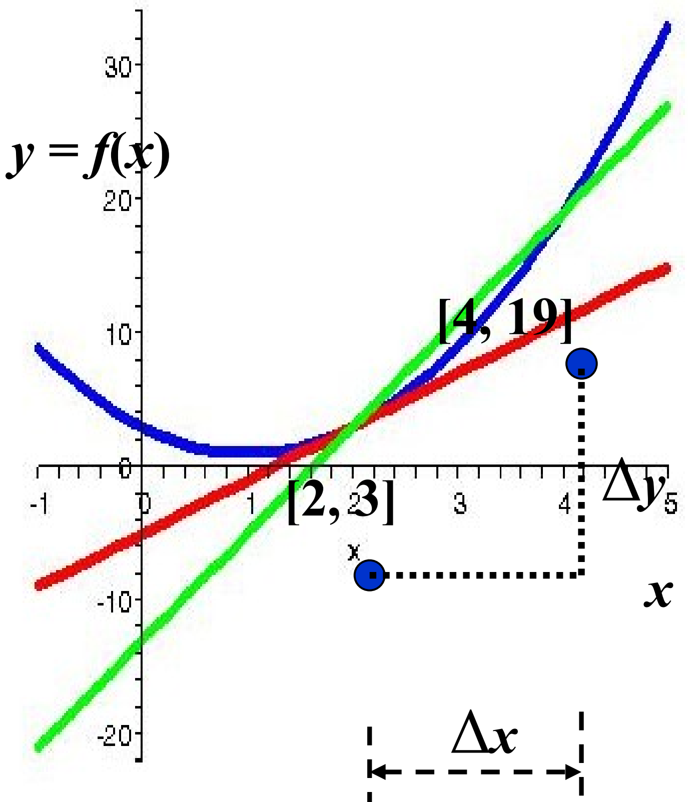
$$1 \ge \Delta \quad \Delta \longrightarrow$$

$$\sin \Delta \longrightarrow \Rightarrow$$

$$\Delta$$

$$\lim_{\Delta\to} \frac{}{\Delta} =$$

Problém tečny a derivace



$f(x) = \; - \; + \; =$

$s\ldots \quad y =$

$t\ldots \quad y = \; -$

$=$

$\tan \beta = \dfrac{\quad - \quad}{\Delta}$

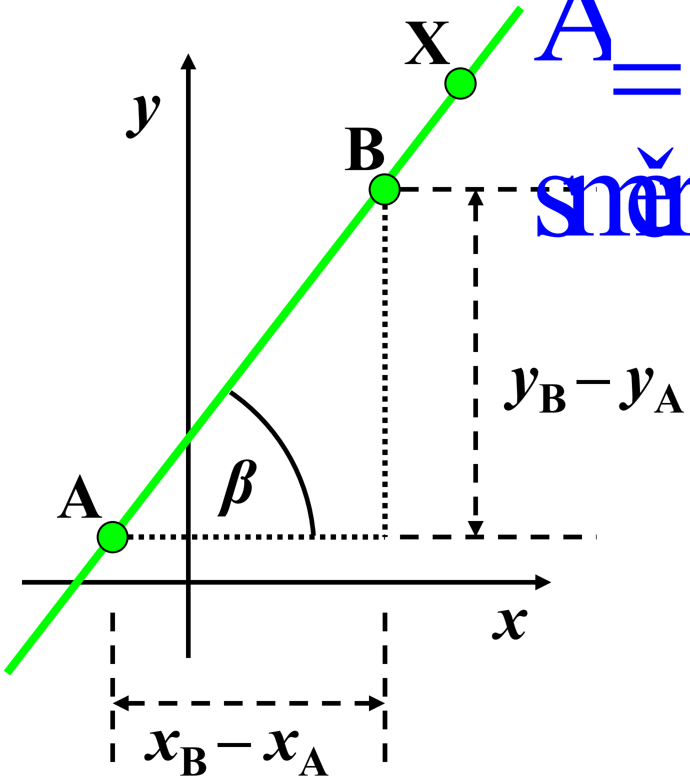
$\tan \alpha = \dfrac{\quad + \Delta \quad - \quad}{\Delta} =$

Hodnota $f'(x)$ určená předchozí limitou, je derivace funkce $f(x)$ v bodě x.

Chápeme-li x jako proměnnou, je $f'(x)$ funkce.

Směrnice tečny ke grafu závisí na bodu dotyku.

Výpočet směrnice a rovnice přímky



A = = =

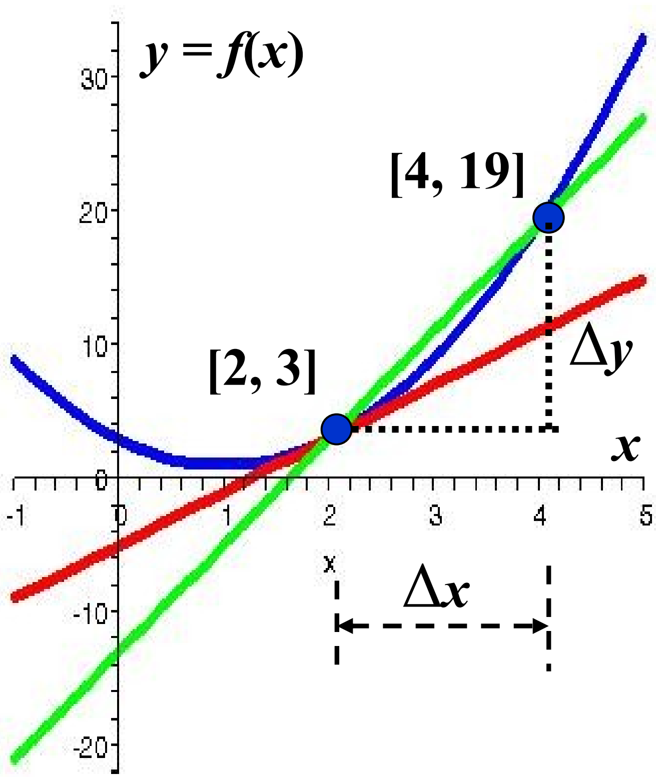
směrnice …

průsečík z předchozího obrázku:

A = B = [4,19]

$y =$ $\Rightarrow =$

Výpočet směrnice a rovnice tečny



Sami dokončete výpočet rovnice tečny, když nyní znáte směrnici.

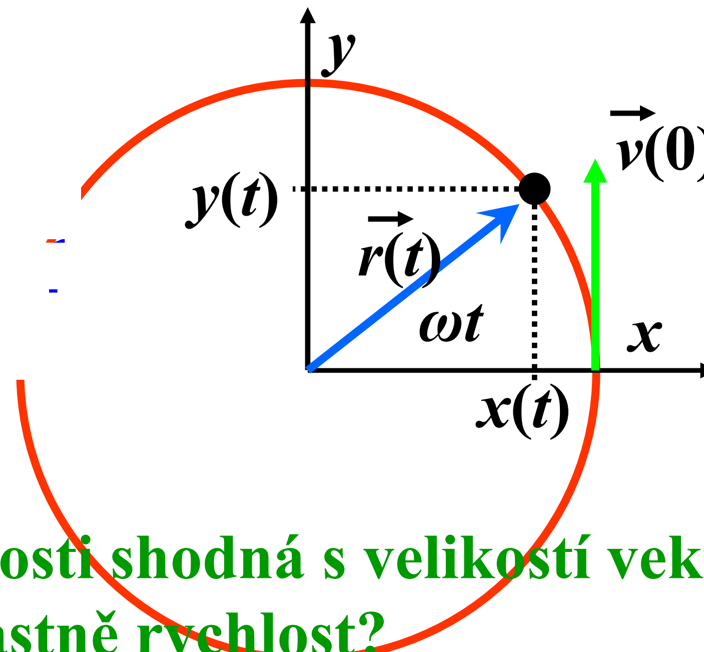
Derivace a fyzika

Příklad: S rovnoměrným pohybem po kružnici se již každý jistě setkal, třeba na řetízkovém kolotoči. Takový pohyb koná například i odstředivka používaná ve zdravotnických zařízeních. Řekněme, že nějaké tělísko obíhá ve vzdálenosti $\boldsymbol{R} = 1{,}0$ m od osy kolotoče a že jeden oběh trvá $\boldsymbol{T} = 4{,}0$ s. Závislost polohy tělíska na čase pak lze vyjádřit například takto:

$x(t) = \qquad =$

$\alpha = \quad = \quad = \quad =$

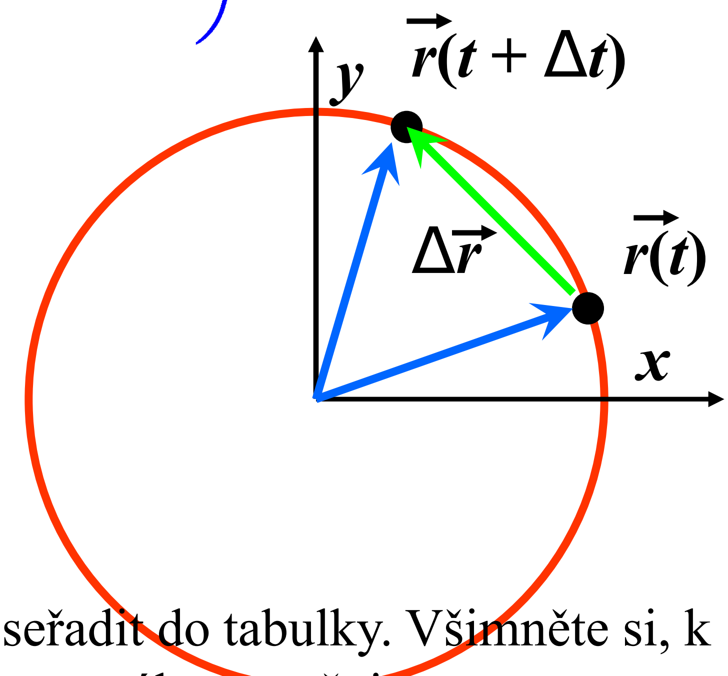
$v \ldots$ vá rychlost



Je získaná hodnota obvodové rychlosti shodná s velikostí vektoru rychlosti daného bodu? Co je to vlastně rychlost?

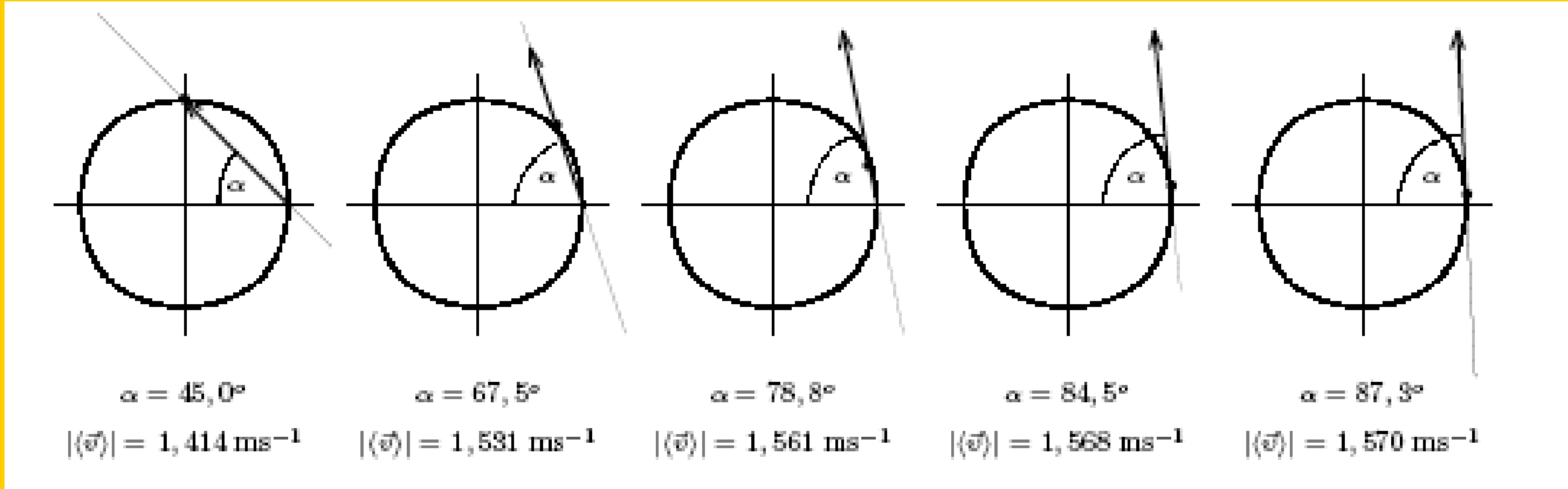
Průměrná rychlost za dobu Δt

$$1\,\mathrm{s},\ \frac{1}{2}\,\mathrm{s},\ \frac{1}{4}\,\mathrm{s},\ \frac{1}{8}\,\mathrm{s},\ \frac{1}{16}\,\mathrm{s}$$



Úkol: Zkuste si sami velikosti průměrných rychlostí a jejich úhly α s osou x vypočítat a seřadit do tabulky. Všimněte si, k jakým hodnotám se blíží, když se interval Δt neustále zmenšuje.

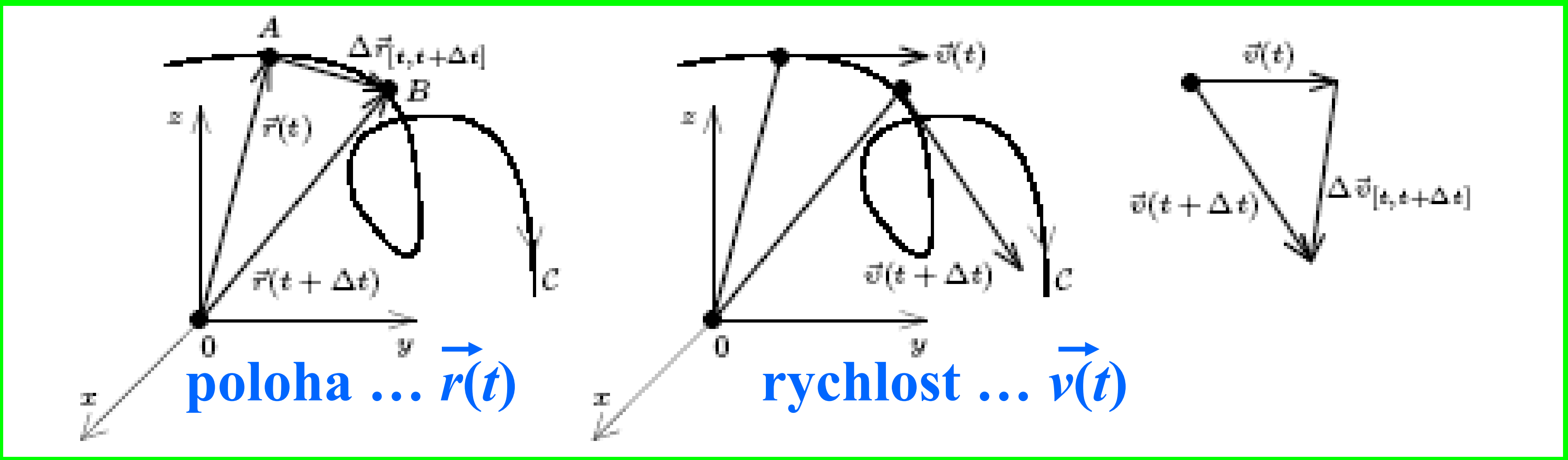
Průměrná rychlost ve zmenšujícím se intervalu



A tady jsou výsledky řešení Vašeho úkolu.

Okamžitá rychlost jako limita

Pohyb hmotného bodu po prostorové křivce



rychlost …

zrychlení …

Příklady odvození derivací

Příklad 1: $f(x) = x^3$ Metoda vykrácení nepohodlného výrazu

Příklad 2: $f(x) = \sin x$

Derivace elementárních funkcí

(1) $f(t) = t^n\,,$ $f'(t) = nt^{n-1}\,,$ $n \in \mathcal{R}$ libovolné

(2) $f(t) = \sin t\,,$ $f'(t) = \cos t\,,$

$f(t) = \cos t\,,$ $f'(t) = -\sin t\,,$

(3) $f(t) = e^t\,,$ $f'(t) = e^t\,;$ $f(t) = a^t\,,$ $f'(t) = a^t \ln a\,,$

$f(t) = \ln t\,,$ $f'(t) = \frac{1}{t}\,;$ $f(t) = \log_a t\,,$ $f'(t) = \frac{1}{t \ln a}\,,$

Pravidla pro derivování

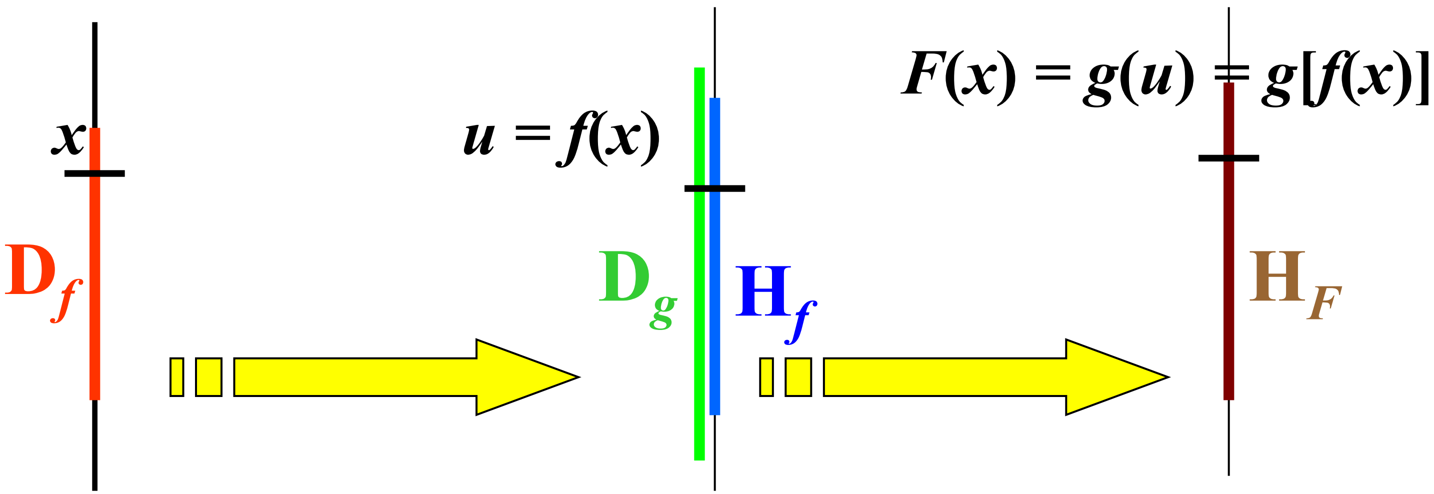
$$(4) \qquad [f(t) \pm g(t)]' = \quad f'(t) \pm g'(t) \, ,$$

$$(5) \qquad [f(t)g(t)]' = \quad f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \;\; ; \quad [k\ f(t)]' = k\ f'(t) \, , \, k = \text{konst.} \, ,$$

$$(6) \qquad \left[\frac{f(t)}{g(t)}\right]' = \quad \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{[g(t)]^2} \, ,$$

$$(7) \qquad F(t) = g[f(t)] \, , \quad F'(t) = g'[f(t)] \cdot f'(t) \, .$$

Pravidlo pro složenou funkci

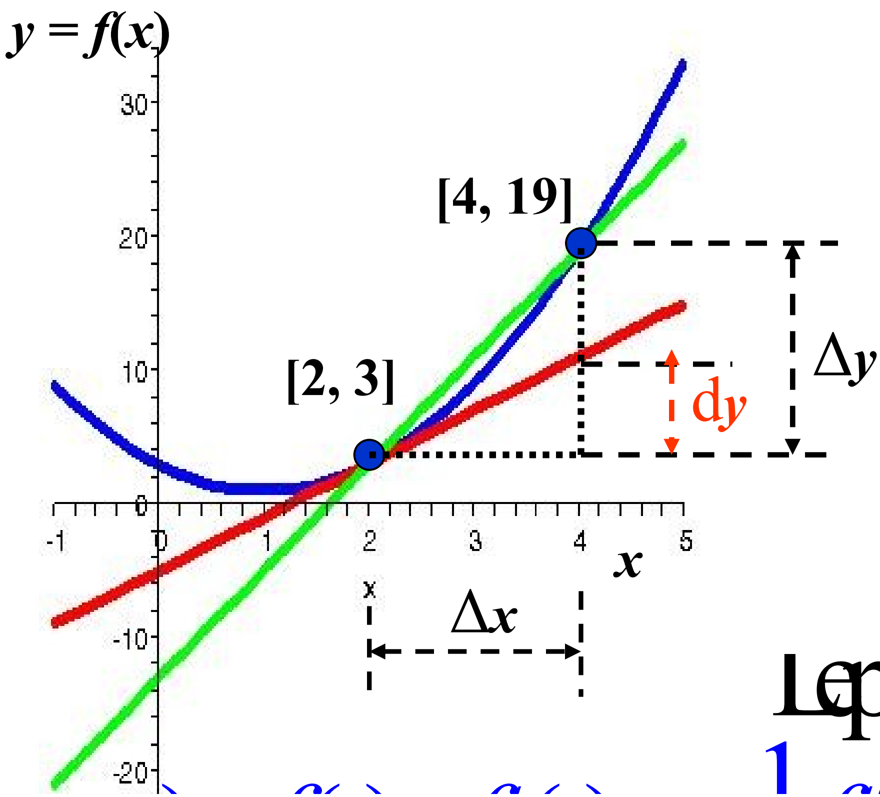


$\frac{F(x+\Delta}{\Delta} -$ Δ Δ Δ

$g'(u).$ $\Rightarrow$ $.$

Odhady změn hodnot funkce

$f(x) = \ldots + \ldots = \ldots$ [illegible] $\ldots = \ldots = \ldots$



$\Delta = \ldots + \Delta - \ldots =$

$f'(x)\Delta + \ldots$ [illegible]

$\Delta \cdots \ldots =$

[illegible]

funkce v bodě x

Lepší odhady: Taylorův rozvoj

$f(x + \Delta = \ldots + \ldots \Delta + \ldots \Delta + \cdots \ldots \cdots$

Dva příklady na odhady

Příklad 1. Určete přibližnou hodnotu čísla $2{,}03^5$.

$$f(x) = \quad = \quad \Delta = \quad = \quad = \quad = \quad =$$

$$f(x + \Delta \quad \ldots$$

$$\ldots$$

Příklad 2. Určete přibližnou hodnotu sin 3°.

$$f(x) = \quad = \quad \Delta = \quad =$$

$$f'(x) = \quad = \quad = \quad = \quad = - \quad = -$$

$$\sin \Delta \quad \ldots$$

Několik úloh na derivace a tečny

Úloha 1. Odvoďte pravidlo pro derivaci funkcí $\boldsymbol{x^4}$, $\boldsymbol{x^5}$, $\boldsymbol{x^n}$. Pro $\boldsymbol{x^n}$ použijte binomickou větu.

Úloha 2. Vypočtěte derivace následujících funkcí

$$F(x) =$$

$$F(x) =$$

Úloha 3. Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \sin^2 x$ v bodě $t = \pi/4$.

Integrály a plochy

aneb

jak zjistit funkci z její derivace

Obrácená úloha mechaniky
aneb
od zrychlení k trajektorii

Základní zákon mechaniky – druhý Newtonův zákon – umožňuje vyjádřit zrychlení hmotného bodu na základě sil, jimiž na hmotný bod působí okolní objekty.

Zrychlení je však derivací rychlosti, a ta je derivací polohy. Abychom zjistili funkci, která popisuje závislosti polohy hmotného bodu na čase, musíme nějakou zpětnou procedurou najít, jak vypadala funkce, než jsme ji zderivovali.

Opačná procedura k derivování, tj. nalézání původní (primitivní) funkce, se nazývá integrování.

Primitivní funkce (neurčitý integrál)

Předpokládejme, že na intervalu $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ je definována funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, která je spojitá (její limita v každém bodě existuje a je rovna funkční hodnotě, graf funkce není „potrhaný“). Funkce $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ definovaná na intervalu $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ obsahujícím $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, a taková, že její derivace na intervalu $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ je rovna $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, je **primitivní funkcí (neurčitým integrálem) k funkci $f(x)$ na $[a, b]$.**

Příklad: Funkce $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ je definována na **R.** Funkce $F(x) = x^4 - x^2 + x$ je k ní funkcí primitivní, ale také všechny funkce tvaru $F(x)$ + libovolná konstanta C.

Jak je to možné, že jedna a táž funkce má nekonečně mnoho primitivních funkcí lišících se navzájem o konstantu?

Tabulka primitivních funkcí – I

(1)	$f(t) = t^n$	$F(t) = \frac{t^n}{n+1} \qquad n \neq -1$
(2)	$f(t) = \cos t$	$F(t) = \sin t$
	$f(t) = \sin t$	$F(t) = -\cos t$
(3)	$f(t) = e^t$	$F(t) = e^t$
	$f(t) = \frac{1}{t}$	$F(t) = \ln \lvert t \rvert$
	$f(t) = a^t$	$F(t) = \frac{a^t}{\ln a}\,,\ a > 0\,,\ a \neq 1$
	$f(t) = \frac{1}{t \ln a}$	$F(t) = \log_a \lvert t \rvert\,,\ a > 0\,,\ a \neq 1$
(4)	$f(t) = f_1(t) \pm f_2(t)$	$F(t) = F_1(t) \pm F_2(t)\,,$
		$F_1(t)$ resp. $F_2(t)$ je primitivní funkcí k $f_1(t)$ resp. $f_2(t)$
	$f(t) = k\,g(t)$	$F(t) = kG(t)\,,\ k =$ konst. ,
		$G(t)$ je primitivní funkcí k $g(t)$

Tabulka primitivních funkcí – II

(5) $f(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$ $F(t) = \operatorname{tg} t$

$f(t) = -\frac{1}{\sin^2 t}$ $F(t) = \operatorname{cotg} t$

(6) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $F(t) = \arcsin t$

$f(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $F(t) = \arccos t$

(7) $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ $F(t) = \operatorname{arctg} t$

$f(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ $F(t) = \operatorname{arccotg} t$

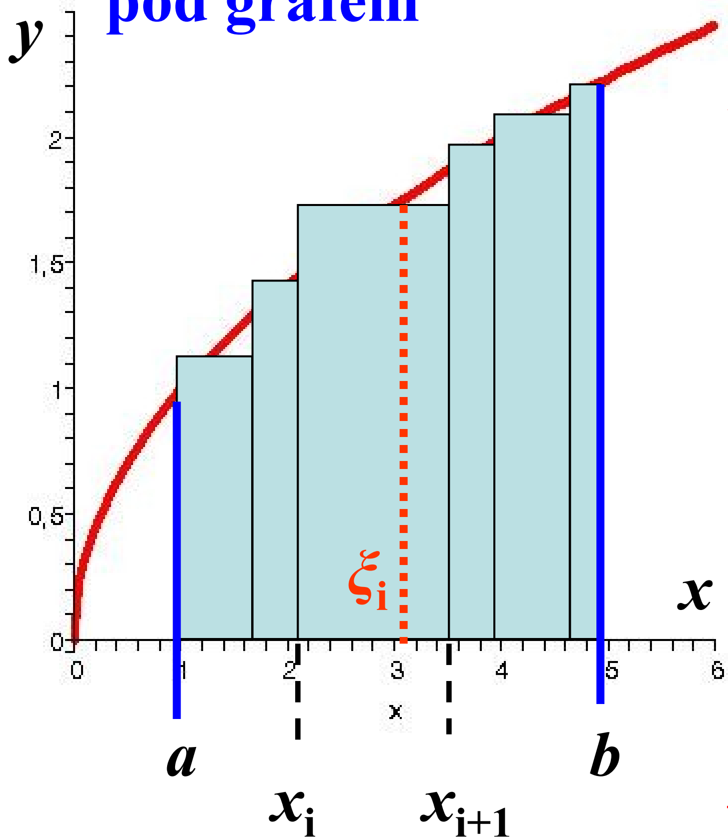
(8) $f(t) = \frac{1}{t^2-1}$ $F(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1}$

(9) $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ $F(t) = \frac{1}{2}\left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right]$

(10) $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ $F(t) = \frac{1}{2}\left[\ln(t + \sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2}\right]$

Problém plochy

určit plochu P pod grafem



dělení D intervalu $[a,b]$

$a = \; < \; < \cdots$

norma dělení

$\nu = \; - \; = \cdots$

P $\sum$

$\lim F(b) \_ \quad = \int$

$\nu \to$

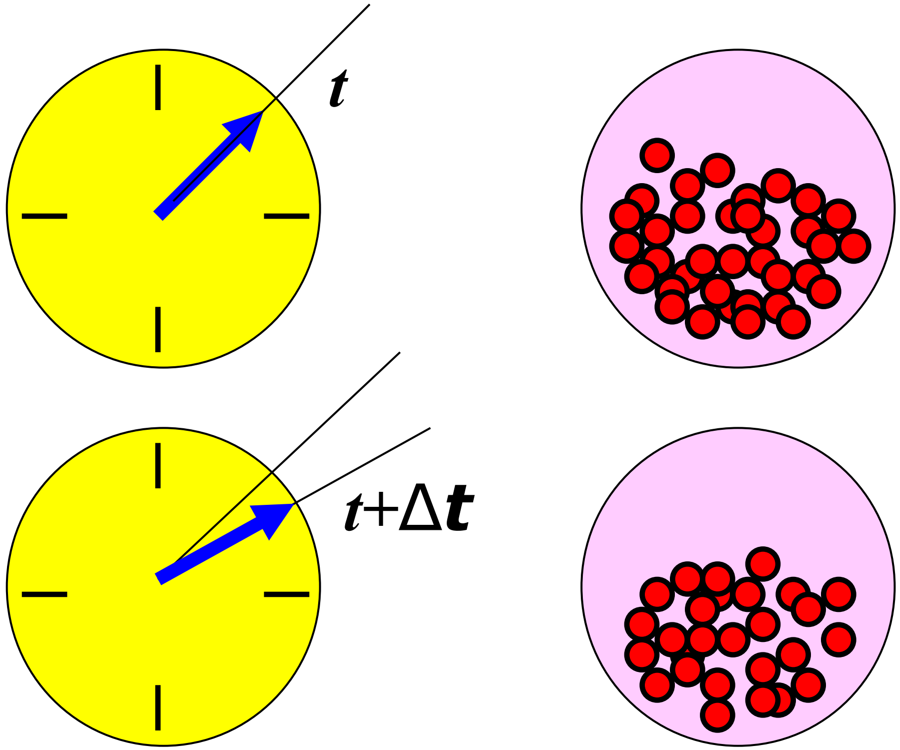
určitý integrál

Diferenciální rovnice

aneb

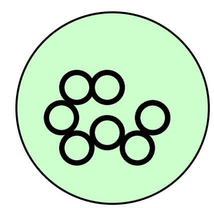
jak z rovnice pro změnu určit funkci

Rozpad jader – ještě jednou



$N \sim 4{,}8 \cdot 10^{22}$ na 1 cm^3

$^{238}_{92}U \rightarrow \quad +$



$N + \Delta N$

$\Delta N \sim -2{,}4 \cdot 10^{5}$ na 1 cm^3

$\Delta t = 1$ s

$\Lambda \quad dN(t) \quad N(t) \quad = - \quad = \quad = \quad \cdot$

Rozpad jader - řešení

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = - \quad \cdots \quad = -$$

$$f'(x) + \quad = \quad =$$

$$a \cdot \quad + \quad = \Rightarrow = -$$

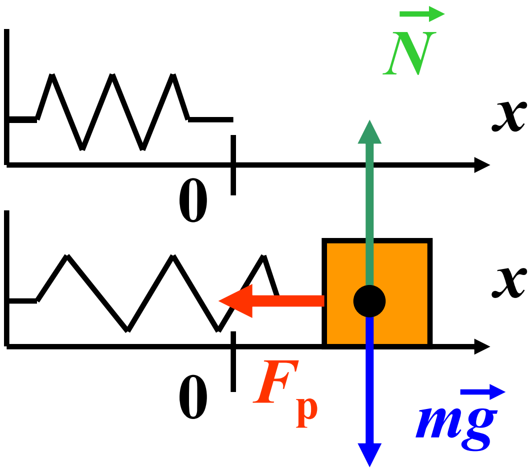
$$f(x) = \quad - \quad \cdots$$

počáteční podmínka $f(0) = \quad \Rightarrow \quad =$

$$f(x) = \quad - \quad \cdots \quad : \quad -$$

Úkol: Použijte uvedený postup pro řešení problému s absorpcí záření. Počáteční podmínka zde má charakter zadání intenzity záření na povrchu.

Ještě jednou mechanika



počáteční podmínky

Dokončete řešení na základě znalosti počátečních podmínek.

Předchozí rovnice jsou ukázkou obyčejných diferenciálních rovnic prvého a druhého řádu, lineárních, s konstantními koeficienty a homogenních.

Příště:

Radiologická fyzika

pravděpodobnost

měření a zpracování dat

podzim 2009, pátá přednáška