

# IX. Základy testování hypotéz



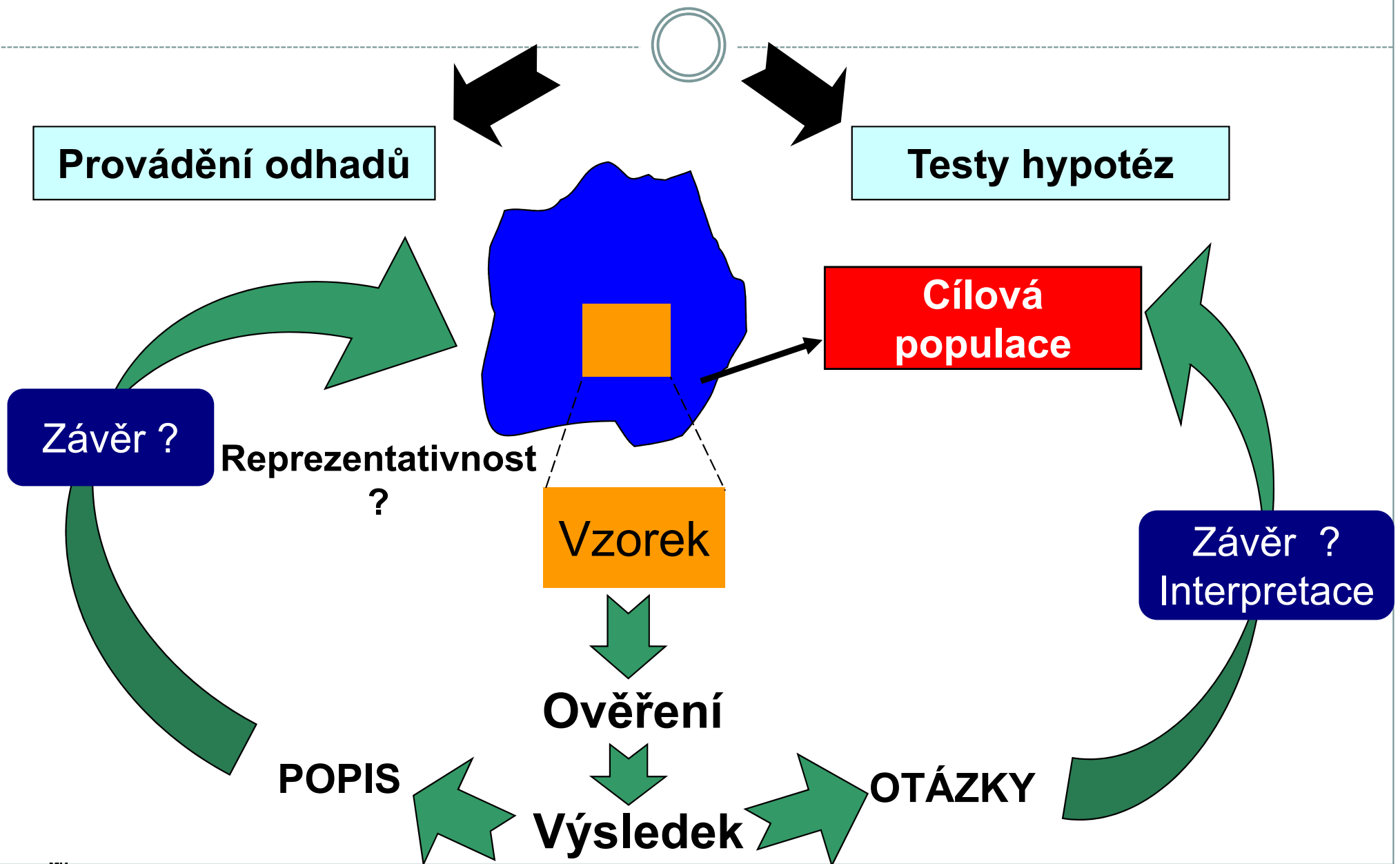
**Princip statistického testování hypotéz**  
**Pojmy statistických testů**  
**Normalita dat a její význam pro testování**

# Anotace



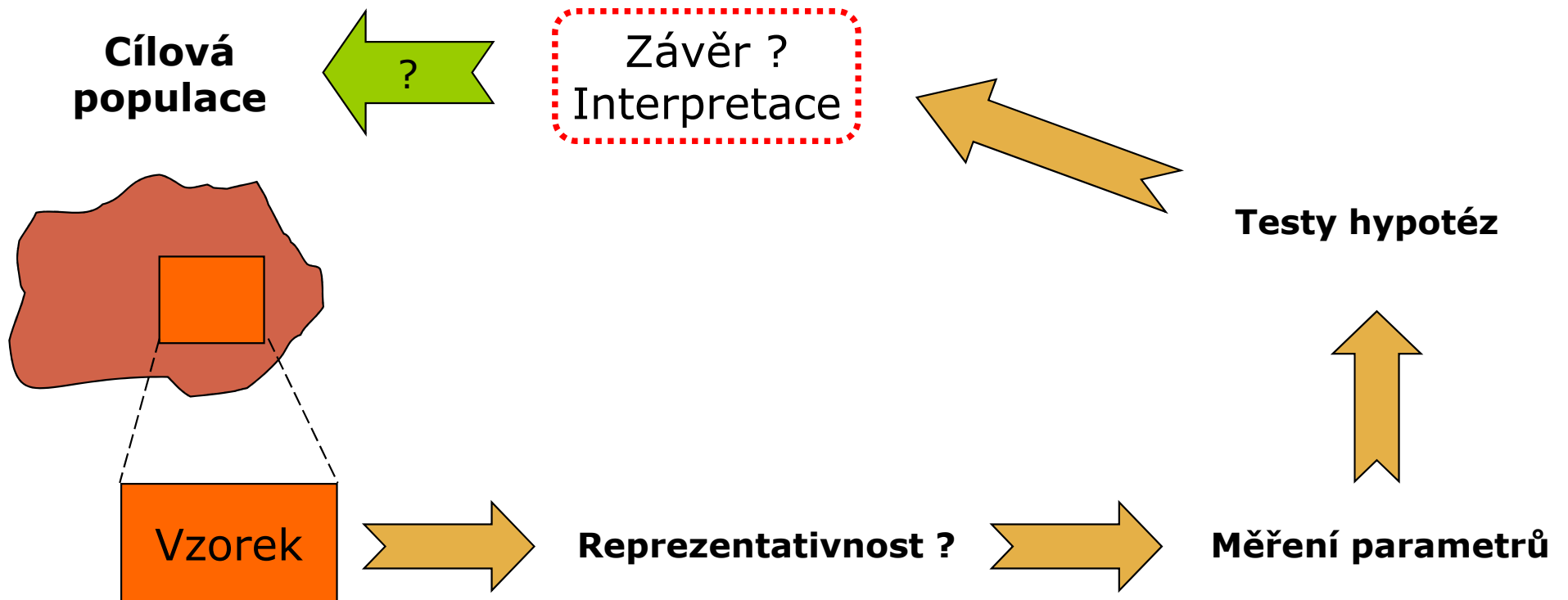
- Testování hypotéz je po popisné statistice druhým hlavním směrem statistických analýz. Při testování pokládáme hypotézy, které se snažíme s určitou pravděpodobností potvrdit nebo vyvrátit.
- Tzv. nulovou hypotézu lze nejlépe popsat jako situaci, kdy předpokládáme vliv náhody (rozdíl mezi skupinami je pouhá náhoda, vztah dvou proměnných je pouhá náhoda apod.), alternativní hypotéza předpokládá vliv nenáhodného faktoru.
- Výsledkem statistického testu je v zásadě pravděpodobnost nakolik je hodnocený jev náhodný nebo ne, při překročení určité hranice (nejčastěji méně než 5% pravděpodobnost, že jev je pouhá náhoda) deklarujeme, že pravděpodobnost náhody je pro nás dostatečně nízká abychom jev prohlásili za nenáhodný
- Statistická významnost je ovlivnitelná velikostí vzorku a tak je pouze indicií k prohlášení např. rozdílu dvou skupin pacientů za skutečně významný. V ideální situaci je nezbytné aby rozdíl byl významný nejenom statisticky (=nenáhodný), ale i prakticky (=nejde pouze o artefakt velikosti vzorku).

# Statistika v průzkumném studiu



# Princip testování hypotéz

- Formulace hypotézy
- Výběr cílové populace a z ní reprezentativního vzorku
- Měření sledovaných parametrů
- Použití odpovídajícího testu → závěr testu
- Interpretace výsledků



# Statistické testování – základní pojmy



➤ **Nulová hypotéza  $H_0$**

$H_0$ : sledovaný efekt je nulový

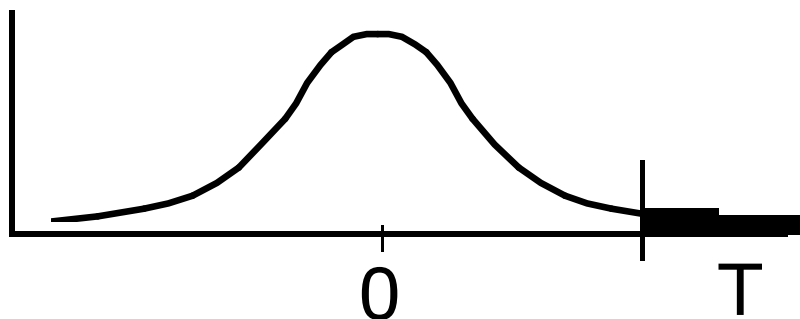
➤ **Alternativní hypotéza  $H_A$**

$H_A$ : sledovaný efekt je různý mezi skupinami

➤ **Testová statistika**

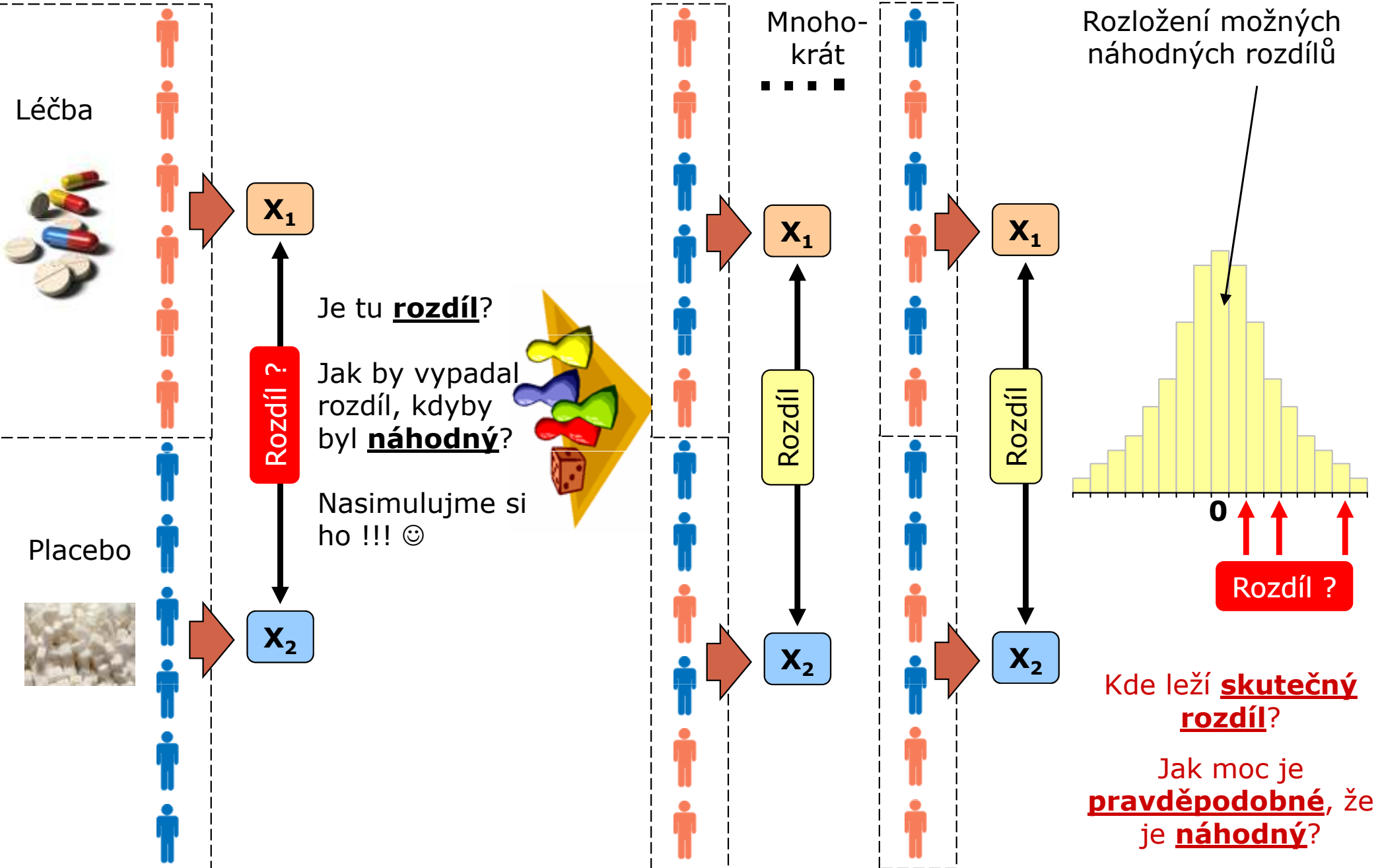
$$\text{Testová statistika} = \frac{\text{Pozorovaná hodnota} - \text{Očekávaná hodnota}}{\text{Variabilita dat}} * \sqrt{\text{Velikost vzorku}}$$

➤ **Kritický obor testové statistiky**



**Statistické testování odpovídá na otázku zda je pozorovaný rozdíl náhodný či nikoliv. K odpovědi na otázku je využít statistický model – testová statistika.**

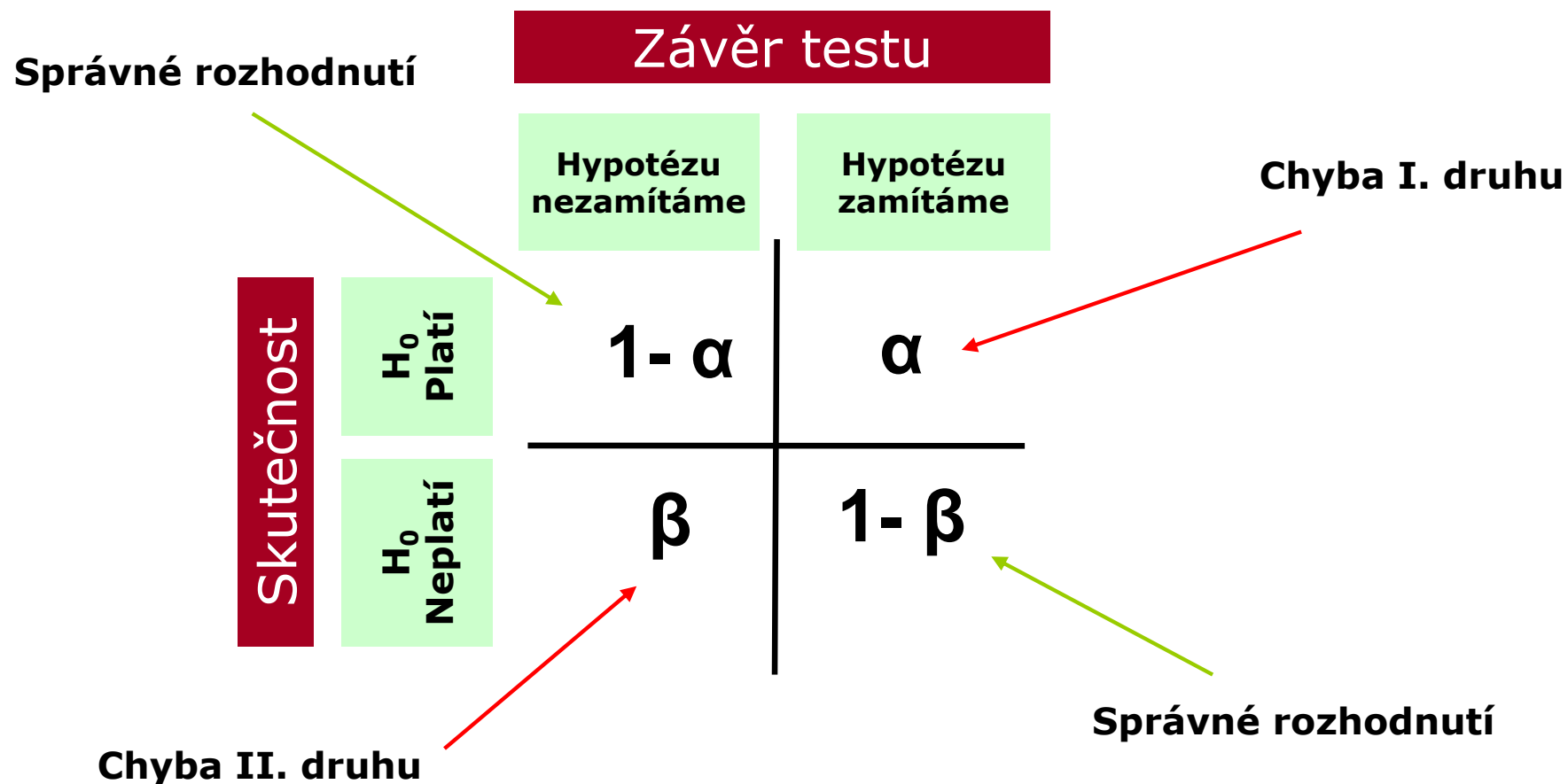
# Co znamená náhodný rozdíl?



# Možné chyby při testování hypotéz



- I přes dostatečnou velikost vzorku a kvalitní design experimentu se můžeme při rozhodnutí o zamítnutí/nezamítnutí nulové hypotézy dopustit chyby.

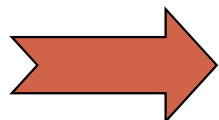


# Význam chyb při testování hypotéz



## Pravděpodobnost chyby 1. druhu

$\alpha$

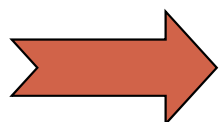


Pravděpodobnost nesprávného zamítnutí nulové hypotézy



## Pravděpodobnost chyby 2. druhu

$\beta$

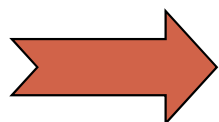


Pravděpodobnost nerozpoznání neplatné nulové hypotézy



## Síla testu

$1-\beta$



Pravděpodobnostně vyjádřená schopnost rozpoznat neplatnost hypotézy



# Parametrické vs. neparametrické testy



## Parametrické testy

- Mají předpoklady o rozložení vstupujících dat (např. normální rozložení)
- Při stejném N a dodržení předpokladů mají vyšší sílu testu než testy neparametrické
- Pokud nejsou dodrženy předpoklady parametrických testů, potom jejich síla testu prudce klesá a výsledek testu může být zcela chybný a nesmyslný

## Neparametrické testy

- Nemají předpoklady o rozložení vstupujících dat, lze je tedy použít i při asymetrickém rozložení, odlehlých hodnotách, či nedetekovatelném rozložení
- Snížená síla těchto testů je způsobena redukcí informační hodnoty původních dat, kdy neparametrické testy nevyužívají původní hodnoty, ale nejčastěji pouze jejich pořadí

# One-sample vs. two sample testy



## One – sample testy

- Srovnávají jeden vzorek (one sample, jednovýběrové testy) s referenční hodnotou (popřípadě se statistickým parametrem cílové populace)
- V testu je tedy srovnáváno rozložení hodnot (vzorek) s jediným číslem (referenční hodnota, hodnota cílové populace)
- Otázka položená v testu může být vztažena k průměru, rozptylu, podílu hodnot i dalším statistickým parametrům popisujícím vzorek

## Two – sample testy

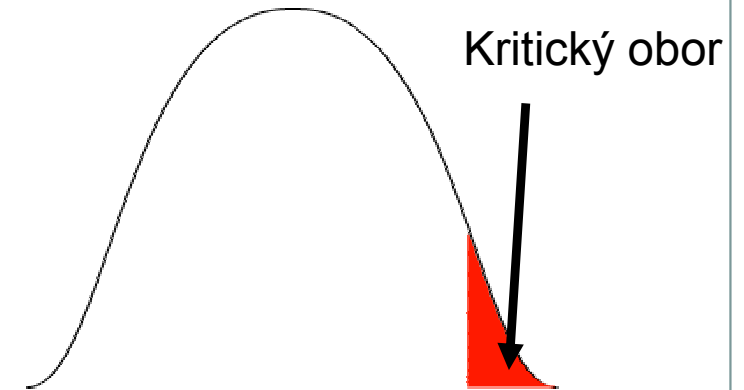
- Srovnávají navzájem dva vzorky (two sample, dvouvýběrové vzorky)
- V testu jsou srovnávány dvě rozložení hodnot
- Otázka položená v testu může být opět vztažena k průměru, rozptylu, podílu hodnot i dalším statistickým parametrům popisujícím vzorek
- Kromě testů pro dvě skupiny hodnot existují samozřejmě i testy pro více skupin dat

# One-tailed vs. Two-tailed testy



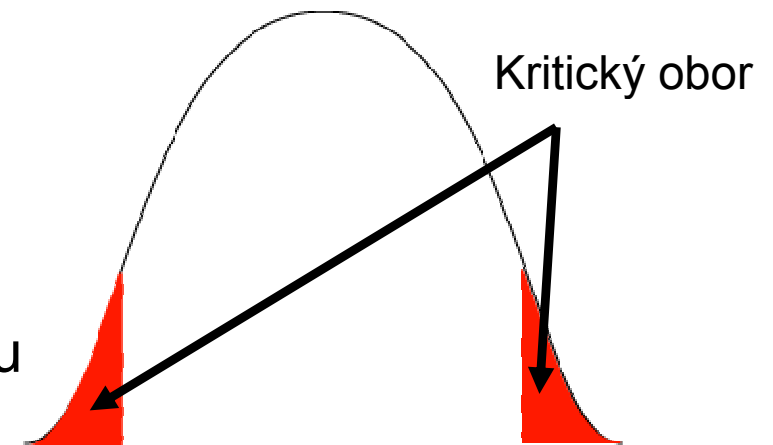
## One – tailed testy

- Hypotéza testu je postavena asymetricky, tedy ptáme se na **větší než/ menší než**
- Test může mít pouze dvojí výstup – jedna z hodnot je větší (menší) než druhá a všechny ostatní případy



## Two – tailed testy

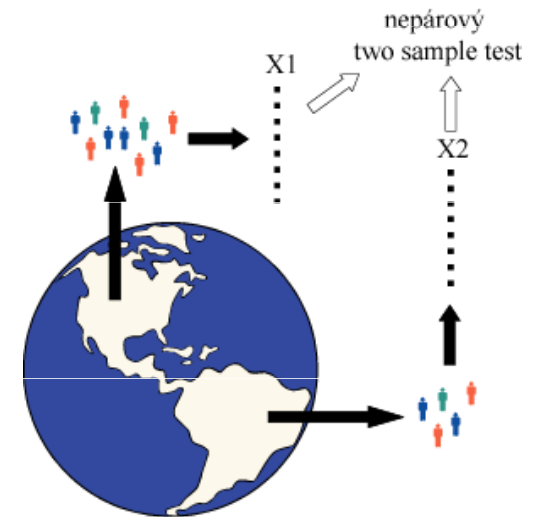
- Hypotéza testu se ptá na otázku **rovná se/nerovná se**
- Test může mít trojí výstup – **menší - rovná se – větší než**
- Situace **nerovná se** je tedy souhrnem dvou možných výstupů testu (**menší+větší**)



# Nepárový vs. párový design

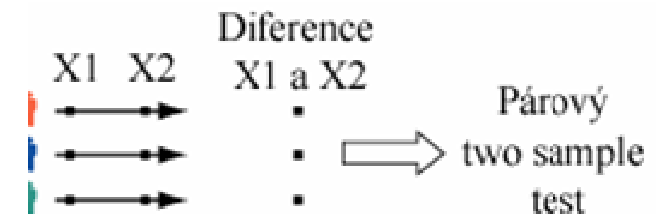
## Nepárový design

- Skupiny srovnávaných dat jsou na sobě zcela nezávislé (též nezávislý, independent design), např. lidé z různých zemí, nezávislé skupiny pacientů s odlišnou léčbou atd.
- Při výpočtu je nezbytné brát v úvahu charakteristiky obou skupin dat



## Párový design

- Mezi objekty v srovnávaných skupinách existuje vazba, daná např. člověkem před a po operaci, reakce stejného kmene krys atd.
- Vazba může být buď přímo dána nebo pouze předpokládána (v tom případě je nutné ji ověřit)
- Test je v podstatě prováděn na diferencích skupin, nikoliv na jejich původních datech



# Statistické testy a normalita dat



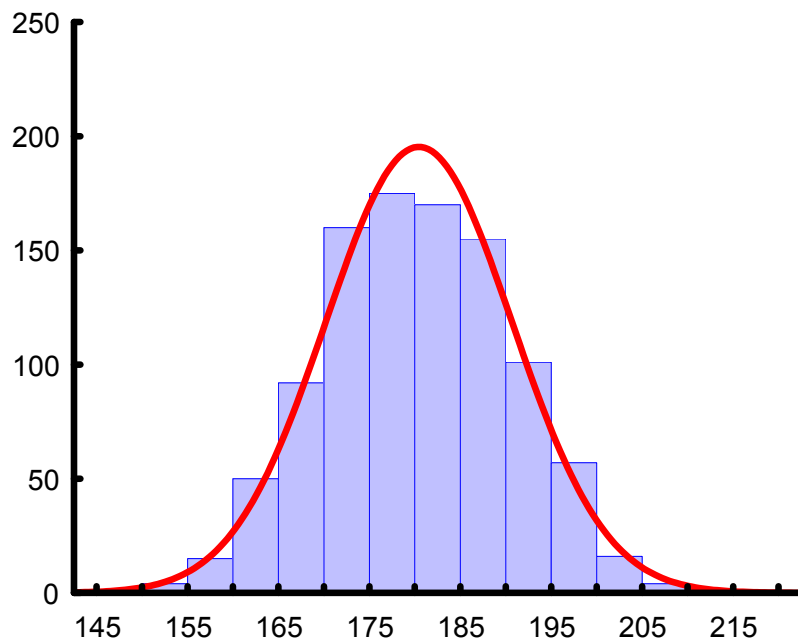
- Normalita dat je jedním z předpokladů tzv. parametrických testů (testů založených na předpokladu nějakého rozložení) – např. *t*-testy
- Pokud data nejsou normální, neodpovídají ani modelovému rozložení, které je použito pro výpočet (*t*-rozložení) a test tak může lhát
- Řešením je tedy:
  - Transformace dat za účelem dosažení normality jejich rozložení
  - Neparametrické testy – tyto testy nemají žádné předpoklady o rozložení dat

Typ srovnání	Parametrický test	Neparametrický test
2 skupiny dat nepárově:	Nepárový <i>t</i> -test	Mann Whitney test
2 skupiny dat párově:	Párový <i>t</i> -test	Wilcoxon test, sign test
Více skupin nepárově:	ANOVA	Kruskal- Wallis test
Korelace:	Pearsonův koeficient	Spearmanův koeficient

# Testy normality



- Testy normality pracují s nulovou hypotézou, že není rozdíl mezi zpracovávaným rozložením a normálním rozložením. Vždy je ovšem dobré prohlédnout si i histogram, protože některé odchylky od normality, např. bimodalitu některé testy neodhalí.



## •Test dobré shody

V testu dobré shody jsou data rozdělena do kategorií (obdobně jako při tvorbě histogramu), tyto intervaly jsou normalizovány (převedeny na normální rozložení) a podle obecných vzorců normálního rozložení jsou k nim dopočítány očekávané hodnoty v intervalech, pokud by rozložení bylo normální. Pozorované normalizované četnosti jsou poté srovnány s očekávanými četnostmi pomocí  $\chi^2$  testu dobré shody. Test dává dobré výsledky, ale je náročný na  $n$ , tedy množství dat, aby bylo možné vytvořit dostatečný počet tříd hodnot.

## •Kolmogorov Smirnov test

Tento test je často používán, dokáže dobře najít odlehlé hodnoty, ale počítá spíše se symetrií hodnot než přímo s normalitou. Jde o neparametrický test pro srovnání rozdílu dvou rozložení. Je založen na zjištění rozdílu mezi reálným kumulativním rozložením (vzorek) a teoretickým kumulativním rozložením. Měl by být počítán pouze v případě, že známe průměr a směrodatnou odchylku hypotetického rozložení, pokud tyto hodnoty neznáme, měla by být použita jeho modifikace – Lilieforsův test.

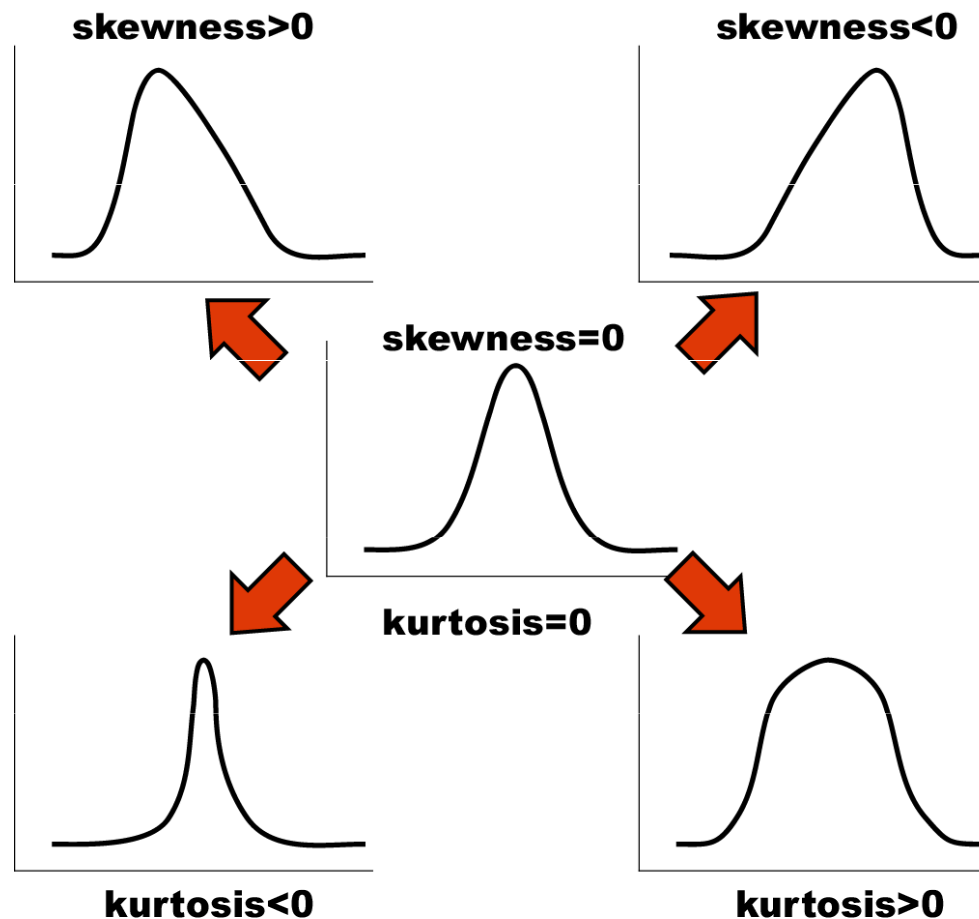
## •Shapiro-Wilk's test

Jde o neparametrický test použitelný i při velmi malých  $n$  (10) s dobrou silou testu, zvláště ve srovnání s alternativními typy testů, je zaměřen na testování symetrie.

# Šikmost a špičatost jako testy normality



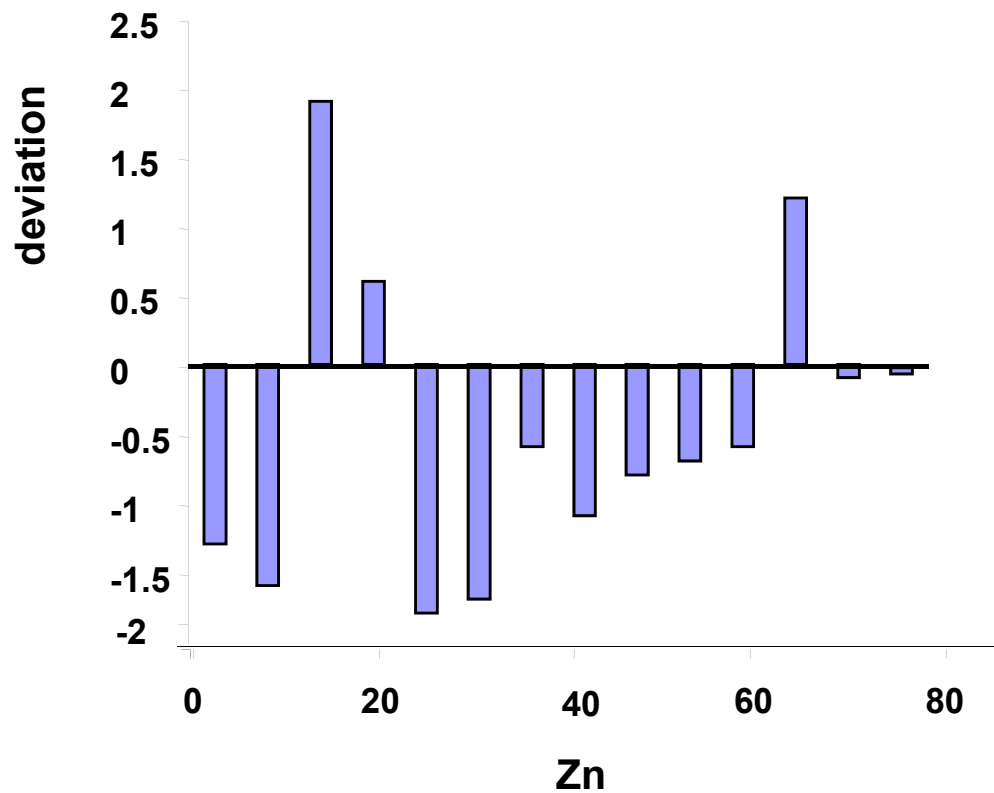
- Parametry normálního rozložení, skewness a kurtosis mohou být využity pro testování normality, ale pouze pro velké vzorky (šikmost – 100, špičatost – 500).



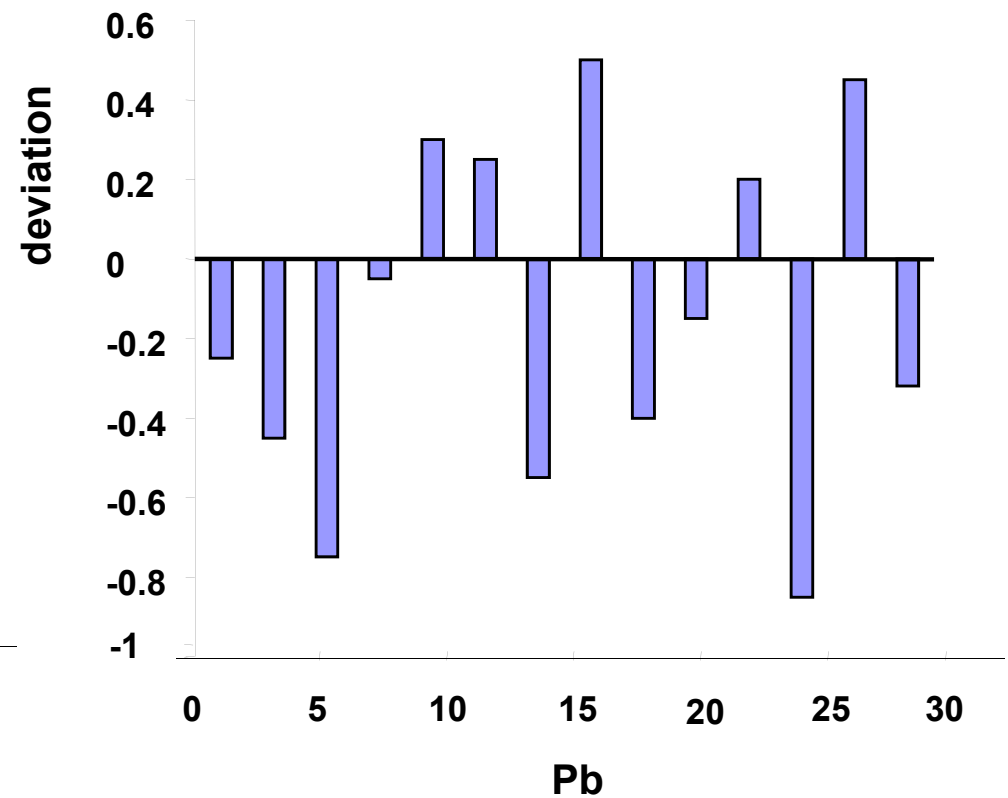
# Grafická diagnostika normality



## Rootgram



## Rootgram

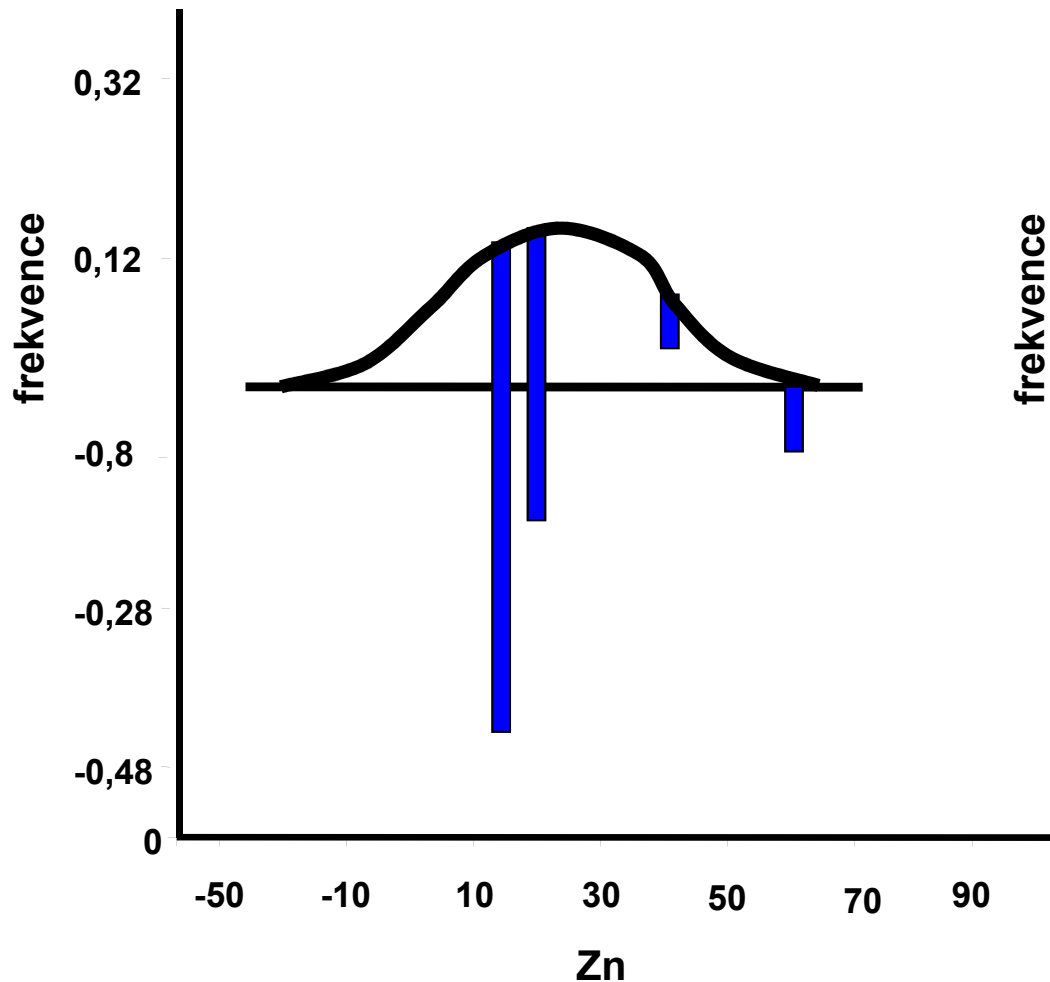




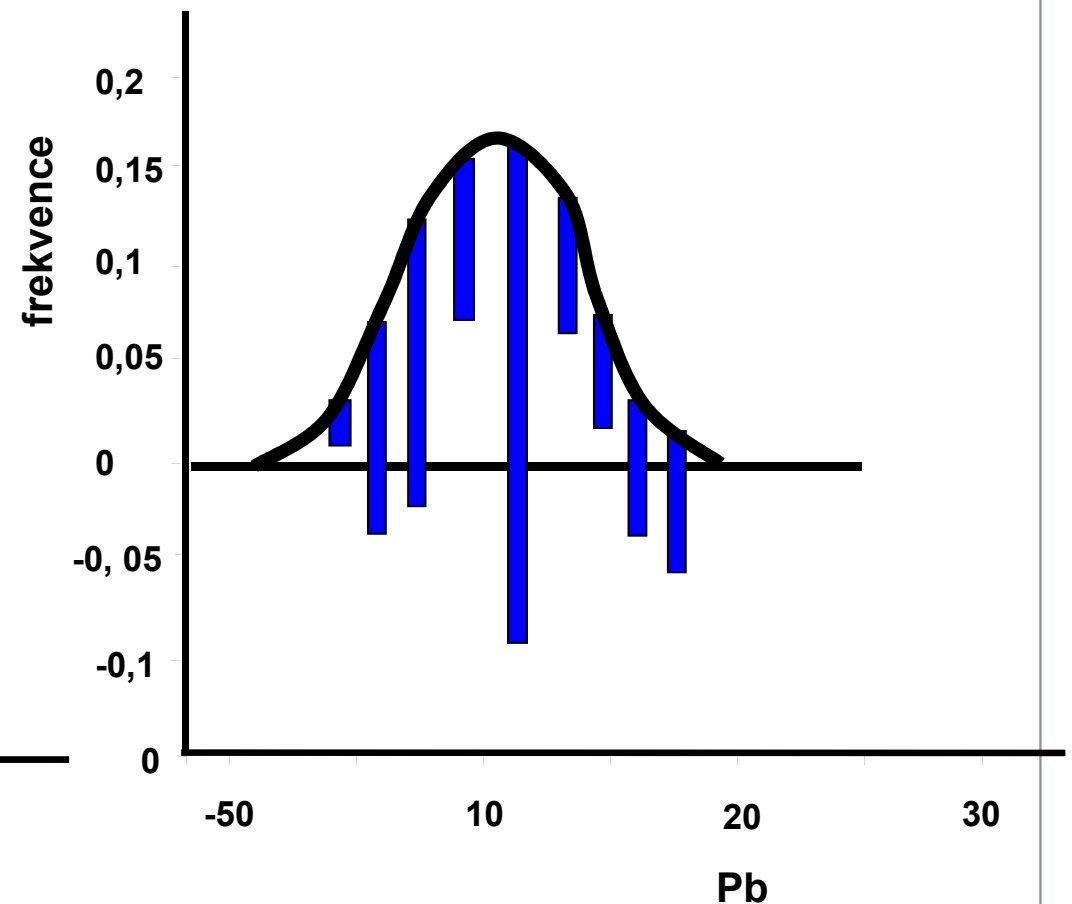
# Grafická diagnostika normality



Hanging Histobars.



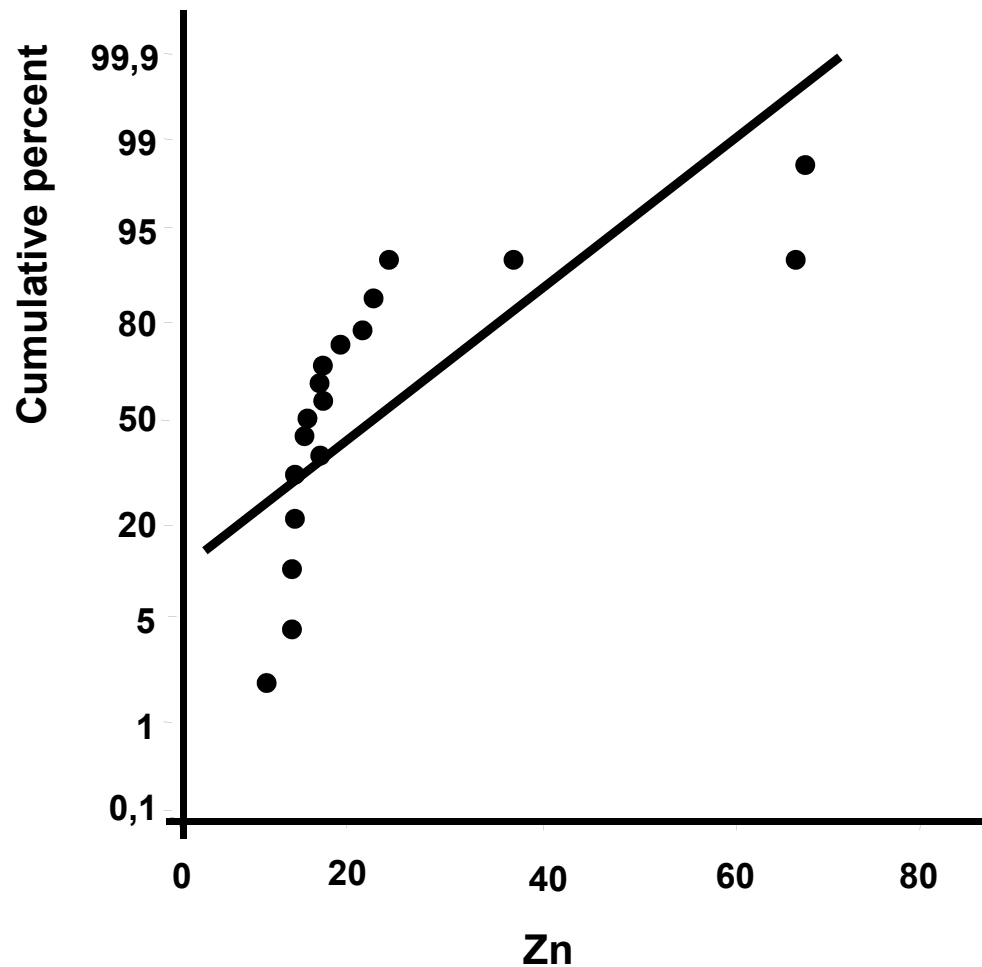
Hanging Histobars.



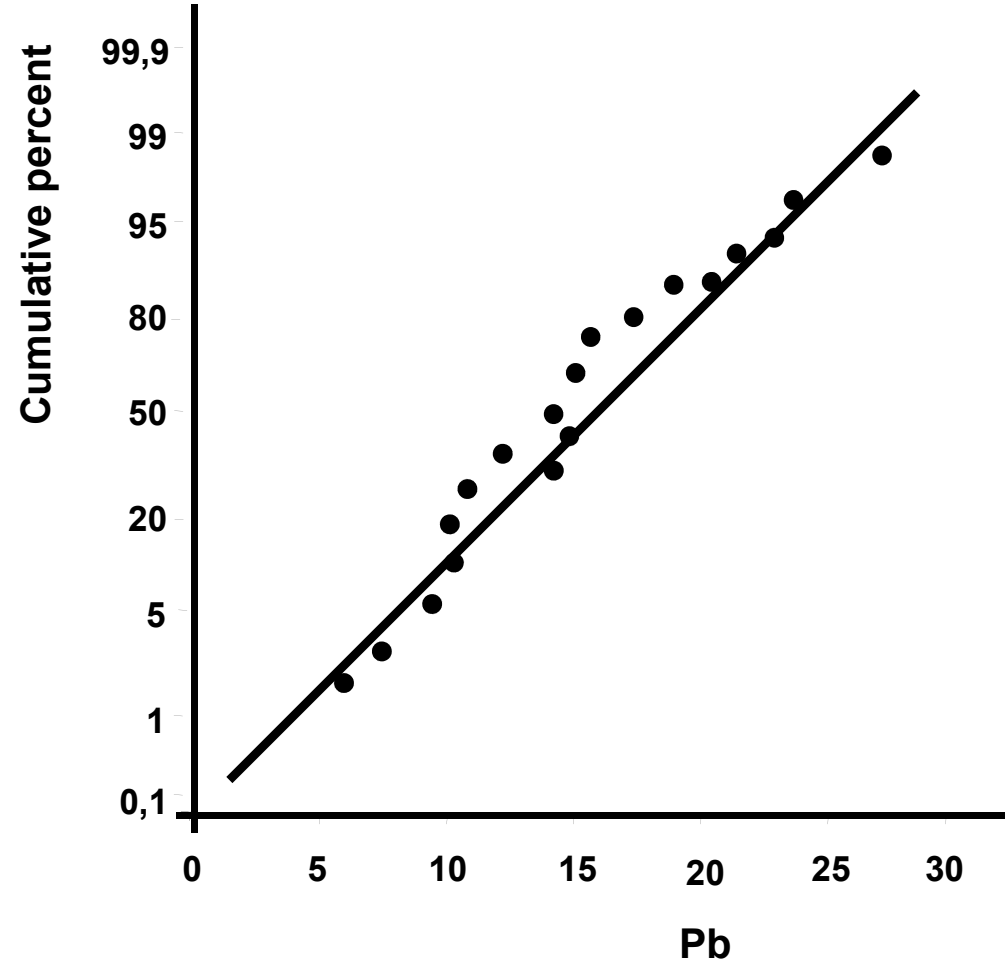
# Grafická diagnostika normality



## Normal Probability Plot



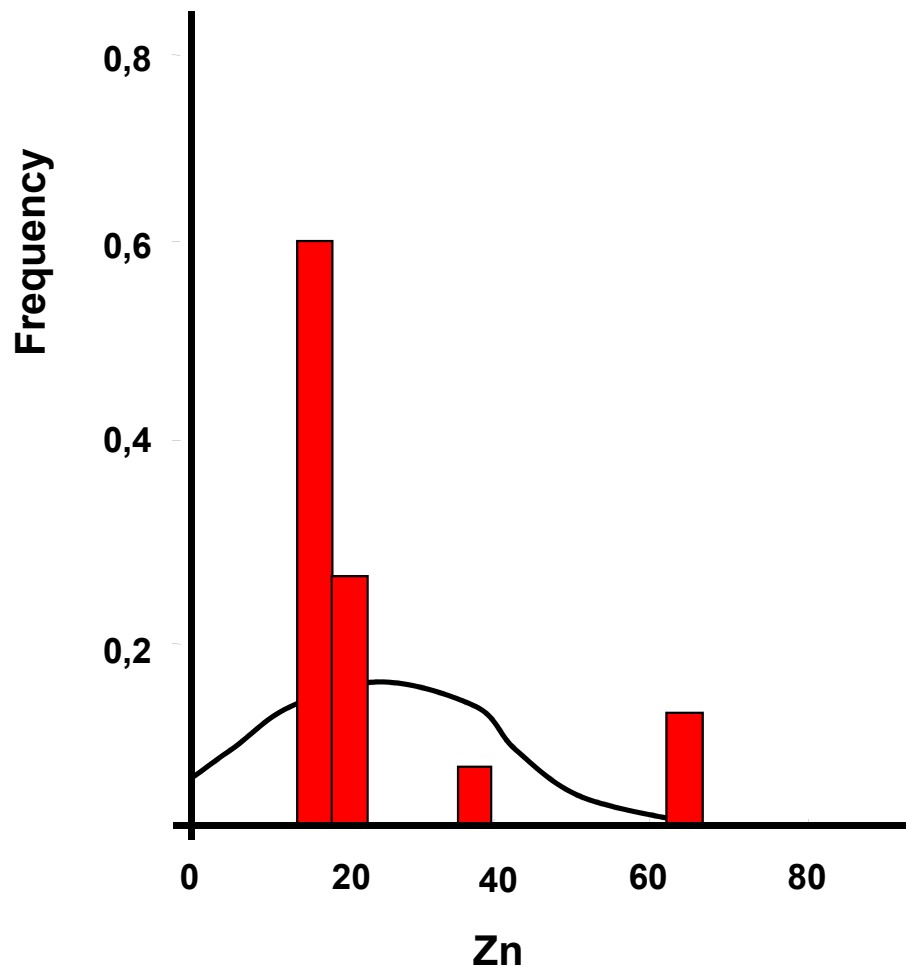
## Normal Probability Plot



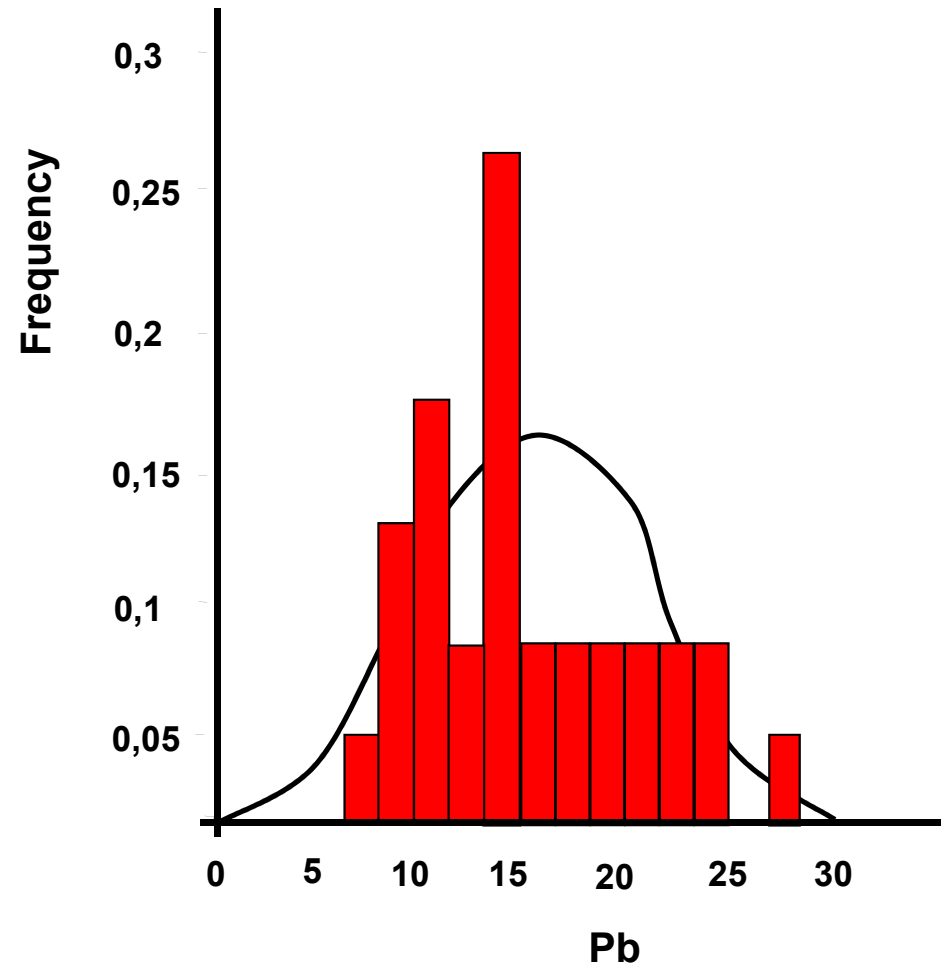
# Grafická diagnostika normality



Frequency Histogram



Frequency Histogram



# X. Statistické testy o parametrech jednoho výběrů



Jednovýběrový t-test  
Jednovýběrový test rozptylu

# Anotace

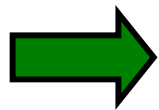


- Jednovýběrové statistické testy srovnávají některou popisnou statistiku vzorku (průměr, směrodatnou odchylku) s jediným číslem, jehož význam je ze statistické hlediska hodnota cílové populace
- Z hlediska statistické teorie jde o ověření, zda daný vzorek pochází z testované cílové populace.

# “One sample“ testy I



V případě one sample testů jde o srovnání výběru dat (tedy one sample) s cílovou populací. Pro parametrické testy musí mít datový soubor normální rozložení.



Průměr – cílová vs. výběrová populace

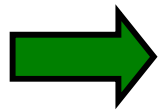
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n}$$

$H_0$	$H_A$	Testová statistika	Interval spolehlivosti
$\bar{x} \leq \mu$	$\bar{x} > \mu$	<b>t</b>	$t > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$
$\bar{x} \geq \mu$	$\bar{x} < \mu$	<b>t</b>	$t < t_{\alpha}^{(n-1)}$
$\bar{x} = \mu$	$\bar{x} \neq \mu$	<b>t</b>	$ t  > t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}$

# “One sample“ testy II



V případě one sample testů jde o srovnání výběru dat (tedy one sample) s cílovou populací. Pro parametrické testy musí mít datový soubor normální rozložení.



Rozptyl – cílová vs. výběrová populace

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2}$$

$H_0$	$H_A$	Testová statistika	Interval spolehlivosti
$s^2 \leq \sigma^2$	$s^2 > \sigma^2$	$\chi^2$	$\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2 (n-1)$
$s^2 \geq \sigma^2$	$s^2 < \sigma^2$	$\chi^2$	$\chi^2 < \chi_{\alpha}^2 (n-1)$
$s^2 = \sigma^2$	$s^2 \neq \sigma^2$	$\chi^2$	$\chi^2 > \chi_{1-\alpha/2}^2$ nebo $\chi^2 < \chi_{\alpha/2}^2$

# Srovnání odhadu průměru s předpokládanou hodnotou I



## Koncentrace antibiotika v cílovém orgánu

Při 1000 měřeních antibiotika byla zjištěna v cílovém orgánu průměrná koncentrace 202,5 jednotek a směrodatná odchylka 44 jednotek.

Požadovaná koncentrace antibiotika je 200 jednotek.

- 1) Je daný rozdíl 2,5 významný vzhledem k variabilitě znaku na hladině významnosti 5%?
- 2) Jaká je skutečná hladina významnosti?

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} = \frac{2,5}{44} \sqrt{1000} = 1,797$$



# Srovnání odhadu průměru s předpokládanou hodnotou II

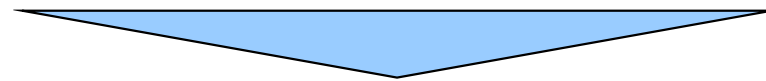


## Aktivita enzymu v buňkách

Při zjišťování aktivity enzymu v buňkách na vzorku 25 měření byl zjištěn průměr 3,5 jednotek a směrodatná odchylka 1.

1. otázka zní, zda se naměřené hodnoty našeho vzorku liší od výsledků dřívější rozsáhlé studie zaměřené na celou cílovou populaci, kde byla zjištěna průměrná aktivita 2,5 jednotky?

H0:  $x=\mu$  tedy two tailed test  $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} = \frac{3,5 - 2,5}{1} \sqrt{25} = 5$



$t_{0,975}^{24} = 2,064 \Rightarrow t > t_{1-\alpha/2}^{24} \Rightarrow$  **H0 zamítnuta při  $\alpha \leq 0,05$**

od jiné hodnoty bychom zachytili při daných hodnotách?

2. otázka – jakou minimální odchylku X od jiné hodnoty bychom zachytili při daných hodnotách?

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} = \frac{d}{s} \sqrt{n} \Rightarrow d = \frac{t_{1-\alpha/2}^v}{\sqrt{n}} s \Rightarrow d = \frac{2,064}{5} s$$

3. za předpokladu, že z praktického hlediska je významná odchylka již 0,2 jednotky, jaký minimální počet měření musíme provést, abychom ji byli schopni prokázat ?

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n} = \frac{d}{s} \sqrt{n} \Rightarrow n = \left( \frac{t_{1-\alpha/2}^v s}{d} \right)^2$$

# Srovnání odhadu průměru s předpokládanou hodnotou III

- **Příklad:** Nový lék na rakovinu plic (**předpokládáme studii s dostatečně velkým n**)

↓  
Průměrná doba přežití pacientů je **27 měsíců**

↓  
Průměrná doba přežití bez léku je **22 měsíců**



↓  
**prodlužuje nový lék přežití?**

$H_0: \mu = 22,2$  měsíce

$H_1: \mu > 22,2$  měsíce

↓  
Testová statistika: **T = 6,120**

5% kritická hodnota normálního rozdělení → 1,645

↓  
Jelikož hodnota statistiky T překračuje kritickou hodnotu

↓  
Zamítáme  $H_0$

↓  
**Doba přežití léčených pacientů se oproti neléčeným prodlouží.**