Matematika pro radiologické asistenty

Studijní materiál – podzimní semestr 2009/2010

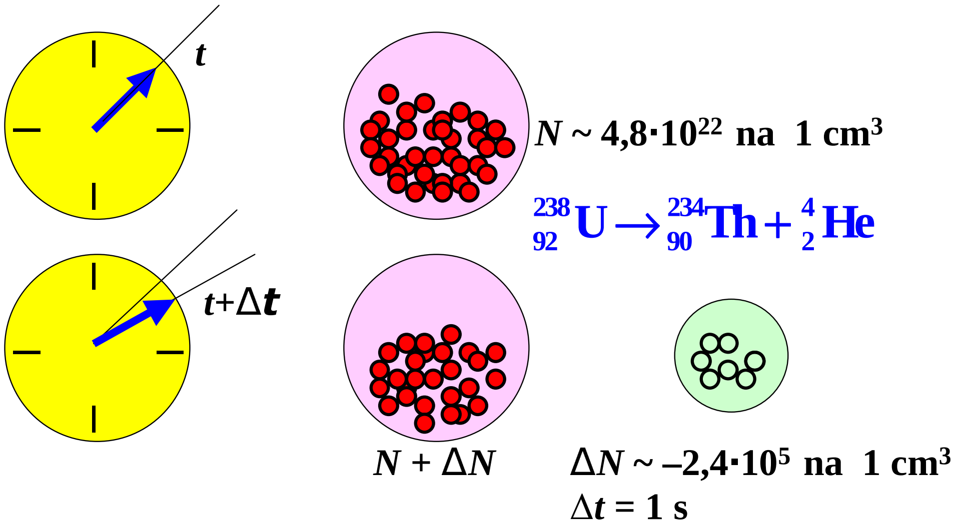
Michal Lenc a Jana Musilová

1. Základní pojmy

1.1 Úvod

Fyzika jako exaktní věda má svůj jazyk – matematiku. Ve Feynmanově knize Feynman’s Tips on Physics se o tom píše: „Matematika je překrásný předmět, má své vstupy a výstupy, ale my se snažíme zjistit, co obsahuje to minimum, které musíme znát *pro potřeby fyziky*. Přístup, který teď zvolím se neohlíží na matematiku a sleduje pouhou účelnost. Nepokouším se pronikat do matematiky. Nejdřív se musíme naučit derivovat tak, jako když počítáme 3 krát 5 nebo 5 krát 7…..“ No dobře, Feynman mluví o studentech inženýrství. Jak je tomu tedy s potřebnou matematikou pro studenty bakalářského studia oboru Radiologický asistent? Určitě se dají znalosti matematiky potřebné pro pochopení principů diagnostických nebo terapeutických metod, se kterými se bude v praxi radiologický asistent setkávat hodně redukovat. Ale třeba to zmíněné derivování se objeví mnohokrát, byť v podobně jednoduché formě, jako na ilustračním obrázku.

Rozpad jader



$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N \;, \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t)} \;, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} \,, \; \tau_{1/2} = 4{,}47\cdot 10^{9} \text{ let}$$

1.2 Reálná čísla

Počátek představ o množině reálných čísel je v úvahách o operacích sečítání a odečítání přirozených čísel, tj. čísel $1,2,3,\ldots$ Velmi brzo dojdeme k tomu, že abychom zůstali při odečítání v této množině, bylo by třeba zavádět nepohodlná omezení. Množina přirozených čísel byla proto velmi brzo rozšířena o záporná celá čísla a nulu na množinu celých čísel.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & 2 & \cdots \\ \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \end{array}$$

Ale opět při operacích násobení a dělení je možno zůstat v množině celých čísel jen při zavedení nepohodlných omezení. Množina celých čísel byla proto rozšířena na množinu racionálních čísel, tvořenou všemi různými podíly celých čísel (se zákazem nuly ve jmenovateli).

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & -1 & & & & & & 0 & & & & & & 1 & \cdots \\ \cdots & -1 & \cdots & -\frac{3}{4} & \cdots & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{4}{5} & \cdots & 1 & \cdots \end{array}$$

Stále však nemáme všechna reálná čísla. Pokud mají být odmocniny z reálných kladných čísel opět reálná čísla, nemohou být tato čísla pouze racionální, tj. vyjádřitelné ve tvaru zlomku. Vezmeme velmi jednoduchý příklad: druhou odmocninu ze dvou. Platí nerovnosti

$$\frac{17}{12} \doteq 1{,}416666667 \quad > \quad \sqrt{2} \quad > \quad \frac{41}{29} \doteq 1{,}413793103$$
$$\frac{99}{70} \doteq 1{,}414285714 \quad > \quad \sqrt{2} \quad > \quad \frac{239}{169} \doteq 1{,}414201183$$
$$\frac{3363}{2378} \doteq 1{,}414213625 \quad > \quad \sqrt{2} \quad > \quad \frac{1393}{985} \doteq 1{,}414213198$$

Vidíme, jak se interval ohraničený dvěma zlomky (tj. racionálními čísly) zmenšuje, ale číslo $\sqrt{2}$ zlomkem vyjádřit nejde, říkáme, že je to číslo iracionální. Iracionálními čísly jsou mimo jiné Ludolfovo číslo π (podle Ludolpha van Ceulena), Eulerovo číslo e (podle Leonharda Eulera). Číselná osa (uspořádaná množina reálných čísel $\mathbb{R}$) je tvořena podle velikosti uspořádanými racionálními a iracionálními čísly.

1.3 Eulerovo číslo

Všimněme si hodnot posloupnosti

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

nebo

$$1+\frac{1}{1!}, 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}, 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}, \dots, 1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}, \dots$$

v následující tabulce

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$
1	2	2
2	2,25	2,5
4	2,441406250	2,708333333
8	2,565784514	2,718278770
16	2,637928497	2,718281828
32	2,676990129	2,718281828
64	2,697344953	2,718281828

Vidíme, že se členy posloupnosti blíží (u první pomaleji, u druhé rychleji) limitní hodnotě. Tato hodnota je iracionální číslo, které je nazýváno Eulerovým číslem (taktéž základem přirozených logaritmů) a značení se e. Přibližné hodnoty dvou základních čísel elementární matematiky jsou

$$\pi \doteq 3{,}14159\,26535\,89793\,2385$$
$$e \doteq 2{,}71828\,18284\,59045\,2354$$

Číslo e je tedy limitní hodnota konečné řady pro $n \to \infty$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Faktoriál nuly je definován jako $0! = 1$, proto můžeme užít kompaktnějšího zápisu

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

1.4 Mocnina

Základem jsou mocniny s celočíselnými koeficienty. *n*–tá mocnina je *n*–krát opakované násobení čísla sebou samým

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n} \quad , \quad x^1 = x \quad , \quad x^2 = x \cdot x \quad \ldots$$

Je hned vidět, že

$$x^{n+1} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n+1} = x \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n} = x \cdot x^n$$

Je-li $n = 0$, dostáváme

$$x = x \cdot x^0 \quad \Rightarrow \quad x^0 = 1$$

Je-li $n = -1$, dostáváme

$$x^0 = x \cdot x^{-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = x \cdot x^{-1} \quad \Rightarrow \quad x^{-1} = \frac{1}{x}$$

obecně

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Další důležité pravidlo je

$$\left(x^n\right)^k = \underbrace{\underbrace{\left(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x\right)}_{n} \cdot \underbrace{\left(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x\right)}_{n} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x\right)}_{n}}_{k} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}_{n \cdot k}$$

tedy

$$\left(x^n\right)^k = x^{nk}$$

Stejnými úvahami odvodíme pravidla

$$\left(x\, y\right)^n = x^n\, y^n \quad , \quad x^{n+k} = x^n\, x^k$$

Velkým zobecněním je zavedení *n* – té odmocniny jako čísla, pro které platí

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$

Běžně užívané značení je

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad , \quad \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{1}{n}n} = x^1 = x$$

Definiční obor n – té odmocniny není triviální, vždy jsou to však všechna nezáporná reálná čísla. Nyní máme připraveno zobecnění mocnitele na racionální čísla jako

$$x^{\frac{k}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(x^k\right)^{\frac{1}{n}}$$

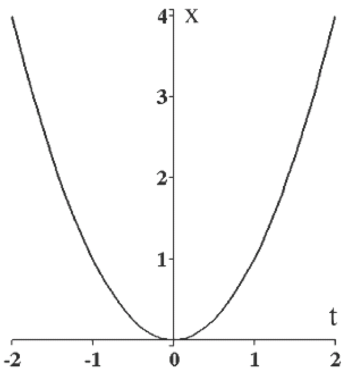
Poslední zobecnění mocnitele je mít na jeho místě libovolné reálné číslo, toto zobecnění může počkat až po definici exponenciální a logaritmické funkce.

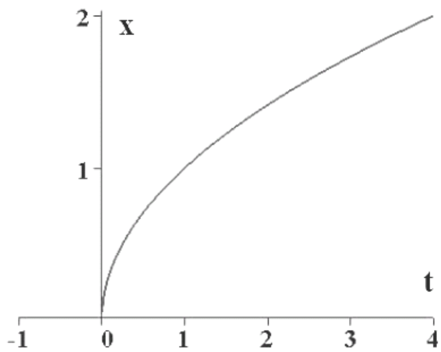
x

2. Funkce, její limita a spojitost

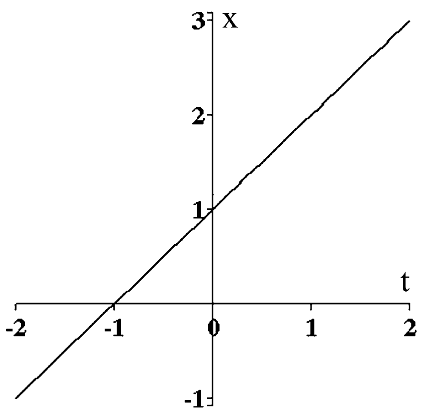
S jistou dávkou matematické nepřesnosti lze říci, že funkce vyjadřuje závislost určité veličiny (závisle proměnné) na veličinách jiných (nezávisle proměnných). Příkladem mohou být již zmíněné závislosti souřadnic částice na čase.

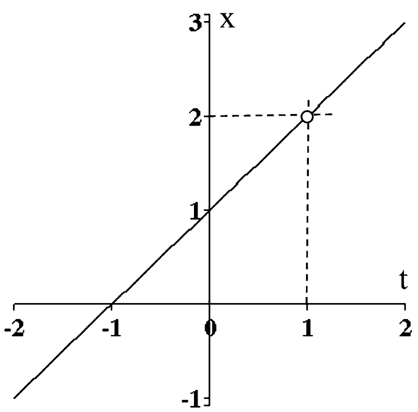
Uvažujme nyní o případu jedné reálné nezávisle proměnné t a jedné reálné závisle proměnné x. Píšeme $x = f(t)$ a čteme „x je funkcí t“. Symbol f, tzv. funkční předpis, určuje pravidlo, kterým jsou hodnotám t přiřazeny hodnoty x. Někdy píšeme jen $x = x(t)$ (tento zápis bývá ve fyzice častější). Hodnoty, kterých může nabývat proměnná t, tvoří definiční obor funkce značený D_f. Obor D_f je buď zadán současně s uvedením pravidla f, nebo je automaticky chápán jako množina všech hodnot t, pro něž lze podle pravidla f vyčíslit hodnotu x. Např. pro $x = \sqrt{t}$ musí být $t \geq 0$, neboť záporné hodnoty nelze odmocňovat. Říkáme, že f je definována na množině D_f. Hodnoty, jichž bude nabývat proměnná x, probíhá-li t definiční obor D_f, tvoří obor hodnot funkce, H_f. V rovině souřadnic t (vodorovná osa) a x (svislá osa) vytvoří body o souřadnicích $\left[t, f(t)\right]$ graf funkce, označovaný jako G_f. Na následujících obrázcích jsou čtyři příklady.





Na prvním obrázku je graf funkce $x=t^2$. Definičním oborem je celá reálná osa $D_f=(-\infty,\infty)$, obor hodnot funkce je $H_f=[0,\infty)$. Na druhém obrázku je graf funkce $x=\sqrt{t}$. Definičním oborem je kladná reálná poloosa $D_f=[0,\,\infty)$, obor hodnot funkce je $H_f=[0,\infty)$. Na třetím obrázku (nalevo) je graf funkce $x=t+1$. Definičním oborem je celá reálná





osa $D_f=(-\infty,\infty)$, obor hodnot funkce je taktéž celá reálná osa $H_f=(-\infty,\infty)$. Na čtvrtém obrázku je graf funkce

$$x=\frac{t^2-1}{t-1}$$

Tato funkce není definována v bodě $t=1$, je tedy jejím definičním oborem sjednocení intervalů $D_f=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ a oborem hodnot $H_f=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$. Protože však tato funkce má v bodě $t=1$ limitu

$$\lim_{t\to1}\frac{t^2-1}{t-1}=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t+1)}{t-1}=\lim_{t\to1}(t+1)=2$$

můžeme definovat novou funkci

$$x = \begin{cases} \dfrac{t^2-1}{t-1} & t \neq 1 \\ 2 & t = 1 \end{cases}$$

a tato funkce už má jako definiční obor i obor hodnot celou reálnou osu. Toto je příklad, kdy „dodefinováním“ původní funkce dosáhneme toho, že „nová“ funkce má širší definiční obor, často pak celou reálnou osu

3. Některé elementární funkce

3.1 Polynomy

Funkci

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

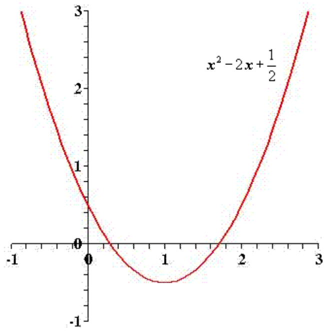
kde koeficienty jsou reálná čísla ($a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$) nazýváme polynomem n-tého stupně (předpokládáme $a_n \neq 0$). Pomocí součtového symbolu zkracujeme zápis na

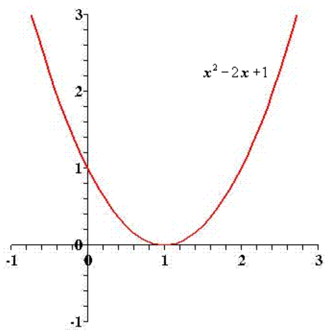
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

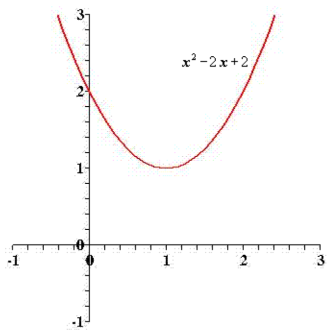
Při tomto zápisu bereme v úvaho, že $x^0 = 1$ pro všechna x. Vezměme polynomy nejnižších stupňů (pro vytvoření grafu funkce v rovině x-y značíme $y = f(x)$)

$$y = a \quad , \quad y = a\,x + b \quad , \quad y = a\,x^2 + b\,x + c$$

Grafem polynomu stupně nula je přímka vedená rovnoběžně s osou x ve vzdálenosti a, grafem polynomu stupně jedna je přímka se směrnicí a (podle předpokladu je a jako koeficient u nejvyšší mocniny různý od nuly), která protíná osu y v bodě b a osu x v bodě $-b/a$. Grafem polynomu stupně dva je parabola, která protíná osu y v bodě c, protíná osu x ve dvou bodech (pokud $b^2 > 4ac$), dotýká se osy x v bodě $-b/(2a)$ (pokud $b^2 = 4ac$) nebo leží celá nad nebo pod osou x (pokud $b^2 < 4ac$). Uvedené tři případy jsou na obrázcích.







Zmíníme se ještě o polynomu, který vzniká z mocniny dvojčlenu

$$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \cdots + \binom{n}{n-1} x a^{n-1} + a^n$$

kde

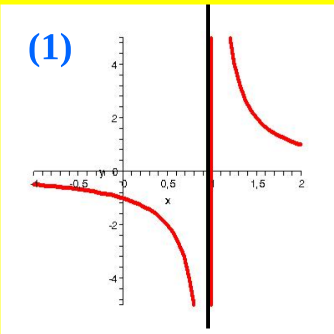
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad , \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \quad , \quad 0! = 1$$

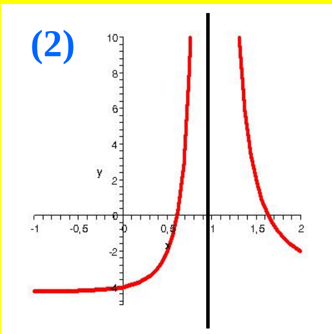
S výrazy typu kombinačního čísla nebo faktoriálu se také setkáme při úvahách o pravděpodobnosti.

3.2 Racionální funkce lomená

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

$n = 0$, $m = 1$ … nepřímá úměra $\boldsymbol{y = a\,(x - c)^{-1}}$





(1) $y = \dfrac{1}{x-1}$

(2) $y = \dfrac{-3x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$

3.3 Exponenciální funkce a logaritmus

Připomeňme, že jsme zapsali Eulerovo číslo jako nekonečnou řadu

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Nyní definujeme exponenciální funkci jako

$$y = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Pro exponenciální funkci se často užívá také označení $\exp(x)$. Při zápisu prvních několika členů řady máme

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Vezměme součin dvou exponenciálních funkcí

$$\exp(x)\exp(y) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots\right) =$$

$$1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2!} + \cdots = \exp(x+y)$$

Toto je velmi důležitá vlastnost: exponenciální funkce součtu je rovna součinu exponenciálních funkcí jednotlivých sčítanců

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)} \qquad \boxed{\exp(k\,x) = \left[\exp(x)\right]^k}$$

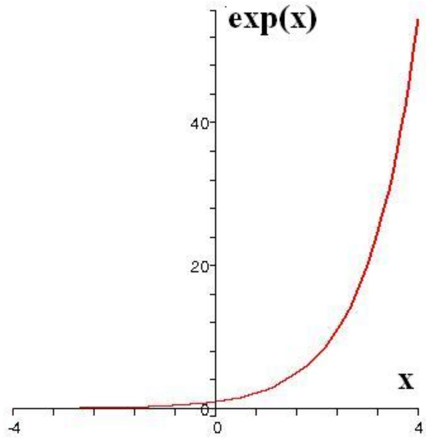
Z definice exponenciální funkce pomocí nekonečné řady plyne $\exp(0)=1$. Dále vidíme, že funkční hodnoty nabývají pouze kladných hodnot. Pro $x>0$ je zřejmé z definice pomocí řady (všechny členy jsou kladné a prvním členem je jednička), že dokonce $x>0 \Rightarrow \exp(x)>1$. Pro $x<0$ vyjdeme ze vztahu

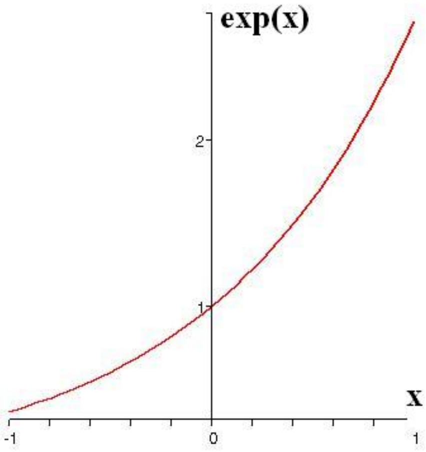
$$\exp(x)\exp(-x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$$

a protože $-x$ je kladné, je jako v předešlém případě $\exp(-x)$ kladné a větší jak jedna. Rozdíl je v tom, že nyní $x<0 \Rightarrow 0<\exp(x)<1$. Funkce $\exp(x)$ je rostoucí. Pro $y>0$ je

$$\exp(x+y) - \exp(x) = \exp(x)\left[\exp(y) - 1\right] > 0$$

Graf exponenciální funkce je na obrázku.





Přirozený logaritmus je inversní funkcí k exponenciální funkci. To znamená, že zobrazujeme-li funkcí přirozený logaritmus číslo, které jsme získali zobrazením čísla x exponenciální funkcí, dostaneme opět číslo x, resp. v opačném pořadí zobrazujeme-li exponenciální funkcí číslo, které jsme získali zobrazením čísla x logaritmickou funkcí, dostaneme opět číslo x

$$\ln(\exp(x)) = x \quad , \quad \exp(\ln(x)) = x$$

Z definice je zřejmé, že definičním oborem funkce logaritmus jsou nezáporná čísla. Protože $\exp(0)=1$, musí být $\ln(1)=0$. Označíme-li si $x=\exp(\xi)$ a $y=\exp(\eta)$, můžeme psát

$$\ln(x)+\ln(y)=\xi+\eta=\ln(\exp(\xi+\eta))=\ln(\exp(\xi)\exp(\eta))=\ln(x\,y)$$

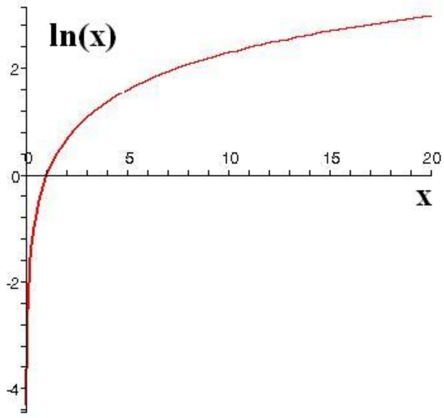
Dostáváme tak důležitý vztah: logaritmus součinu je roven součtu logaritmů jednotlivých součinitelů

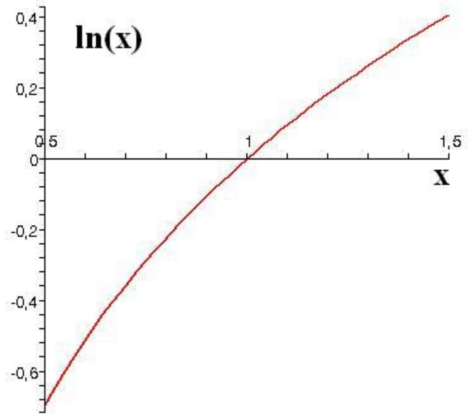
$$\boxed{\ln(x\,y)=\ln(x)+\ln(y)} \quad \boxed{\ln(x^k)=k\ln(x)}$$

Jak z této vlastnosti plyne (položme $y=1/x$), platí

$$\ln(x)=-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

a logaritmus je rostoucí funkce, pro $x>1$ kladná, pro $0<x<1$ záporná. Graf logaritmické funkce je na obrázku.





Mocninu s libovolným reálným mocnitelem definujeme pomocí vztahu

$$a^x = \left[\exp\left(\ln(a)\right)\right]^x = \exp\left(x \ln(a)\right)$$

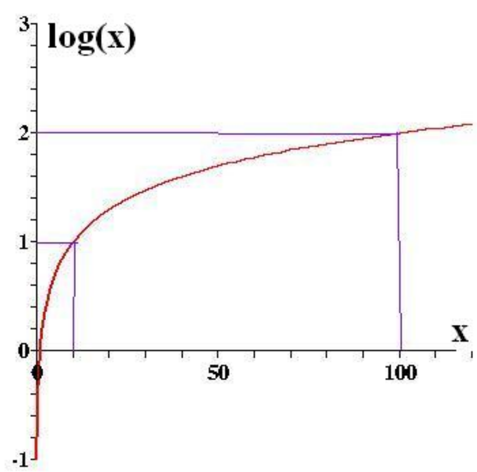
Kromě přirozeného logaritmu lze definovat také logaritmus při libovolném základu pomocí vztahu

$$\log_a\left(a^x\right) = x \quad , \quad a^{\log_a(x)} = x$$

Působení funkce přirozený logaritmus na obě strany druhého výrazu dává

$$\log_a(x)\ln(a) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

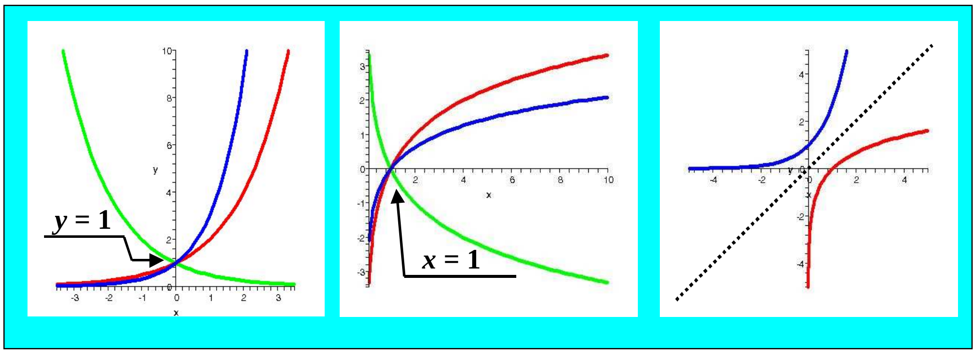
Nejčastěji je užíván dekadický logaritmus (tj. logaritmická funkce se základem $a=10$), mnohdy proto není ani základ zmiňován, mluví se prostě o logaritmu. Graf dekadického logaritmu $\log(x)$ s vyznačením $\log(10)=1$ a $\log(100)=\log\left(10^2\right)=2$ je na obrázku.



Na obrázku je znázorněno několik příkladů umocnění pevného základu na x a odpovídající inverzní operace.

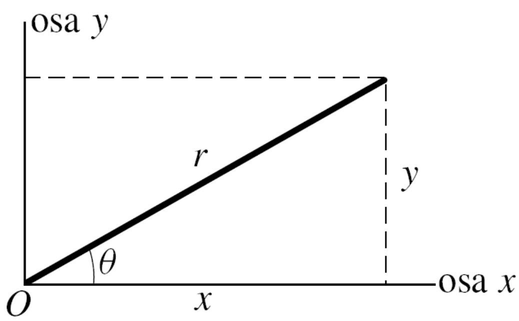
$$y = z^x, \quad x = \log_z y, \quad z > 0,\ z \neq 1$$

$$0{,}5^x, 2^x, 3^x \qquad \log_{0,5} x, \log_2 x, \log_3 x \qquad 10^x, \log x$$



3.4 Goniometrické funkce

Vycházíme z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku. Goniometrické funkce jsou pro úhly z intervalu $(0, \pi/2)$ definovány jako poměry stran tohoto trojúhelníku:



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad , \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \quad , \quad \mathrm{cotg}\,\theta = \frac{x}{y}$$

Je přímo vidět, že

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \mathrm{cotg}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta}$$

a z Pythagorovy věty

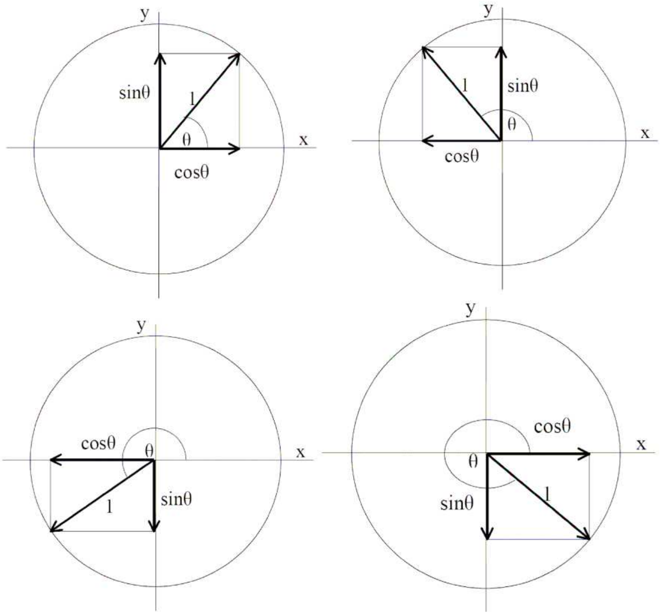
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

V krajních hodnotách intervalu je

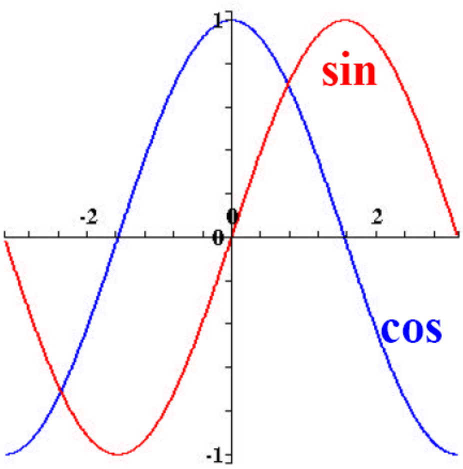
$$\sin 0 = \mathrm{tg}\, 0 = 0 \quad , \quad \cos 0 = 1 \quad , \quad \mathrm{cotg}\, 0 = \infty$$

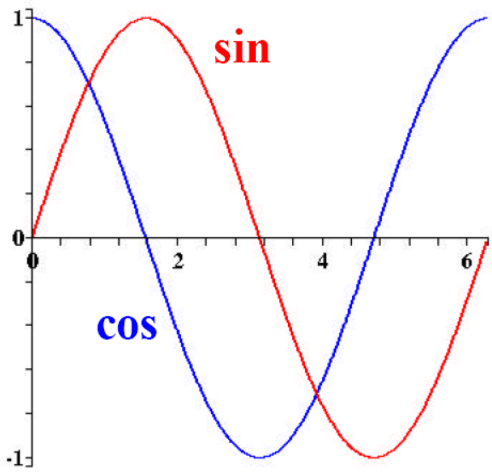
$$\cos\frac{\pi}{2} = \mathrm{cotg}\frac{\pi}{2} = 0 \quad , \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad , \quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$$

O znaménku funkcí sinus a kosinus ve čtyřech kvadrantech dává představu následující obrázek:

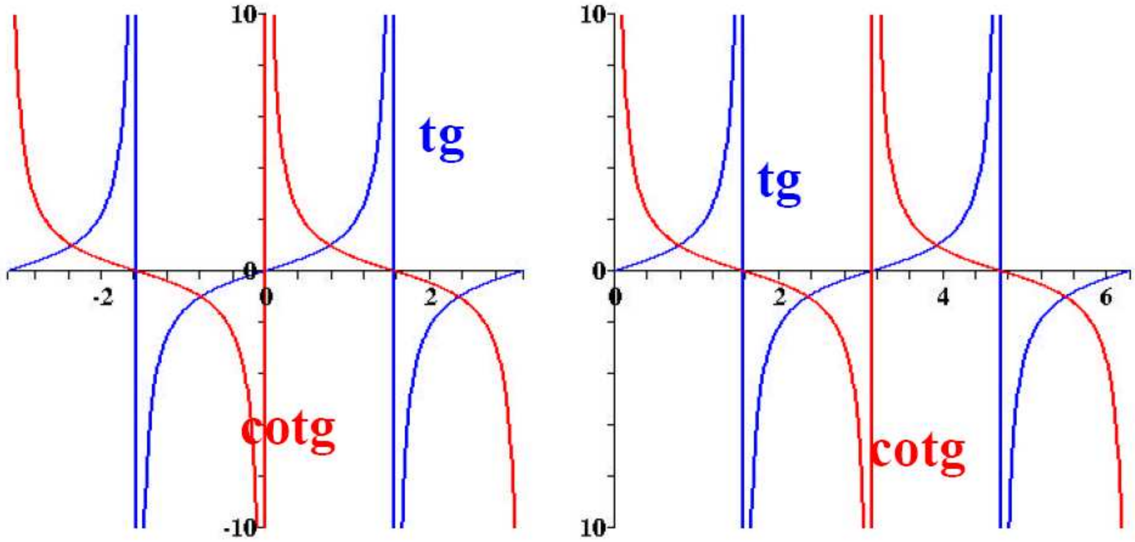


Průběh funkcí sinus a kosinus na intervalech $[-\pi, \pi]$ a $[0, 2\pi]$ je na obrázcích:





Na dalších obrázcích je na těchže intervalech zobrazen průběh funkcí tangens a kotangens:



Vzhledem k vlastnostem průmětů průvodičů bodů na jednotkové kružnici a periodě 2π na této kružnici můžeme pro goniometrické funkce psát řadu užitečných vztahů. Pro kosinus tak máme

$$\sin\theta = \sin(2\pi+\theta) = \sin(\pi-\theta) = -\sin(-\theta) = -\sin(\pi+\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

a pro kosinus

$$\cos\theta = \cos(2\pi+\theta) = -\cos(\pi-\theta) = \cos(-\theta) = -\cos(\pi+\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

Funkce tangens a kotangens jsou periodické s periodou π, takže

$$\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}(\pi+\theta) = -\mathrm{tg}(-\theta)$$
$$\mathrm{cotg}\,\theta = \mathrm{cotg}(\pi+\theta) = -\mathrm{cotg}(-\theta)$$

Již jsme uvedli důležitý vztah (všimněte si trochu jiného zápisu druhé mocniny)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Pro úpravy výrazů s goniometrickými funkcemi jsou nepostradatelné tzv. součtové vzorce. Pro funkce součtu či rozdílu dvou úhlů platí

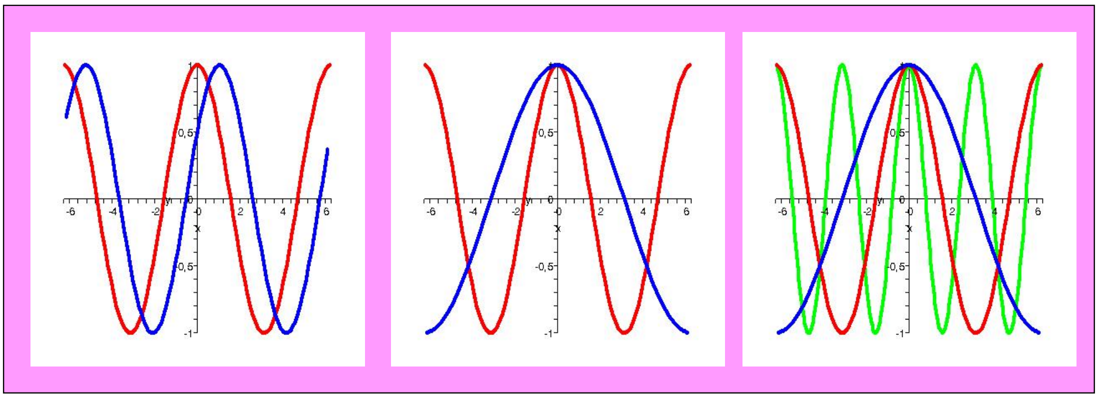
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

Pro součet nebo rozdíl funkcí dvou úhlů pak platí

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad , \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \quad , \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Na obrázku jsou příklady goniometrických funkcí obecného lineárního argumentu $\alpha = a\,x + b$.

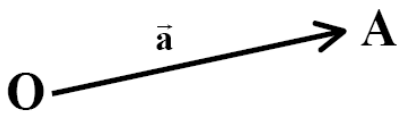
$\cos x, \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad$ $\cos x, \cos\frac{x}{2}$ $\qquad$ $\cos x, \cos\frac{x}{2}, \cos 2x$



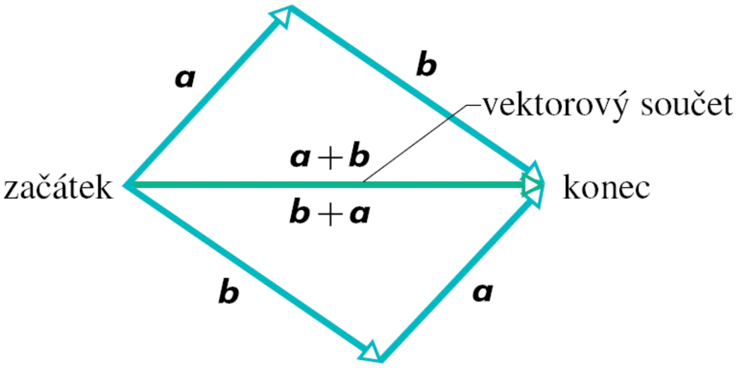
4. Počítání s vektory

(Většina obrázků převzata z učebnice HRW: Fyzika.)

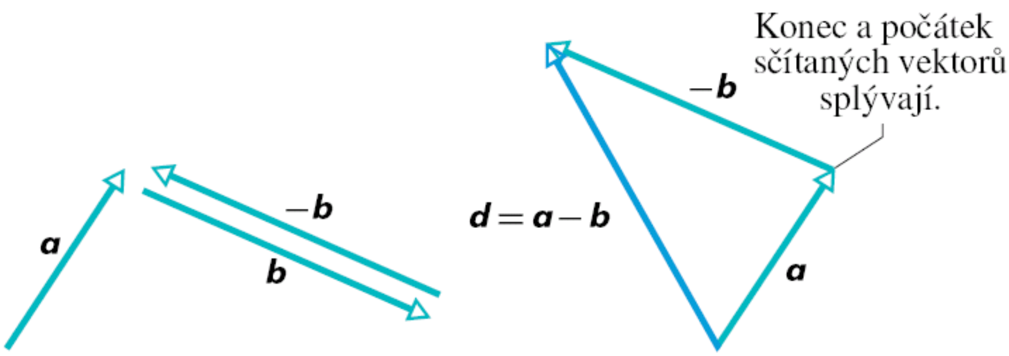
Vektor je zadán směrem a velikostí. Je tedy zobrazen orientovanou úsečkou (vyznačení šipkou).



Vektory můžeme násobit reálnými čísly. Absolutní hodnota násobitele udává, kolikrát se změní délka vektoru, znaménko pak, zůstane-li orientace stejná nebo zda se změní na opačnou. Vektory můžeme sčítat a odečítat (odečtení vektoru $\vec{b}$ od vektoru $\vec{a}$ je totéž jako přičtení vektoru $-\vec{b}$ k vektoru $\vec{a}$. Grafické znázornění je na následujících dvou obrázcích. Všimněme si, že i když budeme uvažovat vektory ve třech rozměrech našeho prostoru, vždy najdeme rovinu (tedy dvourozměrný prostor), ve které leží uvažované dva vektory a obrázky tedy můžeme pohodlně malovat v této rovině. Sečítání vektorů je komutativní (nezáleží na pořadí sčítanců).

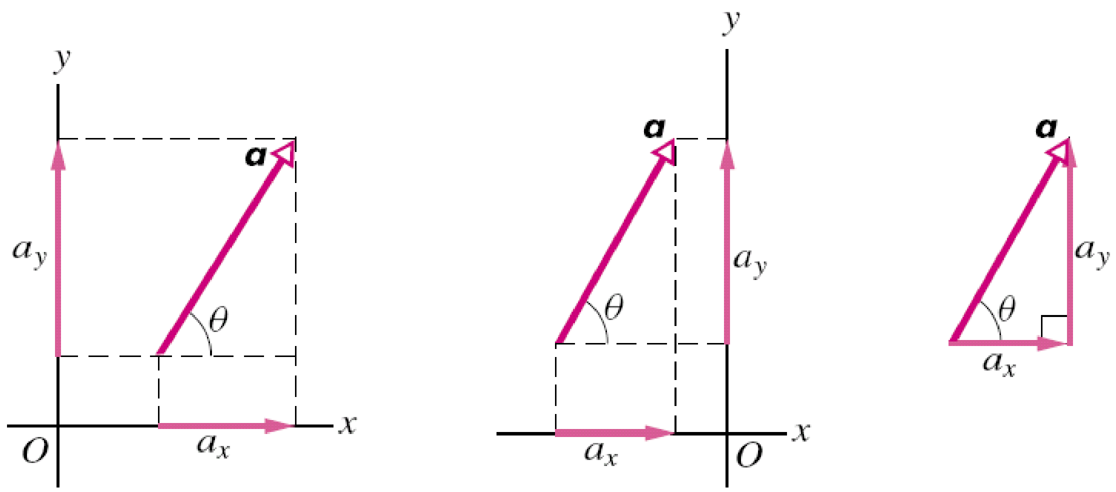


Odečtení vektoru je, jak již bylo řečeno, totéž jako přičtení vektoru opačně orientovaného:



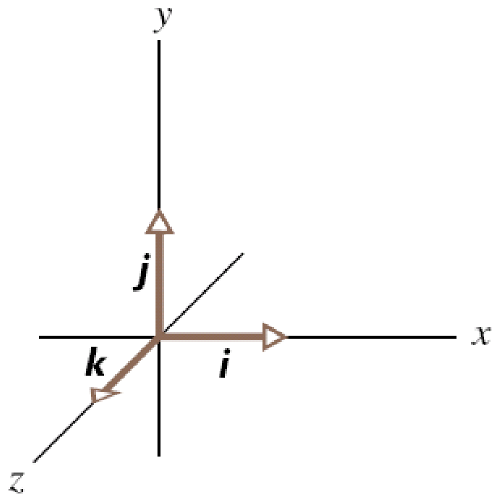
Početně je snadnou cestou rozklad vektorů do složek kartézské soustavy ($a_x = a\cos\theta$, $a_y = a\sin\theta$), takže pro součet vektorů je

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad , \quad c_x = a_x + b_x \quad , \quad c_y = a_y + b_y$$



Ve třech rozměrech značíme tři základní jednotkové vektory (pravotočivé) kartézské soustavy $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a libovolné dva vektory zapíšeme jako

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$



Běžný způsob zápisu vektoru pomocí jeho složek je

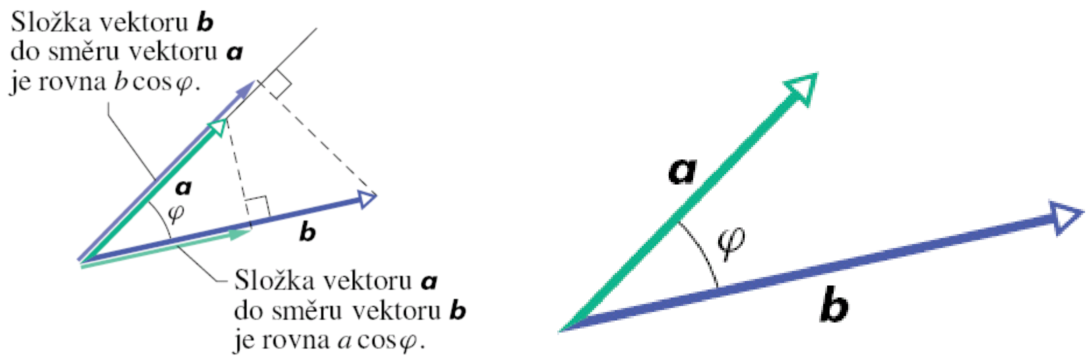
$$\vec{a} = \left(a_x , a_y , a_z\right)$$

Lineární kombinace vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (první vektor násobíme nějakým reálným číslem α a přičteme k němu druhý násobený číslem β) je opět vektor

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \quad , \quad \vec{c} = \left(\alpha a_x + \beta b_x , \alpha a_y + \beta b_y , \alpha a_z + \beta b_z\right)$$

Při násobení vektorů rozeznáváme dva druhy součinů – skalární a vektorový. Pro skalární součin je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos\varphi$$



Velikost vektoru je podle tohoto vztahu odmocninou ze skalárního součinu vektoru se sebou samým, protože

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \cos 0 = a^2$$

Standardní značení velikosti vektoru $\vec{a}$ je $|\vec{a}|$. Pouze tam, kde nemůže dojít k záměně (jako v našich vztazích zde), stačí psát jen *a*. Jsou-li dva vektory navzájem kolmé, je jejich skalární součin roven nule, protože

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Pro jednotkové navzájem kolmé vektory kartézské soustavy tak máme

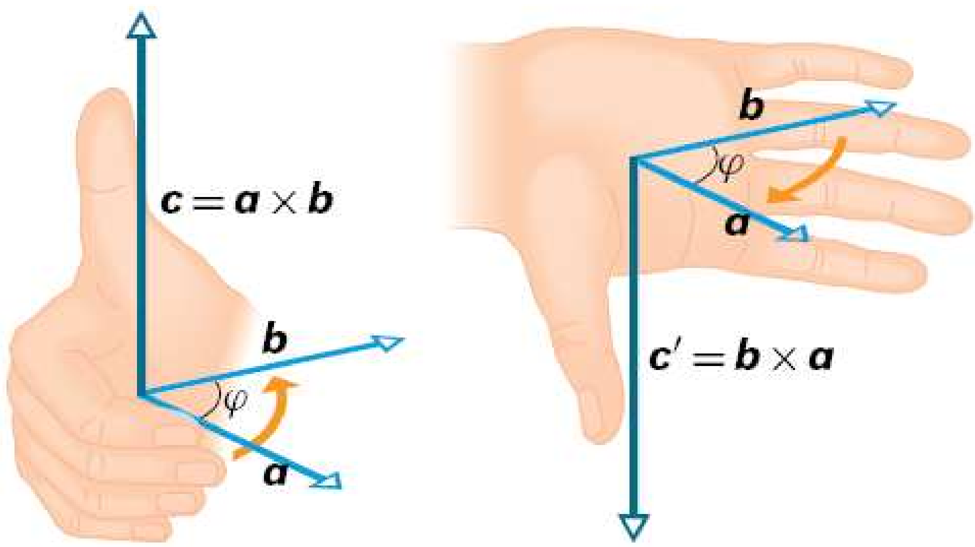
$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \quad , \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

Potom můžeme skalární součin dvou libovolných vektorů zapsat ve složkách jako

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\right) = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z$$

Vektorový součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ vytváří vektor $\vec{c}$, který je kolmý k rovině, v níž leží tyto vektory a má velikost

$$c = a\,b\sin\varphi$$



Vektorový součin vektoru se sebou samým dává nulový vektor, protože pro velikost máme

$$c = a^2\sin 0 = 0$$

Vektorový součin dvou navzájem kolmých jednotkových vektorů má opět jednotkovou velikost, protože

$$c = 1\cdot 1\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Pro základní vektory kartézské soustavy tedy můžeme psát

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0 \quad , \quad \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \quad , \quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

Potom můžeme vektorový součin dvou libovolných vektorů zapsat ve složkách jako

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\right)\times\left(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\right) =$$
$$\left(a_y\,b_z - b_y\,a_z\right)\vec{i} + \left(a_z\,b_x - b_z\,a_x\right)\vec{j} + \left(a_x\,b_y - b_x\,a_y\right)\vec{k}$$

nebo ve standardním zápisu

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_y\,b_z - b_y\,a_z\,, a_z\,b_x - b_z\,a_x\,, a_x\,b_y - b_x\,a_y\right)$$

5. Soustavy lineárních rovnic, matice

5.1 Triviální příklady

V jedné nejmenované nemocnici byli zvyklí na dodávku ampulí s lékem, který se přidával do infuzí. Ampule měly vždy objem V a koncentrace účinné látky v ní byla p% objemových. Personál měl příkaz vrchní sestry dávat do infuze o výsledném objemu W vždy jednu ampuli léku. Jednou dodala lék jiná firma a ampule měly objem dvojnásobný, tj. 2V, koncentrace účinné látky byla také dvojnásobná. Vrchní sestra přikázala dávat do infuzí polovinu obsahu ampule. Co myslíte, je to správný příkaz?

Řešení: Zavedeme označení: objemy budou v cm³ (ml), tedy W objem infuze (v obou případech stejný) a V objem ampule první firmy. p bude koncentrace účinné látky v objemových procentech v prvním případě. Objem účinné látky a koncentrace jsou

$$U_1 = \frac{p}{100}V \quad\Rightarrow\quad q_1 = \frac{U_1}{W} = \frac{p}{100}\frac{V}{W} \quad ,$$
$$U_2 = \frac{2\,p}{100}\frac{2V}{2} \quad\Rightarrow\quad q_2 = \frac{U_2}{W} = 2\frac{p}{100}\frac{V}{W} = 2\,q_1$$

Závěr: Snad nebyla dvojnásobná dávka smrtelná. Obecnější úloha je taková: Předpokládejme, že druhá firma dodala ampule o objemu Ω=20 ml s koncentrací účinné látky p=50 % (objemových). Do jakého objemu základu infuze mají sestry vmíchat jednu ampuli, aby dosáhly předepsané koncentrace q=5 % ? Označme x objem infuze (neznámá místo objemu W z předchozí úlohy). Objem účinné látky v ampuli je

$$\omega = \frac{p}{100}\Omega$$

Rovnice pro neznámy objem x (lineární rovnice pro neznámou veličinu x) je pak

$$q = 100\cdot\frac{\omega}{x+\Omega} \quad\Rightarrow\quad q\,x + \left(q - p\right)\Omega = 0$$

Řešení:

$$x = \Omega\left(\frac{p}{q} - 1\right)\text{ml} = 20\left(\frac{50}{5} - 1\right)\text{ml} = 180\text{ ml}$$

Nepatrně složitější úloha je tato: Do infuze o celkovém objemu W=200 ml se přidávají dvě účinné látky. První z nich je v ampulích o objemu V_1=20 ml v koncentraci p_1=30 % (objemových), druhá v ampulích o objemu V_2 =40 ml v koncentraci p_2=50 %. Výsledná koncentrace obou účinných látek v infuzi má být q=15 % a poměr jejich koncentrací $q_1/q_2 = p = 0{,}5$ (jedna ku dvěma). Kolik ml roztoku 1 a kolik ml roztoku 2 je třeba dát do infuze ? Řešení – záznam úlohy: Označme x hledaný objem roztoku 1 a y hledaný objem roztoku 2 (máme tedy dvě neznámé, x a y). Objem účinné látky 1 v objemu x bude $U_1 = (p_1/100)\,x$, objem účinné látky 2 v objemu y bude $U_2 = (p_2/100)\,y$. Koncentrace látek v infuzi pak budou

$$q_1 = \frac{U_1}{W} = \frac{p_1}{100}\frac{x}{W} \quad , \quad q_2 = \frac{U_2}{W} = \frac{p_2}{100}\frac{y}{W}$$

Pro naše dvě neznámé máme dvě podmínky

$$q_1 + q_2 = q \quad , \quad \frac{q_1}{q_2} = p$$

Přepíšeme tyto podmínky pomocí neznámých veličin x a y a známých hodnot p_1, p_2, W, q a p na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} p_1\,x + p_2\,y &= q\,W \\ p_1\,x - p\,p_2\,y &= 0 \end{aligned}$$

Řešení soustavy rovnic: Odečteme druhou rovnici od první a vyřešíme vzhledem k y, potom dosadíme toto řešení do druhé rovnice (samozřejmě je možné dosadit i do první rovnice, řešení pro x musí být stejné). Dostaneme tak

$$x = \frac{p\,q\,W}{p_1(1+p)}\,,\; y = \frac{q\,W}{p_2(1+p)} \quad \Rightarrow \quad x \doteq 33,\; y = 40$$

5.2 Matice

Tabulku tvořenou m řádky a n sloupci čísel nazýváme maticí dimense $m \times n$

$$\mathbf{A} \equiv (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matice stejné dimense $m \times n$ můžeme sečítat a násobit číslem

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad &\Rightarrow \quad (c_{ik}) = (a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik}) \\ \mathbf{C} = \alpha\,\mathbf{A} \quad &\Rightarrow \quad (c_{ik}) = \alpha(a_{ik}) = (\alpha\,a_{ik}) \end{aligned}$$

Matici $\mathbf{A}$ dimense $m \times n$ můžeme zprava vynásobit maticí $\mathbf{B}$ dimense $n \times s$ a získat tak matici $\mathbf{C}$ dimense $m \times s$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \left(c_{ik}\right) = \left(\sum_{p=1}^{n} a_{ip}\, b_{pk} \right)$$

nebo můžeme matici $\mathbf{A}$ dimense $m \times n$ vynásobit zleva maticí $\mathbf{B}$ dimense $s \times m$ a získat tak matici $\mathbf{C}$ dimense $s \times n$

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \left(c_{ik}\right) = \left(\sum_{p=1}^{m} b_{ip}\, a_{pk} \right)$$

Vidíme, že pro sčítání zůstává komutativita (nezávislost na pořadí) sčítanců zachována i u matic, u násobení to pro součinitele obecně neplatí. Především: násobit můžeme jen matice, které mají stejný počet řádků nebo sloupců. Ale i pro čtvercové matice (dimense $n \times n$) je komutativita spíše výjimkou.

Obrazně vyjádřeno, prvky matice součinu vytváříme takto: v prvním řádku jsou postupně „první řádek levé matice krát první sloupec pravé matice“, „první řádek levé matice krát druhý sloupec pravé matice“ až „první řádek levé matice krát poslední sloupec pravé matice“, v druhém řádku jsou postupně „druhý řádek levé matice krát první sloupec pravé matice“, „druhý řádek levé matice krát druhý sloupec pravé matice“ až „druhý řádek levé matice krát poslední sloupec pravé matice“ atd. až po poslední řádek matice součinu, kde jsou postupně „poslední řádek levé matice krát první sloupec pravé matice“, „poslední řádek levé matice krát druhý sloupec pravé matice“ až „poslední řádek levé matice krát poslední sloupec pravé matice“. Součin „řádek krát sloupec“ pak znamená, že sečteme součin prvního prvku řádku s prvním prvkem sloupce se součinem druhého prvku řádku s druhým prvkem sloupce atd. až po součin posledního prvku řádku s posledním prvkem sloupce.

Příklad pro čtvercové matice dimense 2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Počítáme

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0\\ 1\cdot0+-1\cdot1 & 0\cdot1+-1\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot-1\\ 1\cdot1+0\cdot-1 & 1\cdot0+0\cdot-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot-1\\ 0\cdot1+-1\cdot0 & 0\cdot0+-1\cdot-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0+1\cdot1 & 0\cdot1+1\cdot0\\ 1\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Při počítání se nám objevila (ne náhodně, příklad je tak vybrán) jednotková matice

$$\mathbf{E}=(\delta_{ik})=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

tj. čtvercová matice, která má na diagonále jedničky a ostatní prvky jsou rovny nule. Symbol δ_{ik} je Kroneckerovo delta, pro které

$$\delta_{ik}=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\end{cases}$$

Násobení jednotkovou maticí ponechává původní matici nezměněnou. Vezměme jednotkovou matici dimense $n\times n$, matici $\mathbf{A}$ dimense $m\times n$ a matici $\mathbf{B}$ dimense $n\times s$. Potom je

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}\quad\Rightarrow\quad c_{ik}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}\,\delta_{pk}=a_{ik}\quad,\quad\mathbf{C}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\quad\Rightarrow\quad c_{ik}=\sum_{p=1}^{n}\delta_{ip}\,b_{pk}=b_{ik}$$

Obecně nemusí být všechny řádky matice lineárně nezávislé (tj. pro nějaký řádek je v takovém případě možné najít lineární kombinaci zbývajících řádků, že je rovna tomuto řádku). Totéž platí, uvažujeme-li místo řádků o sloupcích. **Hodnost matice** je definována jako maximální počet lineárně nezávislých řádků. Hodnost matice hraje podstatnou roli při úvahách o počtech řešení soustavy lineárních rovnic.

5.3 Matice a řešení soustavy rovnic

Uvažujme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&=\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}$$

kde a_{ij}, b_i $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ jsou koeficienty soustavy rovnic (tj. známá čísla) a x_j $1 \le j \le n$ jsou **neznámé**. Všechny n-tice $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, které vyhovují rovnicím, tvoří **řešení** soustavy rovnic. Se soustavou rovnic jsou spojeny matice soustavy a rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic jsou ty úpravy, které nemění jejich řešení. Je to zajisté násobení libovolné rovnice nenulovým číslem a také přičtení násobku libovolné rovnice k jiné libovolné rovnici. U matic soustavy jsou to tytéž úpravy prováděná s řádky matic. Máme proto tyto ekvivalentní úpravy matice soustavy:

(1) násobení všech prvků v libovolném řádku nenulovým číslem

(2) přičtení k - násobku prvků v libovolném řádku k jinému libovolnému řádku

Hodnost matice jsme definovali jako počet lineárně nezávislých řádků. Převedeme-li ekvivalentními úpravami matici na schodovitý tvar (v daném řádku je vlevo více sloupců s nulami než v řádku nad ním), je pak hodnost přímo dána počtem nenulových řádků. Nejlépe bude ukázat příklady. Musíme jich však zvolit celou řadu, protože máme také velký výběr situací: jaký je počet rovnic a počet neznámých a jaké jsou hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy (budeme značit $h(A)$ a $h(B)$).

Příklad 1 ($m=n=3$):

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -2x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé a (2) první rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 5y + 5z &= 5 \\ -y - 2z &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Další úpravy jsou (3) druhou rovnici násobíme 1/5 (tj. dělíme ji 5) a (4) druhou rovnici (po předchozí úpravě) přičteme k třetí rovnici

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+z&=1 \\ -z&=1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Dostali jsme tak ekvivalentní soustavu rovnic, která má stejné řešení jako původní. Řešení najdeme dosazováním „odzadu“. Soustava má jediné řešení $x=1$, $y=2$, $z=-1$. Matice i rozšířená matice jsou ve stejném schodovitém tvaru a mají tři nenulové řádky – hodnost obou matic ($h(A)=h(B)=3$) je rovna počtu neznámých, dostáváme jediné řešení.

Příklad 2 ($m=n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x+y-z&=1 \\ -3x+4y+z&=4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé a (2) první rovnici vynásobenou 3 přičteme k třetí

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ 5y+5z&=5 \\ 10y+10z&=10 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & 10 & 10 \end{array}\right)$$

Další úpravy jsou (3) druhou rovnici násobíme 1/5 (tj. dělíme ji 5), (4) třetí rovnici násobíme 1/10 (tj. dělíme ji 10) a nakonec (5) druhou rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+z&=1 \\ 0&=0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ekvivalentní soustava rovnic má stejné řešení jako původní. Najdeme je snadno dosazováním „odzadu“. V tomto případě zůstává jedna volná neznámá, existuje tedy nekonečně mnoho řešení $x=-z$, $y=1-z$, z libovolné. Matice i rozšířená matice jsou ve stejném schodovitém tvaru a mají dva nenulové řádky – hodnost obou matic ($h(A)=h(B)=2$) je menší než počet neznámých, dostáváme nekonečně mnoho řešení.

Příklad 3 ($m=n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x+y-z&=1 \\ -x+3y+2z&=8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé a (2) první rovnici přičteme k třetí

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ 5y+5z&=5 \\ 5y+5z&=10 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Další úpravy jsou (3) druhou rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji) a (4) druhou rovnici násobíme 1/5 (tj. dělíme ji 5)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+z&=1 \\ 0&=5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

I toto je ekvivalentní soustava rovnic. Zjevně nemá řešení, neboť žádnou volbou proměnných nedosáhneme „0=5“. Matice soustavy i rozšířená matice jsou ve schodovitém tvaru, ale hodnost matice soustavy ($h(A)=2$) je menší než hodnost rozšířené matice ($h(B)=3$).

Příklad 4 ($m=2$, $n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x+y-z&=1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé a (2) upravenou druhou rovnici vynásobíme 1/5 (tj. vydělíme 5)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+z&=1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ze schodovitého tvaru matic vidíme, že hodnosti jsou stejné a menší než počet neznámých ($h(A)=h(B)=2$), dostáváme nekonečně mnoho řešení $x=-z$, $y=1-z$, z libovolné.

Příklad 5 ($m=2$, $n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x-4y-6z&=-5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -6 & -5 \end{array}\right)$$

Stačí provést úpravu (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ 0&=-1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ekvivalentní soustava rovnic zjevně nemá řešení, neboť žádnou volbou proměnných nedosáhneme „0=-1“. Matice soustavy i rozšířená matice jsou ve schodovitém tvaru, ale hodnost matice soustavy ($h(A)=1$) je menší než hodnost rozšířené matice ($h(B)=2$).

Příklad 6 ($m=4, n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x+y-z&=1 \\ x+y+z&=2 \\ -x+2y\quad&=3 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé, (2) první rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji) a (3) první rovnici přičteme ke třetí

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ 5y+5z&=5 \\ -y-2z&=0 \\ 4y+3z&=5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Další úpravy jsou: (3) druhou rovnici vynásobíme 1/5 (tj. vydělíme 5), (4) upravenou druhou rovnici přičteme k třetí rovnici, (5) upravenou druhou rovnici vynásobenou (–4) přičteme k třetí a konečně (6) upravenou třetí rovnici odečteme od čtvrté

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+z&=1 \\ -z&=1 \\ 0&=0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešení této ekvivalentní soustavy rovnic najdeme dosazováním „odzadu“. Soustava má jediné řešení x=1, y=2, z=–1. Matice i rozšířená matice jsou ve stejném schodovitém tvaru a mají tři nenulové řádky – hodnost obou matic ($h(A)=h(B)=3$) je rovna počtu neznámých, dostáváme jediné řešení.

Příklad 7 ($m=4, n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -2x+y-z&=1 \\ -x+3y+2z&=3 \\ 3x+y+4z&=1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy: (1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé, (2) první rovnici přičteme k třetí a (3) první rovnici vynásobenou (–3) přičteme ke čtvrté

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ 5y+5z&=5 \\ 5y+5z&=5 \\ -5y-5z&=-5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

Při dalších úpravách (4) přičteme druhou rovnici ke čtvrté, (5) odečteme druhou rovnici od třetí a nakonec (6) vynásobíme tuto rovnici 1/5 (dělíme 5)

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ y+z&=1 \\ 0&=0 \\ 0&=0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení $x = -z$, $y = 1 - z$, z libovolné. Počet schodů, tj. počet nenulových řádků obou matic je stejný, jejich hodnosti $h(A)=h(B)=2$, což je hodnota o jedničku menší než počet neznámých $n=3$.

Příklad 7 ($m=4$, $n=3$):

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ -x-2y-3z&=-2 \\ 2x+4y+6z&=4 \\ -3x-6y-9z&=-6 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ -3 & -6 & -9 & -6 \end{array}\right)$$

Provedeme úpravy, v tomto příkladu velmi jednoduché: (1) první rovnici přičteme ke druhé, (2) první rovnici vynásobenou (-2) přičteme ke třetí a (3) první rovnici vynásobenou 3 přičteme ke čtvrté

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=2 \\ 0&=0 \\ 0&=0 \\ 0&=0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hodnosti matic jsou shodné $h(A)=h(B)=1$ a jsou o 2 menší než počet neznámých $n=3$.
Soustava má nekonečně mnoho řešení $x = 2 - 2y - 3z$, y a z libovolné.

5.4 Shrnutí Gaussovy eliminační metody

V předchozí části byl na příkladech ukázán způsob řešení soustavy rovnic převodem matice soustavy rovnic a rozšířené matice (tj. k matici soustavy přidáváme sloupec pravých stran) na schodovitý tvar. Tomuto způsobu říkáme Gaussova eliminační („likvidační“) metoda. Zavedli jsme pojem **hodnost matice** (počet nenulových řádků jejího schodovitého tvaru) a označení $h(A)$ pro hodnost matice soustavy a $h(B)$ pro hodnost rozšířené matice.

Soustava m rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, je-li $h(A)=h(B)=h$, tj. počet nenulových řádků je stejný (schodovité tvary mají stejný počet schodů). Počet volných neznámých je

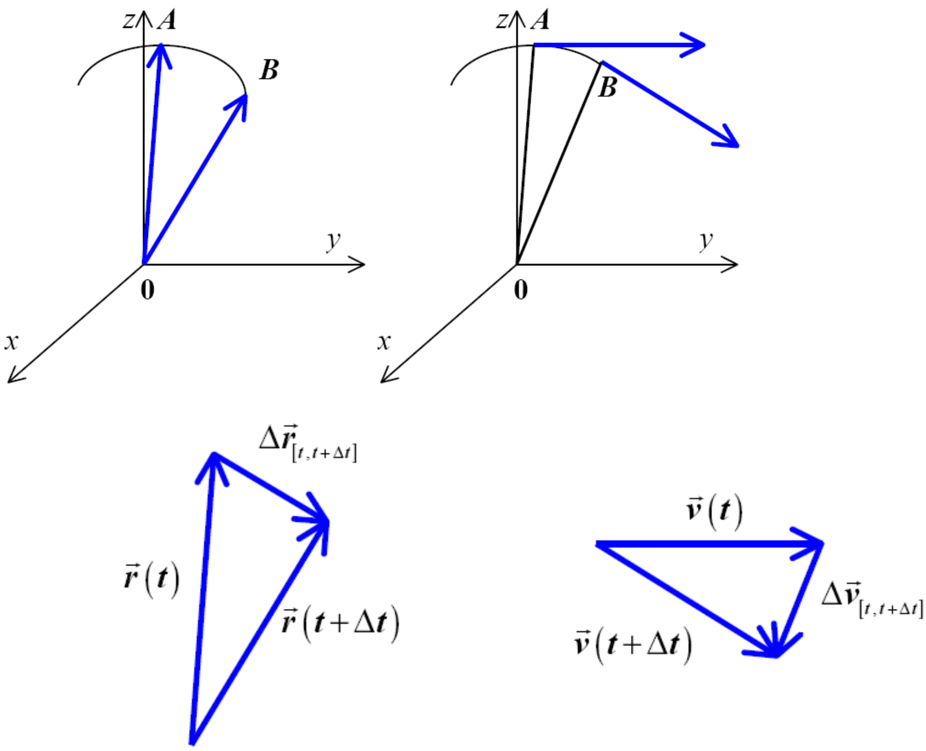
$$d=n-h$$

To znamená, že soustava má jediné řešení (nejsou žádné volné neznámé) pro $d=0$, tedy v případě, kdy hodnosti matic jsou stejné a rovnu počtu neznámých.

6. Limita a derivace

6.1 Motivace – rychlost a zrychlení

Všimněme si úseku trajektorie částice (říkáme také hmotného bodu) mezi blízkými body A a B, ve kterých se částice nachází v čase t a $t+\Delta t$. Některé veličiny se vztahují k jednomu časovému okamžiku, jiné k intervalu mezi dvěma časovými okamžiky. V našem příkladu máme:



polohový vektor částice v časovém okamžiku t

$$\vec{r}(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$$

polohový vektor částice v časovém okamžiku $t+\Delta t$

$$\vec{r}(t+\Delta t)=\left(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t),z(t+\Delta t)\right)$$

rychlost částice v časovém okamžiku t

$$\vec{v}(t)=\left(v_x(t),v_y(t),v_z(t)\right)$$

rychlost částice v časovém okamžiku $t+\Delta t$

$$\vec{v}(t+\Delta t)=\left(v_x(t+\Delta t),v_y(t+\Delta t),v_z(t+\Delta t)\right)$$

vektor posunutí částice v časovém intervalu $[t,t+\Delta t]$

$$\Delta\vec{r}_{[t,t+\Delta t]}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)=\left(x(t+\Delta t)-x(t),y(t+\Delta t)-y(t),z(t+\Delta t)-z(t)\right)$$

vektor průměrné rychlosti částice v časovém intervalu $[t,t+\Delta t]$

$$\langle\vec{v}\rangle_{[t,t+\Delta t]}=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right)$$

vektor změny rychlosti částice v časovém intervalu $[t,t+\Delta t]$

$$\Delta\vec{v}_{[t,t+\Delta t]}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)=\left(v_x(t+\Delta t)-v_x(t),v_y(t+\Delta t)-v_y(t),v_z(t+\Delta t)-v_z(t)\right)$$

vektor průměrného zrychlení částice v časovém intervalu $[t,t+\Delta t]$

$$\langle\vec{a}\rangle_{[t,t+\Delta t]}=\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\left(\frac{v_x(t+\Delta t)-v_x(t)}{\Delta t},\frac{v_y(t+\Delta t)-v_y(t)}{\Delta t},\frac{v_z(t+\Delta t)-v_z(t)}{\Delta t}\right)$$

Vektor průměrné rychlosti vystihuje přibližně, jak rychle měnil hmotný bod svou polohu během časového intervalu $[t,t+\Delta t]$. Během tohoto intervalu se částice přemístila po nějaké trajektorii z místa $\vec{r}(t)$ v čase t do místa $\vec{r}(t+\Delta t)$ v čase $t+\Delta t$. Za stejnou dobu Δt by se také mezi těmito místy přemístila částice pohybující se rovnoměrně přímočaře průměrnou rychlostí, neboť

$$\vec{r}(t)+\langle\vec{v}\rangle_{[t,t+\Delta t]}\Delta t=\vec{r}(t)+\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}\Delta t=\vec{r}(t+\Delta t)$$

Náhrada skutečného pohybu bodu po křivce v časovém intervalu $[t,t+\Delta t]$ pohybem rovnoměrným přímočarým bude přirozeně tím přesnější, čím bude interval $[t,t+\Delta t]$ kratší. Provádíme tzv. limitní přechod $\Delta t\to 0$. Co se však přitom děje se souřadnicemi vektoru průměrné rychlosti? Přestože se jmenovatelé i čitatelé zlomků

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}$$

stávají libovolně blízkými nule, jejich podíly nabývají rozumných hodnot a blíží se při zmenšujících se Δt ke konečným číslům - svým limitním hodnotám. Ty již, na rozdíl od veličin průměrných, nezávisí na délce časového intervalu Δt, ale pouze na jeho počátečním okamžiku *t* a udávají tak souřadnice tzv. vektoru okamžité rychlosti hmotného bodu. Píšeme

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{v} \rangle_{[t,t+\Delta t]}$$

Poznámka: Z předcházejícího výkladu je zřejmé, že velikost vektoru průměrné rychlosti $\left| \langle \vec{v} \rangle_{[t,t+\Delta t]} \right|$ je něco jiného než průměrná hodnota velikosti vektoru okamžité rychlosti $\langle |\vec{v}| \rangle_{[t,t+\Delta t]}$, která se v běžné řeči označuje slovním spojením „průměrná rychlost“.

Jednoduchý příklad limitního přechodu je znázorněn na obrázku. Jde o rovnoměrný pohyb po kružnici

$$\vec{r}(t) = \left(R\cos\frac{2\pi t}{T}, R\sin\frac{2\pi t}{T} \right)$$

Pro průměrnou rychlost dostáváme (při úpravách používáme známých vztahu pro goniometrické funkce)

$$\langle \vec{v} \rangle_{[t,t+\Delta t]} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{R}{\Delta t}\left(\cos\frac{2\pi(t+\Delta t)}{T} - \cos\frac{2\pi t}{T}, \sin\frac{2\pi(t+\Delta t)}{T} - \sin\frac{2\pi t}{T} \right) =$$

$$2R\frac{\sin\frac{\pi\Delta t}{T}}{\Delta t}\left(-\sin\frac{\pi(2t+\Delta t)}{T}, \cos\frac{\pi(2t+\Delta t)}{T} \right)$$

Velikost vektoru průměrné rychlosti je pak

$$\left| \langle \vec{v} \rangle_{[t,t+\Delta t]} \right| = \sqrt{\left(\langle v_x \rangle_{[t,t+\Delta t]} \right)^2 + \left(\langle v_y \rangle_{[t,t+\Delta t]} \right)^2} = 2R\frac{\sin\frac{\pi\Delta t}{T}}{\Delta t}$$

Zvolíme-li poloměr *R*=1 m a periodu *T*=4 s, dostáváme pro zkracující se intervaly hodnoty velikosti vektoru průměrné rychlosti $\left| \langle \vec{v} \rangle_{[0,\Delta t]} \right|$ uvedené v tabulce. Výpočet limity pro $\Delta t \to 0$ dává přesnou hodnotu $|\vec{v}| = \pi/2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, proto pro lepší zviditelnění toho, jak se hodnoty blíží k přesné hodnotě uvádíme v tabulce $2/\pi$ násobky velikosti vektoru průměrné rychlosti.

$\Delta t\,[\mathrm{s}]$	$\frac{2}{\pi}\left| \langle \vec{v} \rangle_{[0,\Delta t]} \right| \left[\mathrm{m\,s^{-1}}\right]$
1	0,9003
1/2	0,9745
1/4	0,9936
1/8	0,9984

1/16	0,9996
$\to 0$	**x** $\to 1$

6.2 Funkce, její limita a spojitost

Funkce vyjadřuje závislost určité veličiny (závisle proměnné) na veličinách jiných (nezávisle proměnných). Příkladem mohou být již zmíněné závislosti souřadnic částice na čase.

Uvažujme nyní o případu jedné reálné nezávisle proměnné *t* a jedné reálné závisle proměnné *x*. Píšeme $x = f(t)$ a čteme „*x* je funkcí *t*". Symbol *f*, tzv. funkční předpis, určuje pravidlo, kterým jsou hodnotám *t* přiřazeny hodnoty *x*. Někdy píšeme jen $x = x(t)$ (tento zápis bývá ve fyzice častější). Hodnoty, kterých může nabývat proměnná *t*, tvoří definiční obor funkce značený D_f. Obor D_f je buď zadán současně s uvedením pravidla *f*, nebo je automaticky chápán jako množina všech hodnot *t*, pro něž lze podle pravidla *f* vyčíslit hodnotu *x*. Např. pro $x = \sqrt{t}$ musí být $t \geq 0$, neboť záporné hodnoty nelze odmocňovat. Říkáme, že *f* je definována na množině D_f. Hodnoty, jichž bude nabývat proměnná *x*, probíhá-li *t* definiční obor D_f, tvoří obor hodnot funkce, H_f. V rovině souřadnic *t* (vodorovná osa) a *x* (svislá osa) vytvoří body o souřadnicích $[t, f(t)]$ graf funkce, označovaný jako G_f.

Definice: Funkce *g* je inversní funkcí k funkci *f*, jestliže její definiční obor obsahuje obor hodnot funkce *f* a platí

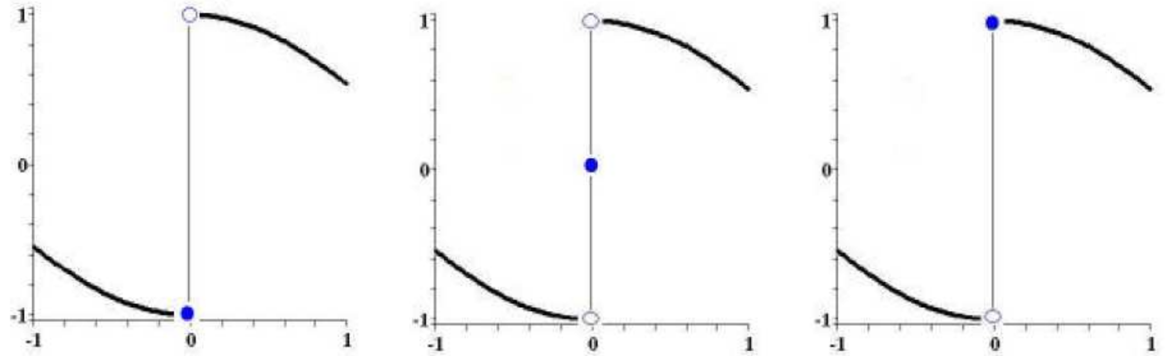
$$g(f(t)) = t$$

Jako příklady uveďme

$$\exp(\ln(t)) = t \quad , \quad \ln(\exp(t)) = t \quad ,$$
$$\sqrt{t^2} = t \quad , \quad \left(\sqrt{t}\right)^2 = t \quad ,$$
$$\sin(\arcsin(t)) = t \quad , \quad \arcsin(\sin(t)) = t$$

U posledního vztahu je třeba jisté opatrnosti, protože funkce sinus je periodická.

Následující obrázky ukazují příklady grafů funkcí, které v určitém bodě ($t = 0$) limitu vůbec nemají (plný kroužek = bod patří do definičního oboru funkce, prázdný kroužek = bod nepatří do definičního oboru funkce). Jedná se postupně o funkce



$$f(t)=\begin{cases}-\cos t & t\le 0\\ \cos t & t>0\end{cases}\quad,\quad f(t)=\begin{cases}-\cos t & t<0\\ 0 & t=0\\ \cos t & t>0\end{cases}\quad,\quad f(t)=\begin{cases}-\cos t & t<0\\ \cos t & t\ge 0\end{cases}$$

Ve všech případech mají funkce v bodě $t_0=0$ limitu L_1 zleva (t se blíží k nule ze strany záporných čísel) a limitu L_2 zprava (t se blíží k nule ze strany kladných čísel). Píšeme

$$\lim_{t\to t_0^-} f(t)=L_1=-1 \quad , \quad \lim_{t\to t_0^+} f(t)=L_2=1$$

Protože $L_1\neq L_2$, limita neexistuje. Ve všech případech je funkce v bodě $t_0=0$ nespojitá. V prvním případě (levý obrázek) je však spojitá zleva. Platí zde

$$\lim_{t\to 0^-} f(t)=f(0)$$

(v našem příkladu $f(0)=-1$). Obdobně ve třetím případě (pravý obrázek) je funkce spojitá zprava. Platí zde tedy

$$\lim_{t\to 0^+} f(t)=f(0)$$

(v našem příkladu $f(0)=1$). Přesná definice limity je následující:

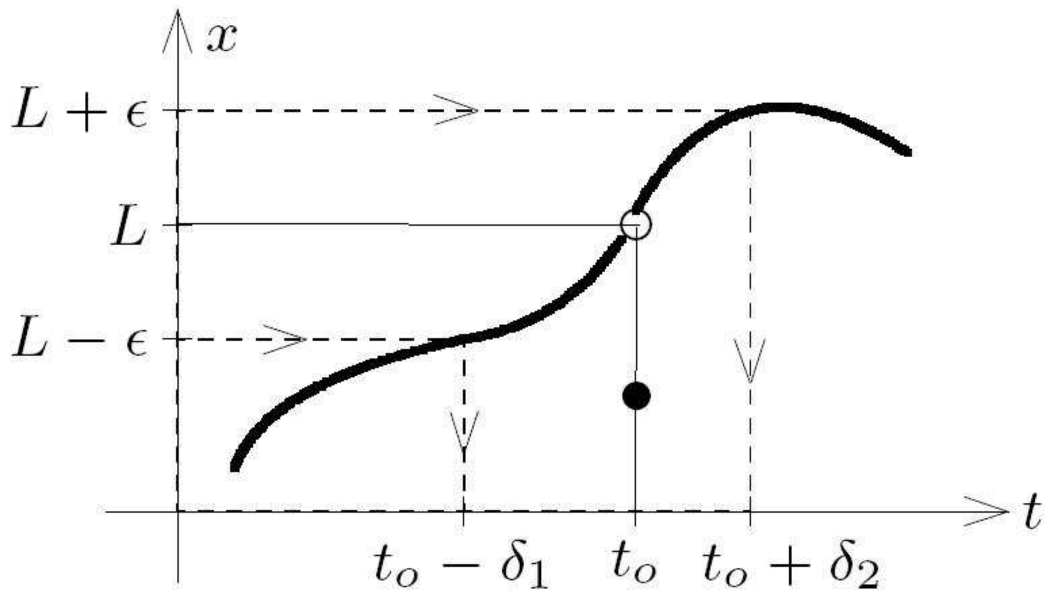
Definice: Číslo L se nazývá limitou funkce $x=f(t)$ v bodě t_0, jestliže pro libovolně zvolené (jakkoli malé) číslo $\varepsilon>0$ dokážeme najít takový interval $(t_0-\delta, t_0+\delta)$, $\delta>0$, že platí

(a) funkce $f(t)$ je definována ve všech bodech množiny $(t_0-\delta, t_0)\cup(t_0, t_0+\delta)$

(b) pro všechna čísla $t\in(t_0-\delta, t_0)\cup(t_0, t_0+\delta)$ je $|f(t)-L|<\varepsilon$

Píšeme pak $\lim_{t\to t_0} f(t)=L$.

Množina $(t_0-\delta, t_0)\cup(t_0, t_0+\delta)$ se nazývá δ-okolí bodu t_0. Všimněte si, že díky definici δ-okolí, která vynechává bod t_0, může existovat limita funkce i v bodě, kde tato funkce není definována. Definici limity můžeme číst i takto“ Číslo L je limitou funkce $f(t)$ v bodě t_0, jestliže se funkční hodnoty nevzdalují od L více než o ε, pohybuje-li se proměnná t dostatečně blízko bodu t_0. Číslo ε je přitom zvoleno libovolně (malé) předem.



Způsob nalezení čísla δ při zvoleném ε ukazuje předchozí obrázek. δ je menší z čísel δ_1, δ_2. Graf funkce je záměrně zvolen složitě, takže funkční hodnota (plný kroužek) v bodě t_0 se nerovná limitě funkce (prázdný kroužek) v tomto bodě – funkce není spojitá. Přesná definice spojitosti je jednoduchá:

Definice: Funkce $x = f(t)$ se nazývá v bodě t_0 spojitá, je-li $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$.

Uvedeme ještě dvě jednoduchá pravidla pro počítání s limitami:

(a) Je-li

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = F \quad , \quad \lim_{t \to t_0} g(t) = G$$

potom

$$\lim_{t \to t_0} \left[f(t) \pm g(t) \right] = F \pm G \quad , \quad \lim_{t \to t_0} \left[f(t) g(t) \right] = F\,G$$

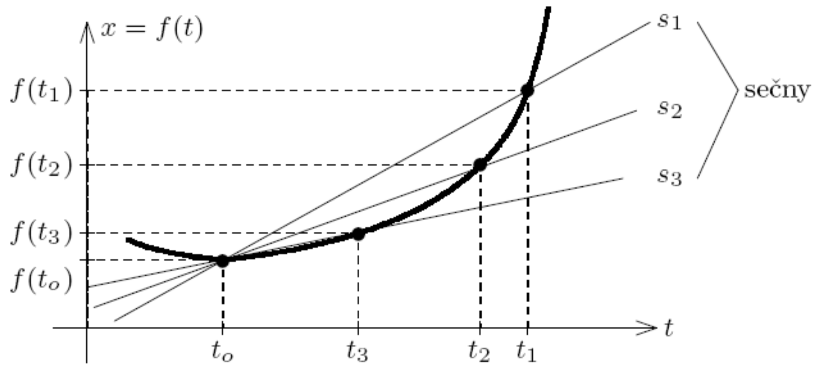
a pokud pro *t* z nějakém δ-okolí bodu t_0 platí $g(t) \neq 0$ a také $G \neq 0$, potom

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{F}{G}$$

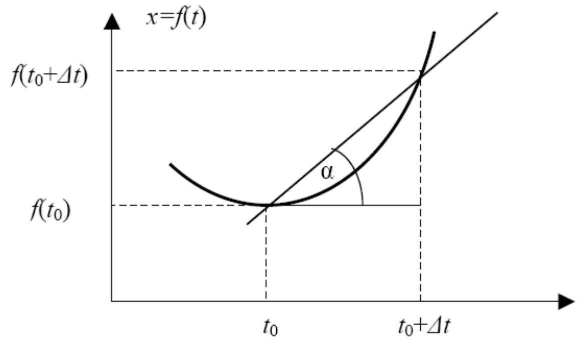
(b) Předpokládejme, že funkce $x=f(t)$ je v bodě t_0 spojitá. Dále uvažujme o funkci $y=g(x)$, definované na množině D_g obsahující obor hodnot funkce *f*. Předpokládejme, že funkce $g(x)$ je spojitá v bodě $x_0=f(t_0)$. Pak je i složená funkce $y=F(t)=g\left[f(t)\right]$ spojitá v bodě t_0. Funkce *f* a *g* představují vnitřní resp. vnější složku složené funkce.

6.3 Derivace funkce, tečna

Pojem tečny ke grafu funkce je možné zavést pomocí limitního přechodu pro sečny grafu. Na obrázku vidíme tři sečny, přitom platí (značíme $\Delta t_1=t_1-t_0$, $\Delta t_2=t_2-t_0$, $\Delta t_3=t_3-t_0$)



nerovnosti $\Delta t_1>\Delta t_2>\Delta t_3$. Ve zkratce můžeme psát $\Delta t\to 0 \Rightarrow \text{sečna}\to\text{tečna}$. Tečna ke grafu funkce v bodě $\left[t_0, f(t_0)\right]$ je limitním případem sečny spojující body $A=\left[t_0, f(t_0)\right]$ a $B=\left[t_0+\Delta t_0, f(t_0+\Delta t_0)\right]$ pro $\Delta t\to 0$.



Směrnice sečny je

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

Směrnice tečny je limitou směrnice sečny pro $\Delta t\to 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathrm{tg}\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

Tečnu ke grafu funkce $x=f(t)$ v bodě $[t_0, f(t_0)]$ lze tedy zkonstruovat, existuje-li tato limita. Tato limita se nazývá **derivace funkce** $f(t)$ v bodě $t=t_0$ a značí se

$$f'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

Rovnice tečny (tj. přímky procházející bodem $[t_0, f(t_0)]$ se směrnicí $f'(t_0)$) je

$$x=f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0)$$

Derivace funkce $x=f(t)$ v obecném bodě *t*

$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

je sama také funkcí proměnné *t*. Derivace funkce $f(t)$ se nezkráceně zapisuje jako

$$\frac{d\,f(t)}{dt}$$

Výrazy, které teď můžeme zapsat v limitě $\Delta t\to 0$ jako derivace, jsme viděli u výpočtu rychlosti a zrychlení:

$$\vec{v}(t)=\left(v_x(t),v_y(t),v_z(t)\right)=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$$
$$\vec{a}(t)=\left(a_x(t),a_y(t),a_z(t)\right)=\left(v_x'(t),v_y'(t),v_z'(t)\right)=\left(x''(t),y''(t),z''(t)\right)$$

Používáme běžného značení derivace jednou čárkou v horním pravém indexu (nebo jednou tečkou nad symbolem), druhou a třetí derivaci pak značíme dvěma a třema čárkami (nebo tečkami), vyšší derivace mají římskou číslici v horním pravém indexu

$$\frac{d\,f(t)}{dt}=f'(t),\ \frac{d^2 f(t)}{dt^2}=f''(t),\ \frac{d^3 f(t)}{dt^3}=f'''(t),\ \frac{d^4 f(t)}{dt^4}=f^{(IV)}(t),\dots$$
$$\frac{d\,f(t)}{dt}=\dot{f}(t),\ \frac{d^2 f(t)}{dt^2}=\ddot{f}(t),\ \frac{d^3 f(t)}{dt^3}=\dddot{f}(t),\ \frac{d^4 f(t)}{dt^4}=f^{(IV)}(t),\dots$$

6.4 Pravidla pro počítání derivací

Začneme přehled podrobným rozborem dvou příkladů, velmi jednoduchého a poněkud komplikovanějšího.

Příklad 1: vezměme funkci

$$x = f(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

Při výpočtu derivace máme z definice

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} a (t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2} a t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} a t^2 + a t \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 - \frac{1}{2} a t^2}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{a \Delta t \left(t + \frac{1}{2} \Delta t \right)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} a \left(t + \frac{1}{2} \Delta t \right) = a t$$

Podstatným krokem při výpočtu bylo užití „metody vykrácení nepohodlného výrazu“.

Příklad 2: vezměme funkci

$$x = f(t) = \sin t$$

Opět z definice

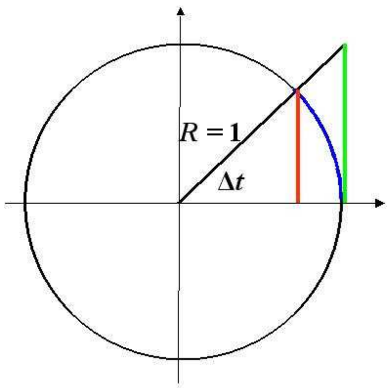
$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t+\Delta t) - \sin t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta t}{2} \cos\left(t + \frac{\Delta t}{2} \right)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \Delta t \cos(t+\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \Delta t}{\Delta t} \lim_{\Delta t \to 0} \cos(t+\Delta t) = \cos t$$

Opět podstatným krokem při výpočtu bylo užití „metody vykrácení nepohodlného výrazu“ – tentokrát jsme využili toho, že pro malé hodnoty argumentu je funkční hodnota sinu rovna tomuto argumentu $\sin \Delta t = \Delta t - (\Delta t)^3 / 6 + \cdots$. Můžeme si ukázat výpočet limity

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \Delta t}{\Delta t} = 1$$

takto: Podle obrázku platí ($\sin \Delta t$ červeně, délka oblouku Δt modře, $\mathrm{tg} \Delta t$ zeleně)



$$\sin\Delta t \le \Delta t \le \operatorname{tg}\Delta t \Rightarrow \frac{1}{\sin\Delta t} \ge \frac{1}{\Delta t} \ge \frac{\cos\Delta t}{\sin\Delta t}$$

$$1 \ge \frac{\sin\Delta t}{\Delta t} \ge \cos\Delta t \xrightarrow{\Delta t \to 0} 1 \quad , \quad \frac{\sin\Delta t}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} 1$$

V dalším už uvedeme jen výsledky pro nejdůležitější elementární funkce: mocninu, sinus a kosinus a exponenciálu a logaritmus.

$$\boxed{f(t) = t^r \quad , \quad f'(t) = r\,t^{r-1} \quad , \quad r \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(t) = \sin t \quad , \quad f'(t) = \cos t \quad , \\ f(t) = \cos t \quad , \quad f'(t) = -\sin t \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(t) = e^t \quad , \quad f'(t) = e^t \quad , \quad f(t) = a^t \quad , \quad f'(t) = a^t \ln a \quad , \\ f(t) = \ln t \quad , \quad f'(t) = \dfrac{1}{t} \quad , \quad f(t) = \log_a t \quad , \quad f'(t) = \dfrac{1}{t \ln a} \end{array}}$$

Pro derivaci součtu či rozdílu funkcí platí

$$\boxed{\left[f(t) \pm g(t) \right]' = f'(t) \pm g'(t)}$$

Pro derivaci funkce násobené konstantou $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\boxed{\left[c\, f(t) \right]' = c\, f'(t)}$$

Pro derivaci součinu dvou funkcí platí

$$\boxed{\left[f(t)\, g(t) \right]' = f'(t)\, g(t) + f(t)\, g'(t)}$$

Pro derivaci podílu dvou funkcí platí

$$\boxed{\left[\frac{f(t)}{g(t)} \right]' = \frac{f'(t)\, g(t) - f(t)\, g'(t)}{\left[g(t) \right]^2}}$$

Pro derivaci složené funkce platí

$$\boxed{F(t) = g\left(f(t) \right) \quad , \quad F'(t) = g'\left(f(t) \right) f'(t)}$$

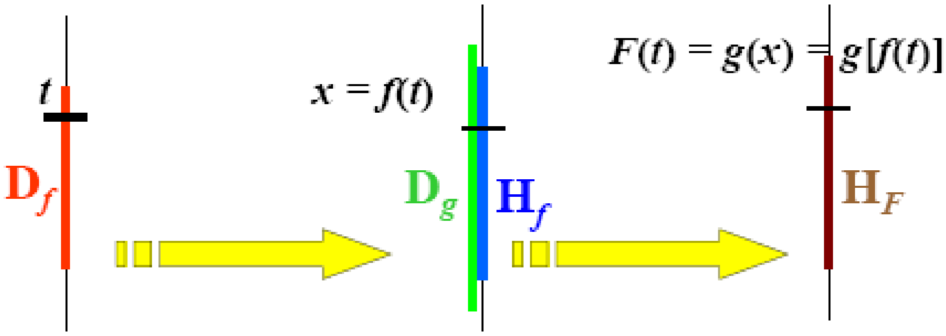
Připomeňme si, že čárkou značíme derivaci funkce podle argumentu. Aby bylo pravidlo pro derivování složené funkce zcela jasné, rozepišme si složenou funkci jako

$$F(t) = g(x) \quad , \quad x = f(t)$$

Potom

$$F'(t) \equiv \frac{dF(t)}{dt} = \frac{dg(x)}{dx} \frac{df(t)}{dt} \equiv g'\left(f(t) \right) f'(t)$$

Zobrazení složenou funkcí včetně definičních oborů a oborů hodnot je ukázáno na obrázku.



Důkazy pravidel pro derivování jsou většinou jednoduché, například

$$\left[c\, f(t)\right]' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c\, f(t+\Delta t) - c\, f(t)}{\Delta t} = c \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = c\, f'(t)$$

nebo

$$\left[f(t)\, g(t)\right]' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)\, g(t+\Delta t) - c\, f(t)\, g(t)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[f(t+\Delta t) - f(t)\right] g(t+\Delta t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t)\left[g(t+\Delta t) - g(t)\right]}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[f(t+\Delta t) - f(t)\right]}{\Delta t} \lim_{\Delta t \to 0} g(t+\Delta t) + f(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[g(t+\Delta t) - g(t)\right]}{\Delta t} =$$

$$f'(t)\, g(t) + f(t)\, g'(t)$$

Podle těchto pravidel pak dokážeme najít derivace i velmi složitých výrazů. Pro dobré pochopení je vhodné všimnout si vnitřní konsistence těchto pravidel.

Příklad 3. Nepochybně je derivace konstanty rovna nule. Zapsáno z definice je pro součin konstanty c a funkce $f(t) = 1 = t^0$

$$[c \cdot 1]' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{c \cdot 1 - c \cdot 1}{\Delta t} = c \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - 1}{\Delta t} = c \cdot 0 = 0$$

Příklad 4. Víme, že derivace funkce sinus je rovna funkci kosinus. Podle pravidla o derivaci složené funkce (α je konstanta)

$$\left[\sin(t+\alpha)\right]' = \cos(t+\alpha)(t+\alpha)' = \cos(t+\alpha)$$

Zvolíme-li $\alpha = \pi/2$, dostáváme s použitím součtových vzorců pro goniometrické funkce pravidlo $[\cos t]' = -\sin t$.

Příklad 5. Derivace funkce $1/g(t)$. Použijeme vztah pro derivaci podílu funkcí, přitom $f(t) = 1$. Máme

$$\left[\frac{1}{g(t)}\right]' = \frac{0\cdot g(t) - 1\cdot g'(t)}{\left[g(t)\right]^2} = -\frac{g'(t)}{\left[g(t)\right]^2}$$

Příklad 6. Obecnějším případem složené funkce než funkce v Příkladu 4 je $F(t)=g(at+b)$, kde $a, b\in\mathbb{R}$ jsou libovolné reálné konstanty. Potom

$$F'(t) = g'(at+b)\left[at+b\right]' = a\,g'(at+b)$$

Příklad 7: Funkce tangens je podílem sinu a kosinu. Podle pravidla o derivování podílu máme

$$(\mathrm{tg}t)' = \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)' = \frac{\cos t\cdot\cos t - \sin t\cdot(-\sin t)}{(\cos t)^2} = \frac{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}{(\cos t)^2} = \frac{1}{(\cos t)^2}$$

Příklad 8: Funkce kotangens je podílem kosinu a sinu. Podle pravidla o derivování podílu máme

$$(\mathrm{cotg}t)' = \left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)' = \frac{-\sin t\cdot\sin t - \cos t\cdot\cos t}{(\sin t)^2} = -\frac{(\sin t)^2 + (\cos t)^2}{(\sin t)^2} = -\frac{1}{(\sin t)^2}$$

Příklad 8: Derivace inversní funkce. Budeme inversní funkci chápat jako složenou funkci, tj.

$$F(t) = t(x(t)) = t \quad\Rightarrow\quad F'(t) = \frac{dt}{dx}\frac{dx}{dt} = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

Například pro výpočet derivace funkce *arcsin* dostáváme

$$x(t) = \sin t\,,\ t(x) = \arcsin x\,,\ \frac{dx}{dt} = \cos t = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{1-x^2} \quad\Rightarrow$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

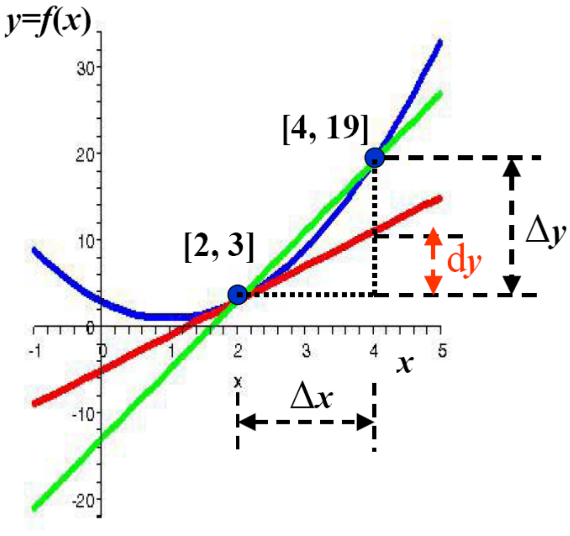
a podobně pro výpočet derivace funkce *arccos*

$$x(t) = \cos t\,,\ t(x) = \arccos x\,,\ \frac{dx}{dt} = -\sin t = -\sqrt{1-(\cos t)^2} = -\sqrt{1-x^2} \quad\Rightarrow$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

6.5 Přibližné vyjádření diferencovatelné funkce

V následující části budeme nezávisle proměnnou značit x a funkce této proměnné pak $y = f(x)$. Obrázek nám na příkladu funkce $y=2x^2-4x+3$ ukazuje možnosti přibližného vyjádření funkce v okolí určité zvolené hodnoty nezávisle proměnné, v tomto případě $x_0 = 2$.



Modrá barva vyznačuje graf funkce, zelená sečnu spojující funkční hodnoty v $x_0 = 2$ a $x_0 + \Delta x = 4$ a červená tečnu ke grafu funkce v bodě $x_0 = 2$. Rovnice funkce, sečny a tečny jsou

$$y_f = 2x^2 - 4x + 3 \quad , \quad y_s = 8x - 13 \quad , \quad y_t = 4x - 5$$

Takto vypadají rovnice dost odlišně, ale přepíšeme-li je v „proměnné“ $\xi = x - x_0 = x - 2$, máme

$$y_f = 3 + 4\xi + 2\xi^2 \quad , \quad y_s = 3 + 8\xi \quad , \quad y_t = 3 + 4\xi$$

Vidíme, že ačkoliv může sečna na vybraném malém intervalu (v našem případě $2 \leq x \leq 4$) dobře aproximovat funkci, tečna v bodě x_0 je vhodnější aproximací funkce na celém okolí bodu x_0, v obecném bodě x tohoto okolí se liší od funkce až členy, které jsou úměrné druhé mocnině vzdálenosti od bodu x_0, tj. úměrné $(x - x_0)^2$.

Pro obecnou funkci $y_f = f(x)$ jsme ukázali, že směrnice tečny v bodě x_0 je rovna derivaci funkce v tomto bodě, tedy rovnice tečny je

$$y_t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

S označením $\Delta x = x - x_0$ můžeme v okolí bodu x_0 psát

$$y_f(x) = y_t(x) + \varepsilon(x_0, \Delta x)\Delta x$$

kde pro chybu aproximace platí

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x_0, \Delta x) = 0$$

Bez dalších úvah přijmeme následující tvrzení: Je-li funkce v bodě x_0 a jeho okolí dostatečně hladká (má všechny derivace), je možné ji zapsat jako nekonečnou řadu (Taylorův rozvoj)

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

Pro zkrácení zápisu píšeme $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, … Některé funkce je možné takovou řadou i definovat (musíme však ukázat, že řada konverguje). V dalších příkladech si ukážeme Taylorův některých elementárních funkcí.

Příklad 1. Najděme Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \exp(x)$ v okolí bodu $x_0 = 0$ (potom $\Delta x = x$). Pro exponenciálu je $\left[\exp(x)\right]' = \exp(x)$ a bude tedy pro derivace libovolného řádu $f^{(n)}(x) = f(x)$. Dále je $f(0) = \exp(0) = 1$, takže dostáváme Tailorovu řadu pro exponenciální funkci

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

Příklad 2. Najděme Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \ln(x)$ v okolí bodu $x_0 = 1$ (potom $\Delta x = x - 1$). Pro logaritmus je první derivace $\left[\ln(x)\right]' = 1/x$, druhá derivace pak $\left[\ln(x)\right]'' = -1/x^2$, třetí derivace $\left[\ln(x)\right]''' = 2/x^3$ atd. Dále je $f(1) = \ln(1) = 0$ a pro n-tou derivaci $f^{(n)}(1) = (n-1)!(-1)^{n-1}$. V Taylorově řadě zkrátíme $(n-1)!/n! = 1/n$ a máme konečně

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

neboli

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x)^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Příklad 3. Najděme Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \sin(x)$ v okolí bodu $x_0 = 0$ (potom $\Delta x = x$). Pro derivace sinu máme následující schéma

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\sin x)''' = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$$
$$(\sin x)^{(IV)} = (\cos x)''' = (-\sin x)'' = (-\cos x)' = \sin x$$

……………………………………………………………

Vidíme, že pro derivace lichého řádu $2k+1, k=0,1,2,\ldots$ máme $(\sin x)^{(2k+1)}=(-1)^k \cos x$ a pro derivace sudého řádu $2k, k=0,1,2,\ldots$ je $(\sin x)^{(2k)}=(-1)^k \sin x$. Protože $\sin 0=0$ a $\cos 0=1$, dostáváme pro Taylorův rozvoj funkce sinus

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots$$

Příklad 4. Najděme Taylorův rozvoj funkce $f(x)=\cos(x)$ v okolí bodu $x_0=0$ (potom $\Delta x=x$). Pro derivace sinu máme následující schéma

$$\begin{aligned}
&(\cos x)^{/}=-\sin x\\
&(\cos x)^{//}=(-\sin x)^{/}=-\cos x\\
&(\cos x)^{///}=(-\sin x)^{//}=(-\cos x)^{/}=\sin x\\
&(\cos x)^{(IV)}=(-\sin x)^{///}=(-\cos x)^{//}=(\sin x)^{/}=\cos x\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Vidíme, že pro derivace lichého řádu $2k+1, k=0,1,2,\ldots$ máme $(\cos x)^{(2k+1)}=-(-1)^k \cos x$ a pro derivace sudého řádu $2k, k=0,1,2,\ldots$ je $(\cos x)^{(2k)}=(-1)^k \cos x$. Protože $\sin 0=0$ a $\cos 0=1$, dostáváme pro Taylorův rozvoj funkce kosinus

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots$$

Příklad 5. Velmi jednoduchý na zapamatování je Taylorův rozvoj funkce $f(x)=1/(1-x)$ v okolí bodu $x_0=0$. Pro derivace máme

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]^{/}=\frac{1}{(1-x)^2}\quad,\quad\left[\frac{1}{1-x}\right]^{//}=\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}\quad,\quad\left[\frac{1}{1-x}\right]^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\quad,\quad\ldots\ldots$$

a v $x_0=0$ tedy zůstávají z derivací pouze faktoriály, je tedy

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

7. Řešení dvou jednoduchých diferenciálních rovnic

7.1 Rovnice radioaktivního rozpadu

Statistická podstata procesu rozpadu je vyjádřena tvrzením, že pro vzorek s N radioaktivními jádry je rychlost rozpadu $-dN/dt$ úměrná N

$$-\frac{dN(t)}{dt}=\lambda N(t)$$

Konstanta rozpadu λ má charakteristickou hodnotu pro každý radionuklid. Jak vidíme z rovnice, její rozměr v soustavě SI je převrácená sekunda (s^{-1}). Jak najdeme řešení rovnice? Nechceme-li užívat pojmu integrálu (což by byl standardní postup), zavedeme nejprve novou proměnnou $x=-\lambda t$, v této proměnné má rovnice tvar

$$\frac{dN(x)}{dx}=N(x)$$

Vzpomeneme si, že toto platí právě pro exponenciální funkci, tj.

$$\frac{d\left[\exp(x)\right]}{dx}=\exp(x)$$

Nakonec uvážíme, že derivace součinu konstanty a libovolné funkce je součin této konstanty s derivací funkce. Takže i exponenciála vynásobená konstantou vyhovuje naší rovnici. Máme tedy řešení $N(x)=N_0\exp(x)$ neboli

$$\boxed{N(t)=N_0\exp(-\lambda t)}$$

Označení konstanty indexem nula má důvod: N_0 je počet jader v počátečním čase $t=0$, neboť $N(0)=N_0\exp(0)=N_0$.

Radionuklidy bývají také charakterizovány **poločasem rozpadu τ.** Souvislost této charakteristiky s konstantou rozpadu je jednoduchá. Z definice poločasu je

$$N(\tau)=\frac{1}{2}N(0)=\frac{N_0}{2}\quad\Rightarrow\quad N_0\exp(-\lambda\tau)=\frac{N_0}{2}$$

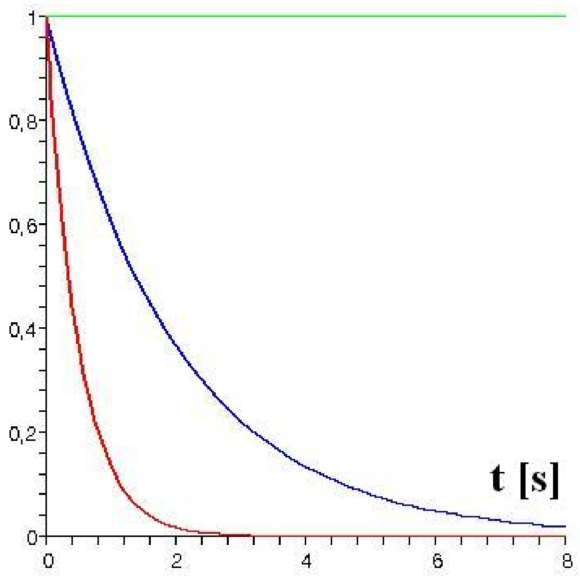
Vykrácení rovnice nenulovou konstantou N_0 a logaritmování dává pak hledaný vztah mezi poločasem rozpadu τ a rozpadovou konstantou λ

$$\boxed{\tau=\frac{\ln 2}{\lambda}}$$

Při logaritmování jsme použili skutečnosti, že logaritmus a exponenciála jsou inversní funkce, tj. $\ln(\exp(x))=x$. Dále pak toho, že logaritmus mocniny čísla je součinem mocnitele a logaritmu základu, tj. $\ln(x^a)=a\ln(x)$ – v našem případě $x=2, a=-1$. Místo tohoto obecného vzorce jsme mohli uvážit, že logaritmus převrácené hodnoty čísla je roven záporně vzatému logaritmu čísla $\ln(1/x)=-\ln(x)$, což vidíme z rovností

$$0 = \ln(1) = \ln\left(\frac{1}{x}x\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x)$$

Obrázek ukazuje průběh funkce $\exp(-\lambda t)$ pro $\lambda = 0\,\mathrm{s}^{-1}$ (zelená), $\lambda = 1/2\,\mathrm{s}^{-1}$ (modrá) a $\lambda = 2\,\mathrm{s}^{-1}$ (červená).



7.2 Rovnice harmonického oscilátoru

Budeme pro jednoduchost uvažovat jen pohyb na přímce. Předpokládejme, že částice hmotnosti *m* má stabilní rovnovážnou polohu v $x = 0$. Pokud je z této polohy vychýlena, bude přitahována zpět silou tím větší, čím větší je výchylka. V nejjednodušším přiblížení bude závislost síly na výchylce lineární

$$F = -k\,x$$

kde $k > 0$ je konstanta. Znaménko mínus vyjadřuje působení síly směrem k rovnovážné poloze. Je-li částice vychýlena z počátku ve směru orientace osy *x* ($x > 0$), působí síla v opačném směru ($F < 0$) a podobně je-li částice vychýlena z počátku proti směru orientace osy *x* ($x < 0$), působí síla ve směru orientace osy *x* ($F > 0$). Druhý Newtonův zákon pak říká, že

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k\,x(t)$$

Rovnici vydělíme *m* a kladnou konstantu k/m označíme ω^2

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2\,x(t)$$

Této rovnici říkáme rovnice harmonického oscilátoru. Zavedeme si novou proměnnou $\tau = \omega t$, ve které bude mít rovnice tvar

$$\frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} = -x(\tau)$$

Vzpomeneme si, že toto platí jak pro funkci sinus, tak pro funkci kosinus. Rovnici vyhovují také tyto funkce vynásobené konstantu a stejně tak jejich součet (říkáme, že rovnice pro funkci $x(\tau)$ je lineární). Máme tedy řešení $x(\tau) = A\sin(\tau) + B\cos(\tau)$ neboli

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

kde A a B jsou zatím neurčené konstanty. Rovnice radioaktivního rozpadu byla prvního řádu, obsahovala proto jedinou konstantu – tu jsme určili jako počet jader v čase $t = 0$. Rovnice harmonického oscilátoru je druhého řádu, budeme tedy pro určení dvou konstant potřebovat dvě podmínky. Jednou z nich může být výchylka v čase $t = 0$, kterou si označíme x_0. Protože $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$, dostáváme $x(0) = B = x_0$. Druhou podmínkou může být počáteční rychlost, tj. rychlost v čase $t = 0$, kterou si označíme v_0. Rychlost je okamžitá časová změna výchylky, tedy derivace funkce $x(t)$. Potřebné derivace dobře známe, můžeme tedy psát

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \omega A\cos(\omega t) - \omega B\sin(\omega t)$$

Po dosazení $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$ dostáváme $v(0) = \omega A = v_0$. Konečně tedy můžeme psát

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + x_0\cos(\omega t)$$

Nad získaným výsledkem je vždy velmi dobré provést co nejvíce kontrolních úvah. U našeho řešení především musí souhlasit rozměry členů. Složitější kontrolou je limitní přechod pro $\omega \to 0$. Potom je totiž výchozí rovnice rovnicí pohybu volné částice a její řešení musí být rovnoměrný pohyb

$$x(t)_{\omega=0} = x_0 + v_0 t$$

Provedeme potřebné limity (tyto případy známe)

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} = t \quad , \quad \lim_{\omega \to 0} \cos(\omega t) = 1$$

a zjistíme, že naše řešení skutečně přechází pro $\omega \to 0$ na řešení, popisující rovnoměrný pohyb.

8. Stručně o integrálu

8.1 Neurčitý integrál – primitivní funkce

Často se vyskytuje úloha, kdy máme zjistit, zda nějaká funkce $f(x)$ vznikla derivací jiné funkce a takovou funkci $F(x)$ najít.

Definice. Na otevřeném intervalu (a,b) je definována funkce $f(x)$. Funkci $F(x)$ nazveme **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ na (a,b), je-li $F(x)$ na (a,b) definována, má tam derivaci a pro všechna $x \in (a,b)$ platí $F^{/}(x) = f(x)$.

Bez důkazu uveďme, že ke každé spojité funkci $f(x)$ primitivní funkce existuje. Vzhledem k tomu, že derivace konstanty je nula, je primitivní funkce (říkáme také **neurčitý integrál**) určena až na konstantu

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C$$

V jednoduchých případech najdeme primitivní funkci tak, že předpisy pro derivaci funkce „čteme odzadu“. Tak například

$$x^{/} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int dx = x$$
$$\left[\sin(x)\right]^{/} = \cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$
$$\left[\ln(x)\right]^{/} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$$

Příklady se liší v tom, že první dva platí na celé reálné ose, ve třetím uvažujeme pouze kladnou poloosu, přesněji interval $(0,\infty)$. Rozšíření na celou reálnou osu dostaneme, vezmeme-li v argumentu logaritmu absolutní hodnotu proměnné a derivujeme jako složenou funkci

$$\frac{d\ln(|x|)}{dx} = \frac{d\ln(|x|)}{d|x|}\frac{d|x|}{dx} = \frac{1}{|x|}\frac{d|x|}{dx} = \left(\pm\frac{1}{x}\right)(\pm 1) = \frac{1}{x}$$

tedy

$$\left[\ln(|x|)\right]^{/} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$$

Z vlastností derivací vyplývá, že pro primitivní funkce platí

$$\int \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$
$$\int c\, f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$$

Velmi účinnou metodou hledání primitivní funkce je metoda integrace *per partes*. Vychází z výrazu pro derivaci součinu funkcí

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\left[f(x)g(x)\right]'$$

Integrujeme-li obě strany rovnice, známe hned (z definice primitivní funkce) integrál pravé strany, tj. $f(x)g(x)$. Převedeme druhý integrál z levé strany na pravou a dostáváme vzorec pro integraci per partes

$$\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$$

I když je tento předpis velmi jednoduchý, je třeba stejně jako u dalších metod integrace značné představivosti doplněné zkušeností.

Příklad 1. Najděte primitivní funkci k funkci $h(x)=x\sin(x)$. Zvolíme

$$\begin{array}{ccc} f'(x)=\sin(x) & \Rightarrow & f(x)=-\cos(x) \\ g(x)=x & \Rightarrow & g'(x)=1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(x)g'(x)=-\cos(x)$$

Integrovat kosinus umíme, takže ze vzorce pro integraci per partes pak máme

$$\int x\sin(x)\,dx=-x\cos(x)+\sin(x)+C$$

Příklad 2. Najděte primitivní funkci k funkci $h(x)=\ln(x)$. Zvolíme

$$\begin{array}{ccc} f'(x)=1 & \Rightarrow & f(x)=x \\ g(x)=\ln(x) & \Rightarrow & g'(x)=\dfrac{1}{x} \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(x)g'(x)=1$$

Integrovat konstantu (v našem případě rovnu jedné) umíme, takže

$$\int \ln(x)\,dx=x\ln(x)-x+C$$

Na rozdíl od určitého integrálu, který je stručně pojednán v další části, neexistují pro nalezení primitivní funkce numerické metody. Tabulka neurčitých integrálů některých elementárních funkcí shrnuje ty nejjednodušší případy, které můžeme snadno získat „obráceným čtením“ tabulky pro derivování funkcí:

$f(x)$	$F(x)$	
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\exp(x)$	$\exp(x)$	
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$	$a > 0$, $a \neq 1$
$\dfrac{1}{x\ln(a)}$	$\log_a(\lvert x \rvert)$	$a > 0$, $a \neq 1$

Kromě metody integrace per partes existuje celá řada dalších metod. Zmíníme ještě metodu substitucí, kdy v integrálu zavedeme novou proměnnou vztahem $x = \varphi(u)$. Máme potom

$$\int f(x)\,dx = \int f\left[\varphi(u)\right]\varphi'(u)\,du$$

I když obecně zapsaný integrand na pravé straně rovnice vypadá složitěji, v určitých příkladech tomu může být naopak.

Příklad 3. Najděte primitivní funkci k $f(x) = 1/\left(1+x^2\right)$. Zavedeme substituci $x = \mathrm{tg}\,u$ a máme

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(\mathrm{tg}\,u)^2}\frac{1}{(\cos u)^2}\,du = \int \frac{(\cos u)^2}{(\cos u)^2+(\sin u)^2}\frac{1}{(\cos u)^2}\,du = \int du = u + C$$

Po zpětném dosazení za u ($u = \mathrm{arctg}\,x$) tedy dostaneme

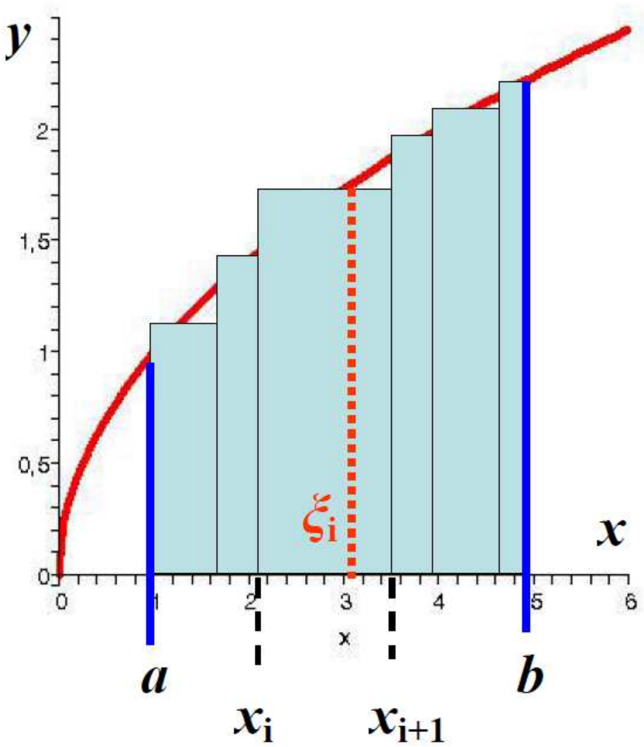
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(x) + C$$

Několik dalších primitivních funkcí:

$f(x)$	$F(x)$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C = -\arccos(x) + C$	$\lvert x \rvert < 1$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C$	$\lvert x \rvert > 1$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$	
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{x+1}{x-1}\right\rvert$	

8.2 Určitý (Riemannův) integrál

Obrázek ukazuje vše potřebné k definici určitého integrálu. Úkolem je spočítat plochu vymezenou grafem $y = f(x)$ a osou x mezi $x = a$ a $x = b$. Při fyzikálních aplikacích může mít tato plocha nejrůznější význam. Například při pohybu částice po přímce: je-li x čas a y rychlost, počítáme dráhu, je-li x poloha a y působící síla, počítáme práci.



Na intervalu $[a, b]$ vytvoříme dělení intervalu D

$$D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Normou dělení nazveme velikost maximálního intervalu dělení

$$\nu(D) = \max\left\{ x_i - x_{i-1} \middle| i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

V každém intervalu $\left[x_{i-1}, x_i \right]$ vezmeme pak hodnotu funkce v nějakém jeho vnitřním bodě ξ_i. Plocha je pak přibližně dána součet ploch jednotlivých obdélníků se stranami $x_i - x_{i-1}$ a $f(\xi_i)$, tj.

$$P \doteq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

V limitním případě, kdy norma dělení půjde k nule dostáváme přesnou hodnotu, které říkáme určitý integrál z funkce $f(x)$ v mezích $[a,b]$

$$P=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \nu(D)\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\int_a^b f(x)\,dx$$

Určitý integrál můžeme počítat buď přibližně numericky (sčítání ploch mnoha obdélníčků je nejjednodušší metodou, ale například pro rychle oscilující funkci nebo tehdy, když některá nebo obě z mezí jdou do nekonečna je třeba užít podstatně rafinovanějších způsobů) nebo jsme-li schopni nalézt k funkci $f(x)$ primitivní funkci $F(x)$, využít platnosti Leibnizovy – Newtonovy formule

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

Všimněte si, že primitivní funkce je sice určena až na konstantu, ale protože ve vztahu vystupuje rozdíl hodnot ve dvou bodech, konstanta se vyruší.

Příklad 1. Dva body o hmotnostech m_1 a m_2 se přitahují gravitační silou podle Newtonova zákona

$$f(r)=-G\frac{m_1 m_2}{r^2}=-\frac{k}{r^2}$$

kde r je vzdálenost hmotných bodů a G Newtonova gravitační konstanta. Protože jak hmotnosti, tak konstanta jsou kladné, je také $k>0$. Změní-li se nyní vzdálenost z r_a na r_b (působením nějaké vnější síly), je práce vykonaná gravitační silou

$$W_g=\int_{r_a}^{r_b} f(r)\,dr=-k\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2}=k\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right)$$

(primitivní funkcí k $-1/r^2$ je $1/r+C$). Práce vykonaná vnější silou má stejnou velikost, ale opačné znaménko

$$W=k\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

Je-li konečná vzdálenost větší než počáteční (tj. $r_b>r_a$), je práce vykonaná vnější silou kladná – bylo třeba překonat vzájemnou přitažlivost.

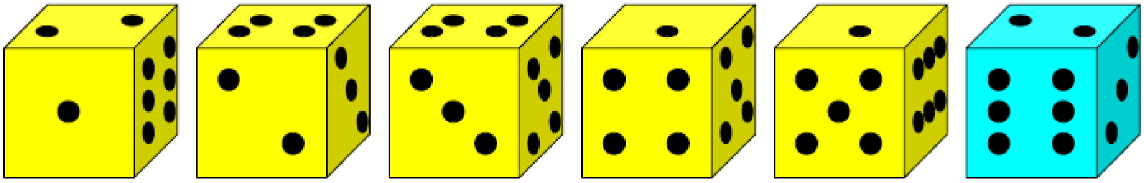
9. Pravděpodobnost

9.1 Náhodné jevy a jejich pravděpodobnost

Začneme dvěma velmi známými příklady ze života:

Příklad 1. Házení mincí – náhodný pokus: jsou celkem dvě možnosti – náhodné jevy (orel, hlava). Sledujeme jev A: padne orel – jedna z možností je příznivá, $p=1/2$.

Příklad 2. Házení kostkou – náhodný pokus: je celkem šest možností – náhodných jevů (1, 2, 3, 4, 5, 6). Sledujeme jev A: padne šestka – jedna z možností je příznivá, $p=1/6$.



Definice pravděpodobnosti: Pravděpodobnost nastoupení jevu A je podílem počtu případů *M*, v nichž jev A nastal (čitatel), a počtu *N* všech možných případů (jmenovatel).

Příklad s jednou kostkou (všech možných případů je $N=6$):

a) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne sudé číslo? Příznivé jsou ty případy, kdy padne dvojka nebo čtyřka nebo šestka, tedy $M=3$. Pravděpodobnost je $p=3/6=1/2$.

b) Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo dělitelné třemi? Příznivé jsou ty případy, kdy padne trojka nebo šestka, tedy $M=2$. Pravděpodobnost je $p=2/6=1/3$.

c) Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo menší než tři? Příznivé jsou ty případy, kdy padne jednička nebo dvojka, tedy $M=2$. Pravděpodobnost je $p=2/6=1/3$.

Příklad se dvěma kostkami (všech možných případů je $N=36$, každá ze 6 možností, které mohou padnout na první kostce, se nezávisle kombinuje s každou ze 6 možností na druhé kostce):

a) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami (současně) padne součet sedm? Příznivé jsou ty případy, kdy padne jednička na první a šestka na druhé kostce, nebo naopak, dvojka na první a pětka na druhé kostce, nebo naopak, trojka na první a čtyřka na druhé kostce, nebo naopak), tedy $M=6$. Pravděpodobnost je $p=6/36=1/6$.

b) Jaká je pravděpodobnost, že součin padnuvších čísel bude lichý? Příznivé jsou ty případy, kdy padne jednička na první kostce a jednička nebo trojka nebo pětka na druhé kostce, trojka na první kostce a jednička nebo trojka nebo pětka na druhé kostce, pětka na první kostce a jednička nebo trojka nebo pětka na druhé kostce, tedy $M=9$. Pravděpodobnost je $p=9/36=1/4$.

Jakých hodnot může pravděpodobnost v principu nabývat? Z definice je zřejmé, že hodnoty budou v intervalu mezi nulou a jedničkou

$$\boxed{0 \le p \le 1}$$

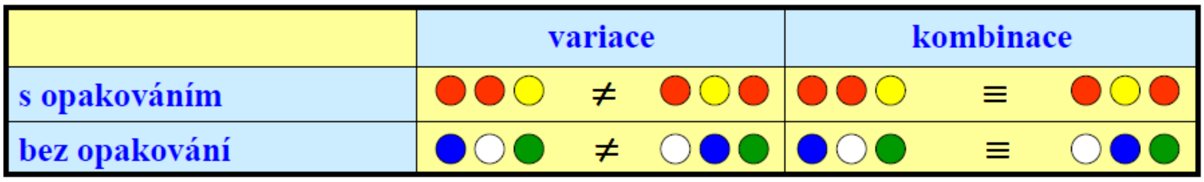
Krajním hodnotám odpovídají jev nemožný – jev s nulovou pravděpodobností a jev jistý – jev s jednotkovou pravděpodobností.

9.2 Kombinatorika

V mnoha aplikacích provádíme výběry *k* prvků z množiny obsahující *n* prvků podle jistých pravidel. Typy pravidel jsou uvedeny v tabulce

	pořadí je podstatné	**pořadí je nepodstatné**
prvky lze opakovat	*variace s opakováním*	*kombinace s opakováním*
prvky nelze opakovat	*variace bez opakování*	*kombinace bez opakování*

Příkladem může být vytváření barevných signálů, kdy šest barev $(n=6)$ zaplňuje tři místa $(k=3)$:



Počet možných výběrů je v následující tabulce:

	variace	**kombinace**
s opakováním	$V_k^{/}(n)=n^k$	$C_k^{/}(n)=\dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$
bez opakování	$V_k(n)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_k(n)=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Pro triviální případ $n=k=1$ máme vždy jedinou možnost (připomeňme si, že z definice $0!=1$, $1!=1$, $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$, $6!=720$, $\ldots$).

Určení vzorce pro variace opakováním:

Kolika způsoby lze z *n* prvků vybrat první? Je to *n* způsobů. Kolika způsoby lze z *n* prvků vybrat druhý? Opět je *n* způsobů. Kolika způsoby lze tedy vybrat první dva prvky? Je to $n \cdot n = n^2$ způsobů. Pokračujeme až k otázce kolika způsoby lze vybrat *k* prvků? Je to $\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k} = n^k$ způsobů.

Určení vzorce pro variace bez opakování:

Kolika způsoby lze z *n* prvků vybrat první? Je to *n* způsobů. Kolika způsoby lze ze zbývajících $n-1$ prvků vybrat druhý? Je to $n-1$ způsobů. Kolika způsoby lze tedy vybrat první dva prvky? Je to $n \cdot (n-1)$ způsobů. Pokračujeme stejně až nakonec, kdy se ptáme kolika způsoby lze ze zbývajících $n-(k-1)$ prvků vybrat *k*-tý? Je to $n-k+1$ způsobů. Kolika způsoby lze tedy vybrat *k* prvků? Je to $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$ neboli $n!/(n-k)!$ prvků.

Určení vzorce pro kombinace bez opakování:

Zatímco pro variace bylo pořadí vybraných prvků podstatné, pro kombinace je podstatný pouze výběr těchto prvků. Musíme proto počet způsobů pro variace podělit tím, kolika způsoby lze uspořádat *k* neopakujících se prvků, což je $k!$ Proto je

$$C_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Určení vzorce pro kombinace s opakováním:

Jak vypadají kombinace s opakováním *k* barevných kuliček při výběru z *n* možných barev? Obrázek ilustruje jednu z možností pro případ $n=7$, $k=14$. Obecně dostaneme počet

modrá	červená	černá	zelená	hnědá	fialová	oranžová
●●	●●●	●●	●●●●		●	●●

kombinací takto: máme *n* přihrádek, tj. $n-1$ přepážek mez nimi a *k* kuliček, celkem tedy $m = n+k-1$ prvků (pozic), z nich vybíráme *k* pozic pro kuličky, tj.

$$C'_k(n) = C_k(m) = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Při variacích nebo kombinacích bez opakování musí být přirozeně $k \le n$ („vybraný prvek nevracíme do losování“). Pro $k=1$ jsou samozřejmě počty možností „s opakováním“ – žádné totiž není a „bez opakování“ stejné, pro $n \ge k > 1$ je $V_k(n) < V'_k(n)$ a $C_k(n) < C'_k(n)$.

Příklad 1. Jaká je pravděpodobnost hlavní výhry ve Sportce? Tah sportky představuje výběr šesti ze čtyřiceti devíti čísel.

$$N = C_6(49) = \frac{49!}{6!43!} \quad , \quad M = 1 \quad , \quad p = \frac{M}{N} \doteq 7 \cdot 10^{-8}$$

Příklad 2. Jaká je pravděpodobnost páté ceny ve Sportce? Ze šesti tažených je třeba uhodnout tři čísla.

$$N = C_6(49) = \frac{49!}{6!43!} \quad , \quad M = C_3(6)C_3(43) = \frac{6!}{3!3!}\frac{43!}{3!40!} \quad , \quad p = \frac{M}{N} \doteq 0{,}018$$

Příklad 3. Jaká je pravděpodobnost, že ve hře typu Šance milion uhodnete správně taženou skupinu cifer? (Z každého ze šesti bubnů obsahujících cifry 0, 1, 2, . , 9 se náhodně vybere jedna.)

$$N = V_6^{/}(10) = 10^6 \quad , \quad M = 1 \quad , \quad p = \frac{M}{N} = 10^{-6}$$

9.3 Pravděpodobnosti složených jevů

Někdy je třeba určit pravděpodobnosti jevů, které jsou nějakým způsobem „složeny“ z jevů jednodušších. Uvažujme o dvou jevech ***A*** a ***B***, jejichž pravděpodobnosti jsou známy, $p(A)$ a $p(B)$. Definujme nové jevy ***C*** a ***D*** jako: jev ***C*** je jev, kdy jevy ***A*** a ***B*** nastanou současně, jev ***D*** je jev, kdy nastane jev ***A*** nebo ***B*** (v principu zahrnuje i možnost, že nastanou oba). Za určitých podmínek lze pravděpodobnosti jevů ***C*** a ***D*** určit pomocí pravděpodobností $p(A)$ a $p(B)$.

Nezávislé jevy

Jaká je pravděpodobnost, že při současném hodu dvěma kostkami padne na obou šestka? Uvědomíme si, že to, co padne na jedné kostce, je nezávislé na výsledku druhé kostky. Máme tedy jev ***A***, kdy na první kostce padne šestka – $p(A)=1/6$ a jev ***B***, kdy na druhé kostce padne šestka – $p(B)=1/6$. Jev ***C*** pak odpovídá tomu, že jevy ***A*** a ***B*** nastanou současně. Máme $N=6\cdot 6=36$ možností a právě jeden příznivý případ $M=1$. Je tedy

$$p(C) = \frac{M}{N} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = p(A)\cdot p(B)$$

Pravděpodobnost současného nástupu nezávislých jevů je rovna součinu pravděpodobností těchto jevů.

Neslučitelné jevy

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne některé ze dvou nejvyšších čísel, tj. padne šestka nebo pětka? Uvědomíme si, že skutečnosti, že šestka i pětka padnou při stejném hodu, jsou neslučitelné**.** Máme tedy jev ***A***, kdy na kostce padne šestka – $p(A)=1/6$ a jev ***B***, kdy na kostce padne pětka – $p(B)=1/6$. Jev ***C*** pak odpovídá tomu, že nastane buď jev ***A*** nebo jev ***B***. Máme $N=6$ možností a dva příznivé případy $M=2$. Je tedy

$$p(C)=\frac{M}{N}=\frac{2}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=p(A)+p(B)$$

Pravděpodobnost nástupu některého z jevů, z nichž každé dva jsou neslučitelné, je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů.

Označíme-li pravděpodobnost jevu ***A*** $p(A)$, je pravděpodobnost jevu opačného $\overline{\boldsymbol{A}}$ (tj. jev A nenastane) $p(\overline{A})=1-p(A)$. Pro součet pravděpodobností jevu ***A*** a opačného jevu $\overline{\boldsymbol{A}}$ platí

$$p(A)+p(\overline{A})=1$$

Příklad 4. Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině *k* osob mají alespoň dvě narozeniny ve stejný den? Rok má $n=365$ dní. Určíme nejprve pravděpodobnost jevu ***A***, že každá z osob má narozeniny *v* jiný den. Počet případů možných pro tento jev je $V_k^{/}(n)$ (variace s opakováním – v principu může mít každá z osob narozeniny v kterýkoli den). Počet případů příznivých je $M=V_k(n)$ (variace bez opakování – nechceme, aby se narozeninový den zopakoval u více osob). Jev, který nás zajímá, je opačným jevem k jevu ***A***, jeho pravděpodobnost je tedy

$$p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{V_k(n)}{V_k^{/}(n)}=1-\frac{n!}{(n-k)!n^k}$$

Je-li ve skupině pouze jeden člověk ($k=1$), nemohou připadnout dvoje narozeniny na stejný den – skutečně dostáváme v tomto případě $p(\overline{A})=1-1=0$. Pro skupinu například 40 osob je pak $p(\overline{A})\doteq 1-0{,}11=0{,}89$, tedy skoro 90%.

Bernoulliův pokus

Nejprve zavedeme pojmy a značení. Nastane-li předem definovaný jev ***A*** (například „padne šestka“), nazveme to *zdarem*, v opačném případě *nezdarem*. Pravděpodobnost zdaru označíme *p* (v příkladu s kostkou *p* = 1/6), pravděpodobnost nezdaru je $1-p$ (v příkladu s kostkou tedy 5/6). *n*-krát nezávisle provedeme pokus (například hod kostkou). Bude nás zajímat jev ***B***, kdy právě při *x* provedeních z celkového počtu *n* provedení pokusu nastane zdar. S touto základní situací souvisí další jevy – jev $\boldsymbol{A_j}$, kdy pro $j=1,2,\ldots,x$ nastane zdar při *j*-tém provedení pokusu, jev $\boldsymbol{B_k}$, kdy pro $k = x+1, x+2, \ldots, n$ nastane při *k*-tém provedení pokusu nezdar a konečně jev $\boldsymbol{C}$, kdy jevy $\boldsymbol{A_1}$ až $\boldsymbol{A_x}$ a jevy $\boldsymbol{B_{x+1}}$ až $\boldsymbol{B_n}$ nastoupí současně, tj. právě při prvních *x* opakováních pokusu nastane zdar, při zbývajících nezdar. Pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{C}$ spočteme snadno jako součin pravděpodobností nezávislých jevů (například hodů kostkou)

$$p(C) = p(A_1) \cdots p(A_x) \cdot p(B_{x+1}) \cdots p(B_n) = p^x (1-p)^{n-x}$$

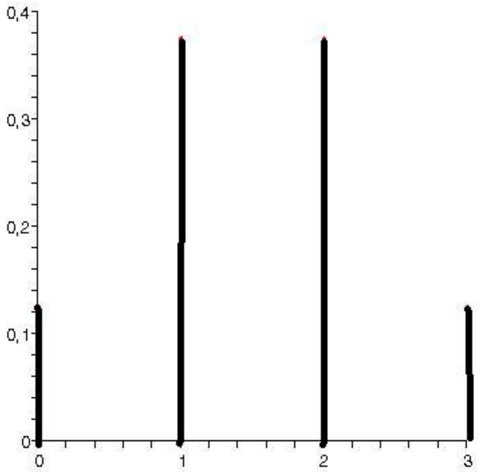
Pro pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{B}$ nám ale nezáleží na tom, v jakém pořadí došlo k požadovaným *x* zdarům ze všech *n* opakování pokusu. Možností, kdy zdar nastal právě při *x* ze všech *n* opakování pokusu, je (kombinace)

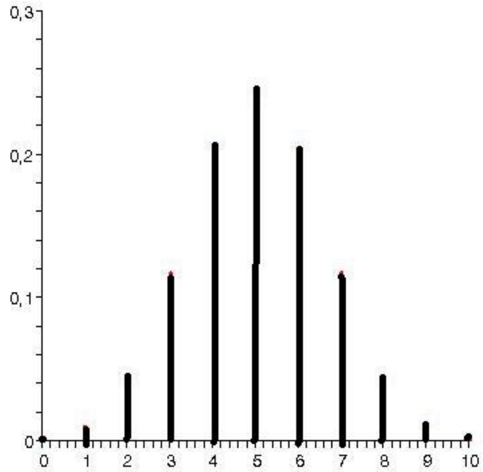
$$C_x(n) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \equiv \binom{n}{x}$$

Výsledná pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{B}$ je tedy $C_x(n)$-krát větší než pravděpodobnost jevu $\boldsymbol{C}$, tj.

$$p(B) = C_x(n)\, p(C) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Na obrázcích je závislost pravděpodobnosti jevu $\boldsymbol{B}$ na *x* při *n* hodech mincí pro $n=3$ a $n=10$.





Někoho možná překvapí, že při zvyšujícím se *n* se pravděpodobnost stejného počtu zdarů a nezdarů (pro $n=10$ je to při $x=5$) neblíží jedné polovině, ale klesá. Je to proto, že počítáme pravděpodobnost, kdy je počet zdarů a nezdarů *přesně* stejný. Při velkých hodnotách *n* pak rozdíl třeba o jedničku nebo dvojku v počtech zdarů a nezdarů má téměř stejnou pravděpodobnost jako když jsou počty stejné, jak vidíme z obrázku už při poměrně malém $n=10$ je pravděpodobnost pro $x=4$ a $x=6$ jen o málo menší než maximální pro $x=5$.

10. Měření a zpracování dat

10.1 Měřené hodnoty veličin jsou „náhodné“

Uvozovky v nadpisu jsou upozorněním na to, že při měření (ať už je jeho podstatou cokoliv) závislosti hodnoty měřené veličiny (závisle proměnná) na hodnotách jiné veličiny (nezávisle proměnná) se mohou uplatňovat také náhodné vlivy, nikoliv snad to, že „naměříme cokoliv“. Tedy za stejných podmínek (tj. při stejných hodnotách nezávisle proměnných veličin) můžeme dostat při opakovaných měřeních různé hodnoty měřené veličiny (závisle proměnné). Základem pro matematický popis této situace je pojem náhodné veličiny.

10.2 Náhodná veličina s diskrétním rozdělením

Náhodná veličina X a její (diskrétní) rozdělení je veličina, která nabývá hodnot $\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right)$ s pravděpodobnostmi $\left(p_0, p_1, \ldots, p_n\right)$. Protože jevy, kdy veličina X nabývá dvou různých hodnot x_j současně jsou neslučitelné, musí být $p_0 + p_1 + \cdots + p_n = 1$. *Rozdělením náhodné veličiny* rozumíme soubor všech dvojic $\left(x_j, p_j\right)$ pro $j = 0, 1, \ldots, n$. V části o pravděpodobnosti jsme se setkali s výrazem pro *Bernoulliovo rozdělení*

$$x_j = j \quad , \quad p_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j} \quad , \quad 0 \le q \le 1 \quad , \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

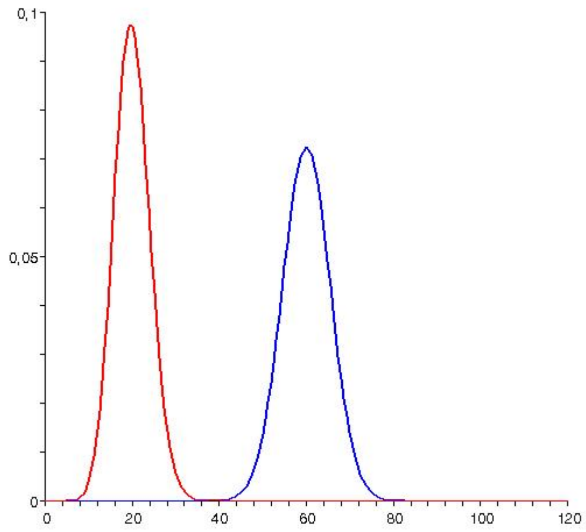
Samozřejmě platí pro součet pravděpodobností

$$\sum_{j=0}^{n} p_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} = \left[(1-q)+q\right]^n = 1$$

V případě, že pravděpodobnost zdaru a nezdaru v jednom pokusu je stejná ($q = 1/2$) dostáváme *binomické rozdělení*

$$x_j = j \quad , \quad p_j = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad , \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

Na obrázku je Bernoulliovo rozdělení pro $n = 120$ a dvě hodnoty q: $q = 1/6$ (házení kostkou, červeně) a $q = 1/2$ (házení mincí, modře) – pro lepší viditelnost jsou body spojeny plnou křivkou. Maximum je v obou případech u střední hodnoty $\langle j \rangle = q n$ (střední hodnotu definujeme dále), tj. $\langle j \rangle = 20$ pro házení kostkou a $\langle j \rangle = 50$ pro házení mincí. Na příkladu



střelce, který vystřelí n-krát na terč si ukážeme, jak zjistit rozdělení experimentálně. Dosažené počty bodů při jednotlivých výstřelech představují hodnoty náhodné veličiny. Jaké jsou pravděpodobnosti jednotlivých hodnot? Pro n = 50 například:

hodnoty	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
četnosti	0	0	1	1	2	2	3	3	8	20	10
pravděp	**0,00**	**0,00**	**0,02**	**0,02**	**0,04**	**0,04**	**0,06**	**0,06**	**0,16**	**0,40**	**0,20**

Při různých počtech výstřelů n se pravděpodobnosti budou obecně měnit. Pro rostoucí n budeme pozorovat jejich „ustalování“. Která hodnota nejlépe reprezentuje rozdělení? Náhodnou veličinu samozřejmě nejdokonaleji reprezentuje zadání jejího rozdělení. To je ovšem poněkud nepraktické. U střelce jsme viděli, že jeho kvalita je reprezentována hodnotou blízkou devítce. Realizovala se nejčastěji, má největší váhu. Vhodnější reprezentativní hodnotou bude aritmetický průměr všech hodnot včetně „násobnosti“

$$\langle j \rangle = \frac{n_0 \cdot 0 + n_1 \cdot 1 + \cdots + n_{10} \cdot 10}{n_0 + n_1 + \cdots + n_{10}} = \sum_{j=0}^{10} \frac{n_j}{50}\, j = \sum_{j=0}^{10} p_j\, j = 8{,}12$$

Obecně pak

$$\langle x \rangle = \sum_{j=0}^{n} p_j\, x_j \quad , \quad \sum_{j=0}^{n} p_j = 1$$

Takto definovaná hodnota $\langle x \rangle$ je váženým průměrem jednotlivých hodnot a nazývá se *střední hodnotou náhodné veličiny*. Výpočet střední hodnoty náhodné veličiny, která má Bernoulliovo rozdělení není komplikovaný:

$$\langle j\rangle=\sum_{j=0}^{n} j\frac{n!}{j!(n-j)!}q^{j}(1-q)^{n-j}=nq\sum_{j=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(j-1)!\left[n-1-(j-1)\right]!}q^{j-1}(1-q)^{n-1-(j-1)}$$

a s označením $i=j-1$, $m=n-1$ pak

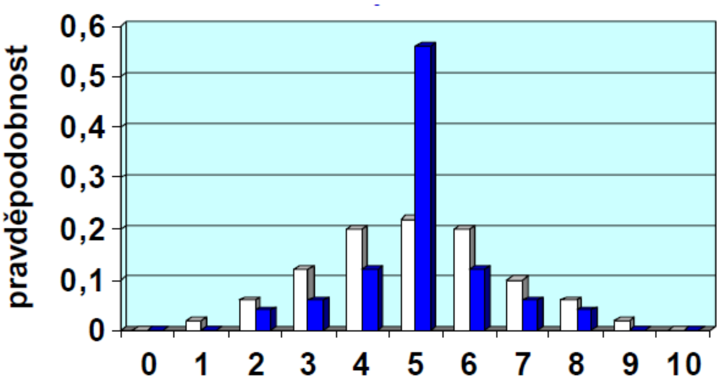
$$\langle j\rangle=nq\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!(m-i)!}q^{i}(1-q)^{m-i}=nq(1-q+q)^{m}=nq$$

Před zavedením další charakteristiky rozdělení uvedeme další příklad, tentokrát se dvěma střelci, z nichž každý vystřelí *n*-krát na terč. Zvolme opět $n=50$:

hodnoty	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
četnosti	0	1	3	6	10	11	10	5	3	1	0
pravděp	0,00	0,02	0,06	0,12	0,20	0,22	0,20	0,10	0,06	0,02	0,00

hodnoty	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
četnosti	0	0	2	3	6	28	6	3	2	0	0
pravděp	0,00	0,00	0,04	0,06	0,12	0,56	0,12	0,06	0,04	0,00	0,00

Na obrázku jsou zobrazena rozdělení obou střelců (pro prvého bílými, pro druhého modrými sloupečky). Výpočtem zjistíme, že oba dosáhli střední hodnoty 5. Čím se tedy jejich výsledky



liší? Je to rozptyl nebo z něho vypočtená *směrodatná odchylka*. Jak se k této charakteristice dostaneme? Uvažujme náhodnou veličinu $Y=f(X)$. Má-li veličina X rozdělení (x_j, p_j), má veličina Y rozdělení $(y_j, p_j)=(f(x_j), p_j)$. Jaká veličina by tedy mohla charakterizovat „odchýlení“ hodnot od střední hodnoty? Nejjednodušší možnost $Y=X-\langle x\rangle$ není vhodná, protože pro libovolné rozdělení je $\langle y\rangle=0$:

$$\langle y\rangle=\sum_{j=0}^{n} y_j\, p_j=\sum_{j=0}^{n}\left(x_j-\langle x\rangle\right)p_j=\sum_{j=0}^{n} x_j\, p_j-\langle x\rangle\sum_{j=0}^{n} p_j=\langle x\rangle-\langle x\rangle=0$$

Takže musíme vzít náhodnou veličinu $Y = \left(X - \langle x\rangle\right)^2$. Střední hodnotu této veličiny nazýváme *rozptylem* $D(X) = \left\langle \left(X - \langle x\rangle\right)^2 \right\rangle$. Provedeme-li umocnění, máme pro rozptyl

$$D(X) = \left\langle X^2 - 2X\langle x\rangle + \langle x\rangle^2 \right\rangle = \left\langle X^2 \right\rangle - \langle x\rangle^2$$

Odmocnina z rozptylu (jak vidět z definice rozptyl je vždy kladný) je tzv. *směrodatná odchylka*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\left\langle X^2\right\rangle - \langle x\rangle^2}$$

Pro úplnost příkladu dodejme, že směrodatná odchylka vyjde 1,7 pro prvého a 1,2 pro druhého střelce. Pro Bernoulliovo rozdělení je

$$\left\langle j^2\right\rangle = \sum_{j=0}^{n} j^2 \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j} = nq\sum_{j=1}^{n} \frac{j(n-1)!}{(j-1)!\left[n-1-(j-1)\right]!} q^{j-1}(1-q)^{n-1-(j-1)} =$$

$$nq\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(1+i)(n-1)!}{i!(n-1-i)!} q^i (1-q)^{n-1-i} = nq + n(n-1)q^2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(n-2)!}{(i-1)!\left[n-2-(i-1)\right]!} q^{i-1}(1-q)^{n-2-(i-1)}$$

$$= nq + n(n-1)q^2\sum_{k=o}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} q^k (1-q)^{n-2-k} = nq + n(n-1)q^2 = n^2q^2 + nq(1-q)$$

Rozptyl Bernoulliova rozdělení je tedy

$$D(j) = \left\langle j^2\right\rangle - \langle j\rangle^2 = np(1-p)$$

Distribuční funkci $F(x)$ definujeme na reálné ose $\mathbb{R}$ součtem pravděpodobností $p_0 + \cdots + p_s$ odpovídajících hodnotám menším než x_{s+1}

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ p_0 & x_0 \le x < x_1 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{s} p_j & x_s \le x < x_{s+1} \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{n} p_j = 1 & x \ge x_n \end{cases}$$

Naopak pravděpodobnosti dostaneme jako

$$p_0 = F(x_0) \quad , \quad p_j = F(x_j) - F(x_{j-1}) \quad 1 \le j \le n$$

Medián rozdělení je taková hodnota x_s, pro kterou $F(x_s) < 0,5$ a $F(x_{s+1}) \ge 0,5$.

Pro $n \to \infty$ a j malé přejde Bernoulliovo rozdělení na Poissonovo rozdělení. Upravujeme tedy

$$p_j = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j} = \frac{\langle j\rangle^j}{j!} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^j (n-j)! \left(1-\frac{\langle j\rangle}{n}\right)^j} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\langle j\rangle}{n}\right)^n$$

Využijeme vztahů platných pro $n\to\infty$ a j malé: $n! \approx n^j (n-1)!$, $\left(1-\langle j\rangle/n\right)^j \approx 1$ a definice $\exp\left(-\langle j\rangle\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\langle j\rangle/n\right)^n$. Dostáváme tak Poissonovo rozdělení

$$p_j = \frac{\langle j\rangle^j}{j!} \exp\left(-\langle j\rangle\right)$$

Poissonovo rozdělení se projeví třeba tehdy, sledujeme-li časový průběh počtu produktů radioaktivního rozpadu: počítáme částice detekované v nějakých časových intervalech, ale ty tvoří jen nepatrnou část částic v těchto intervalech vzniklých při rozpadu radioaktivních jader zdroje.

10.3 Náhodná veličina se spojitým rozdělením

Náhodná veličina *X*, která nabývá všech reálných hodnot x z intervalu $[x_m, x_M]$ má (spojité) rozdělení dané funkcí $w(x)$ na tomto intervalu s vlastnostmi

$$w(x) \geq 0 \quad x_m \leq x \leq x_M \quad , \quad \int_{x_m}^{x_M} w(x)\,dx = 1$$

Funkci $w(x)$ se také říká hustota pravděpodobnosti, neboť elementární pravděpodobnost (tj. pravděpodobnost, že veličina *X* má hodnotu v intervalu $[x, x+dx]$) je $dp = w(x)\,dx$. Také pro náhodnou veličinu se spojitým rozdělením můžeme definovat střední hodnotu, směrodatnou odchylku, distribuční funkci a medián:

$$\langle x\rangle = \int_{x_m}^{x_M} x\,w(x)\,dx \quad , \quad \sigma = \sqrt{\int_{x_m}^{x_M} \left(x-\langle x\rangle\right)^2 w(x)\,dx}$$

$$F(x) = \int_{x_m}^{x} \xi\,w(\xi)\,d\xi \quad , \quad F(x_{MED}) = 0{,}5$$

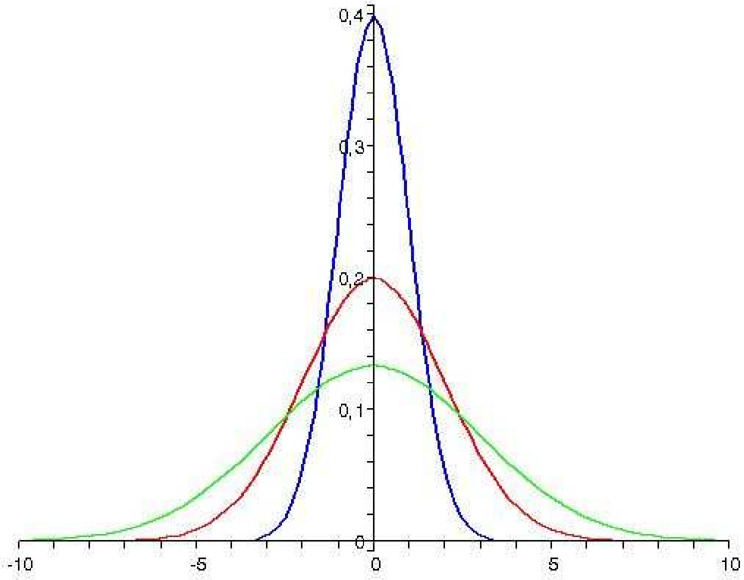
Důležitým příkladem je normální neboli Gaussovo rozdělení na celé reálné ose, tj. $x \in (-\infty, \infty)$:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]$$

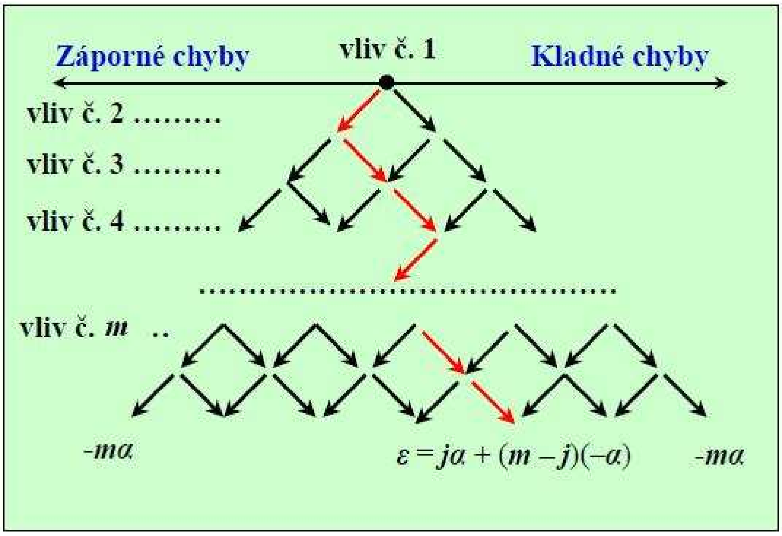
Veličina σ skutečně vyjadřuje standardní odchylku, platí

$$\langle x \rangle = 0 \quad , \quad D(X) = \sigma^2$$

Na obrázku je Gaussovo rozdělení pro $\sigma=1$ (modrá křivka), $\sigma=2$ (červená křivka) a $\sigma=3$ (zelená křivka).



Předpokládejme, že existuje nějaká „správná“ hodnota měřené veličiny *x* a že při opakovaném měření získáme hodnoty $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, některé mohou být i stejné. Odchylky od (zatím neznámé) správné hodnoty označme $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Tyto hodnoty jsou hodnotami náhodné veličiny *E*. Její hustotu pravděpodobnosti označme $w(E)$. Za jistých podmínek je rozdělením veličiny *E* rozdělení normální. Předpokládejme, že odchylky jsou způsobeny *m* nezávislými vlivy, každý z nich odchýlí měřenou hodnotu od *x* o stejnou hodnotu α, kladnou nebo zápornou, s pravděpodobností $1/2$. Kladnou odchylku $(+\alpha)$ nazveme zdarem, zápornou $(-\alpha)$ nezdarem. Výsledná odchylka naměřené hodnoty ε od *x* leží v intervalu $(-m\alpha, m\alpha)$ a může nabývat pouze celých násobků α.



Pravděpodobnost odchýlení o *j* kladných a $m-j$ záporných vlivů (*j* zdarů a $m-j$ nezdarů), tj. pravděpodobnost vzniku odchylky $\varepsilon = j\alpha + (m-j)(-\alpha)$, tj. $\varepsilon = (2j-m)\alpha$ je dána binomickým rozdělením (Bernoulliovým pro $q = 1/2$)

$$p_j = \frac{1}{2^m}\frac{m!}{j!(m-j)!}$$

Pro velká *m* je lze nahradit rozdělením normálním (Gaussovým) – důkaz naznačíme na konci kapitoly. Předpoklad o normální rozdělení umožňuje následující zpracování výsledků: reprezentativní hodnota měření představuje *aritmetický průměr* všech naměřených hodnot (střední hodnota veličiny)

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)$$

(číslujeme teď měření od jedničky, nikoliv od nuly). Tento aritmetický průměr neurčuje správnou hodnotu veličiny. Lze však tvrdit, že s pravděpodobností 68,3% tato správná hodnota leží v intervalu určeném aritmetickým průměrem a *směrodatnou odchylkou* příslušnou aritmetickému průměru

$$x \in \left(\overline{x} - \overline{\sigma}, \overline{x} + \overline{\sigma}\right)$$

což zapisujeme také takto

$$x = \overline{x} \pm \overline{\sigma}$$

Směrodatnou odchylku aritmetického průměru počítáme pomocí odchylek od aritmetického průměru jako

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{n(n-1)}\left[\left(x_1 - \langle x\rangle\right)^2 + \left(x_2 - \langle x\rangle\right)^2 + \ldots + \left(x_n - \langle x\rangle\right)^2\right]$$

Jen pro zajímavost uveďme, že pokud bychom chtěli psát výraz pomocí odchylek od skutečné hodnoty (to však z praktického hlediska nemá smysl, skutečnou hodnotu neznáme), měl by výraz tvar

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n^2}\left[\left(x_1 - x\right)^2 + \left(x_2 - x\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x\right)^2\right]$$

Vezmeme-li interval daný tzv. krajní chybou (trojnásobek směrodatné odchylky), pak skutečná hodnota měřené veličiny se v tomto intervalu nachází s pravděpodobností 97%.

10.4 Jaký průměr?

Příklad 1. Student měl ze tří matematických písemek v semestru tři hodnocení B a jedno C. U dvou závěrečných písemek měl A a D, u ústní zkoušky E. Jaká je jeho průměrná známka, jestliže všechny známky mají stejnou váhu? Označíme z_j hodnoty, n_j jejich četnosti a w_j váhy. Obecný vztah pro vážený průměr je

$$\langle z \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j\, n_j\, w_j}{\sum_{j=1}^{n} n_j\, w_j}$$

V našem případě jsou všechny váhy stejné, potom se výraz zjednoduší na

$$\langle z \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_j\, n_j}{\sum_{j=1}^{n} n_j}$$

Máme tedy

$$\langle z \rangle = \frac{1,5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2,5 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{3 + 1 + 1 + 1 + 1} = \frac{13}{7} = 1,86 \ldots\ldots \mathrm{C}$$

Příklad 2. Řešte předchozí příklad za předpokladu, že závěrečná písemka má dvakrát větší váhu než průběžná a ústní zkouška má dvakrát větší váhu ne. závěrečná písemka:

$$\langle z \rangle = \frac{1,5 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2,5 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 4}{3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4} = \frac{25,5}{12} = 2,12 \ldots\ldots \mathrm{C}$$

Příklad 3. Automobil jel z A do B první úsek rychlostí 130 km/h a stejnou dobu druhý úsek průměrnou rychlostí 70 km/h. Jaká byla jeho průměrná rychlost na celé trase? Je odpověď dána aritmetickým průměrem obou hodnot? Je to věc definice. Průměrná je definována jako podíl celkové dráhy a celkové doby jízdy. Dráhu ale neznáme. Víme však, že oba úseky trvaly stejně času. V takovém případě by bylo

$$\langle v \rangle = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t + v_2 t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 100\,\text{km/h}$$

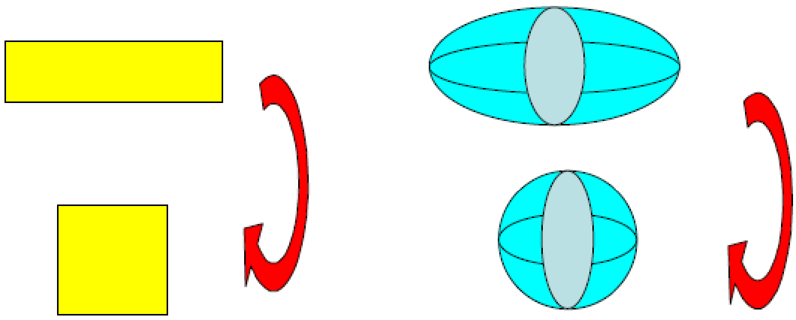
Takže přece jen aritmetický průměr? Zkusme úlohu obměnit.

Příklad 4. Automobil jel z A do B první úsek rychlostí 130 km/h a druhý úsek rychlostí 70 km/h. Oba úseky byly stejně dlouhé. Jaká byla nyní průměrná rychlost?

$$\langle v \rangle = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 91\,\text{km/h}$$

Jedná se o tzv. harmonický průměr.

Příklad 5. „Průměrný“ obdélník je čtverec (určete stranu čtverce, který má stejný obsah jako obdélník o stranách *a* a *b*), „průměrný“ elipsoid je koule (určete poloměr koule, která má stejný objem jako elipsoid o poloosách *a* , *b* , *c*):



V prvním případě máme pro stranu čtverce

$$P = a\,b = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{a\,b}$$

a v druhém případě pro poloměr koule

$$V = \frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c = \frac{4}{3}\pi\,x^3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{a\,b\,c}$$

V obou případech se jedná o tzv. geometrický průměr.

Pro obecný počet *n* hodnot máme následující výrazy pro výpočet průměru:

aritmetický průměr

$$\langle x \rangle_a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

geometrický průměr

$$\langle x \rangle_g = \sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots x_n}$$

harmonický průměr

$$\langle x_h \rangle = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Platí nerovnost

$$\langle x \rangle_a \geq \langle x \rangle_g \geq \langle x \rangle_h$$

Pro $n=2$ je to hned vidět (napišme nerovnosti pro druhé mocniny průměrů)

$$\langle x \rangle_a^2 \geq \langle x \rangle_g^2 \quad \Leftarrow \quad \frac{(x_1+x_2)^2}{4} \geq x_1 x_2 \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{4}(x_1+x_2)^2 - x_1 x_2 = (x_1-x_2)^2 \geq 0$$

$$\langle x \rangle_g^2 \geq \langle x \rangle_h^2 \quad \Leftarrow \quad x_1 x_2 \geq \frac{4 x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + 2 x_1 x_2 + x_2^2} \quad \Leftarrow \quad x_1 x_2 \frac{(x_1+x_2)^2}{4} \geq x_1^2 x_2^2$$

10.5 Přechod od Bernoulliova ke Gaussovu rozdělení

Bernoulliovo rozdělení je

$$x_j = j \quad , \quad p_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j} \quad , \quad 0 \leq q \leq 1 \quad , \quad j = 0,1,\ldots,n$$

Logaritmus pravděpodobnosti je

$$\ln(p_j) = \ln(n!) - \ln(j!) - \ln([n-j]!) + j\ln(q) + (n-j)\ln(1-q)$$

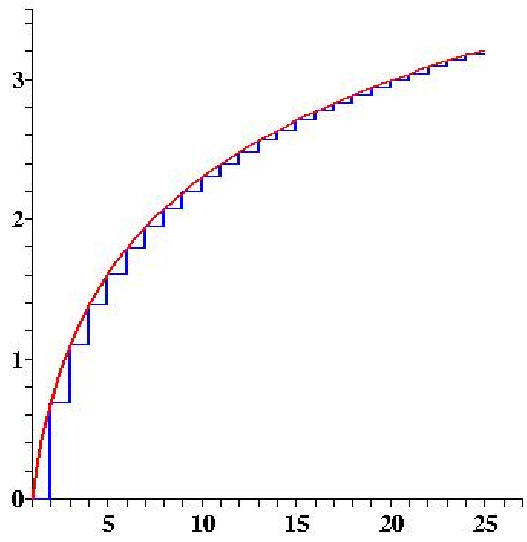
Stejně jako při přechodu k Poissonovu rozdělení předpokládáme $n \to \infty$, ale teď budeme předpokládat, že počet zdarů a nezdarů se nebude příliš lišit, tj. také *j* a $n-j$ jsou velká čísla. Základem pro výpočet bude přibližné vyjádření $\ln(k!) = \sum_{r=1}^{k} \ln(r)$ (logaritmus součinu je roven součtu logaritmů součinitelů) pro velké hodnoty *k*. Protože logaritmus je monotónně rostoucí funkce, můžeme napsat nerovnost, kdy integrál z logaritmu na intervalu jednotkové délky je větší než hodnota logaritmu ve spodní mezi a menší než hodnota logaritmu v horní mezi

$$\int_{r-1}^{r} \ln(\xi)\, d\xi < \ln(r) < \int_{r}^{r+1} \ln(\xi)\, d\xi$$

Sečtením přes *r* od $r=1$ do $r=k$ dostáváme

$$\int_{0}^{k} \ln(\xi)\, d\xi < k\ln(k) - k < \ln(k!) < \int_{1}^{k+1} \ln(\xi)\, d\xi = (k+1)\ln(k+1) - k$$

neboť $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x$. Na obrázku vidíme, proč už pro relativně malé



hodnoty můžeme sumaci $\sum_j \ln(j)$ nahradit integrací $\int \ln(x)\,dx$ – tedy diskretní proměnnou *j* spojitou proměnnou *x*. Za hodnotu $\ln(k!)$ bychom mohli vzít průměr z obou krajních hodnot v nerovnosti, my vezmeme ještě o něco lepší aproximaci, zvanou Stirlingova formule (její odvození už je však trochu komplikovanější)

$$\ln(k!) \doteq \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln(k) - k - \frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

Pro logaritmus pravděpodobnosti budeme teď mít

$$P(x) = \ln\left[p(x)\right] =$$
$$-\frac{1}{2}\ln(2\pi) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(x) - \left(n - x + \frac{1}{2}\right)\ln(n-x) + x\ln(q) + (n-x)\ln(1-q)$$

Maximum hustoty pravděpodobnosti bude u takové hodnoty *x*, pro kterou je derivace funkce $p(x)$ (a tedy i jejího logaritmu) rovna nule. Dostáváme tak rovnici

$$\frac{dP(x)}{dx} = \ln\frac{q(n-x)}{(1-q)x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Pro druhou derivaci máme vztah

$$\frac{d^2P(x)}{dx^2} = -\left(\frac{1}{n-x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-x)^2} + \frac{1}{x^2}\right]$$

První derivace je rovna nula pro hodnotu x, která je přibližně (pro $q = 1/2$ přesné) rovna střední hodnotě $x = \langle x \rangle = nq$. Ve stejném přiblížení máme

$$P(\langle x\rangle)=-\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) \quad , \quad \frac{d^2P(\langle x\rangle)}{dx^2}=-\frac{1}{\sigma^2} \quad ,$$

kde σ je směrodatná odchylka $\sigma^2 = nq(1-q)$. Vezmeme-li teď první členy Taylorova rozvoje $P(x)$ kolem $x=\langle x\rangle$, dostáváme

$$P(x)=-\frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\langle x\rangle\right)^2$$

a po odlogaritmování dostáváme skutečně Gaussovo rozdělení se středem v $x=\langle x\rangle$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{\left(x-\langle x\rangle\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Na obrázcích je porovnáno binomické rozdělení s normálním rozdělením pro $n=25$ (vlevo) a $n=50$ (vpravo).