# Matematika

## rovnice a funkce
## neznámé a proměnné
## řešení a grafy

podzim 2010, první část

# Rovnice, neznámé, řešení

aneb

**neznámé se schovávají v rovnicích,**
**ale my je odhalíme**

# Zlý sen vrchní sestry
aneb
# k čemu jsou zdravotnickému personálu rovnice

V jedné nejmenované nemocnici byli zvyklí na dodávku ampulí s lékem, který se přidával do infuzí. Ampule měly vždy objem $V$ a koncentrace účinné látky v ní byla $p$% objemových. Personál měl příkaz vrchní sestry dávat do infuze o výsledném objemu $W$ vždy jednu ampuli léku.

Jednou dodala lék jiná firma a ampule měly objem dvojnásobný, tj. $2V$, koncentrace účinné látky byla také dvojnásobná. Vrchní sestra přikázala dávat do infuzí polovinu obsahu ampule.

**Co myslíte, je to správný příkaz??**

# Řešení úlohy

Označení: objemy v $cm^3$ (ml)

$W$ … objem infuze

$V$ … objem ampule první firmy

$p$ … koncentrace účinné látky v objemových procentech

$W$… výsledný objem v obou případech

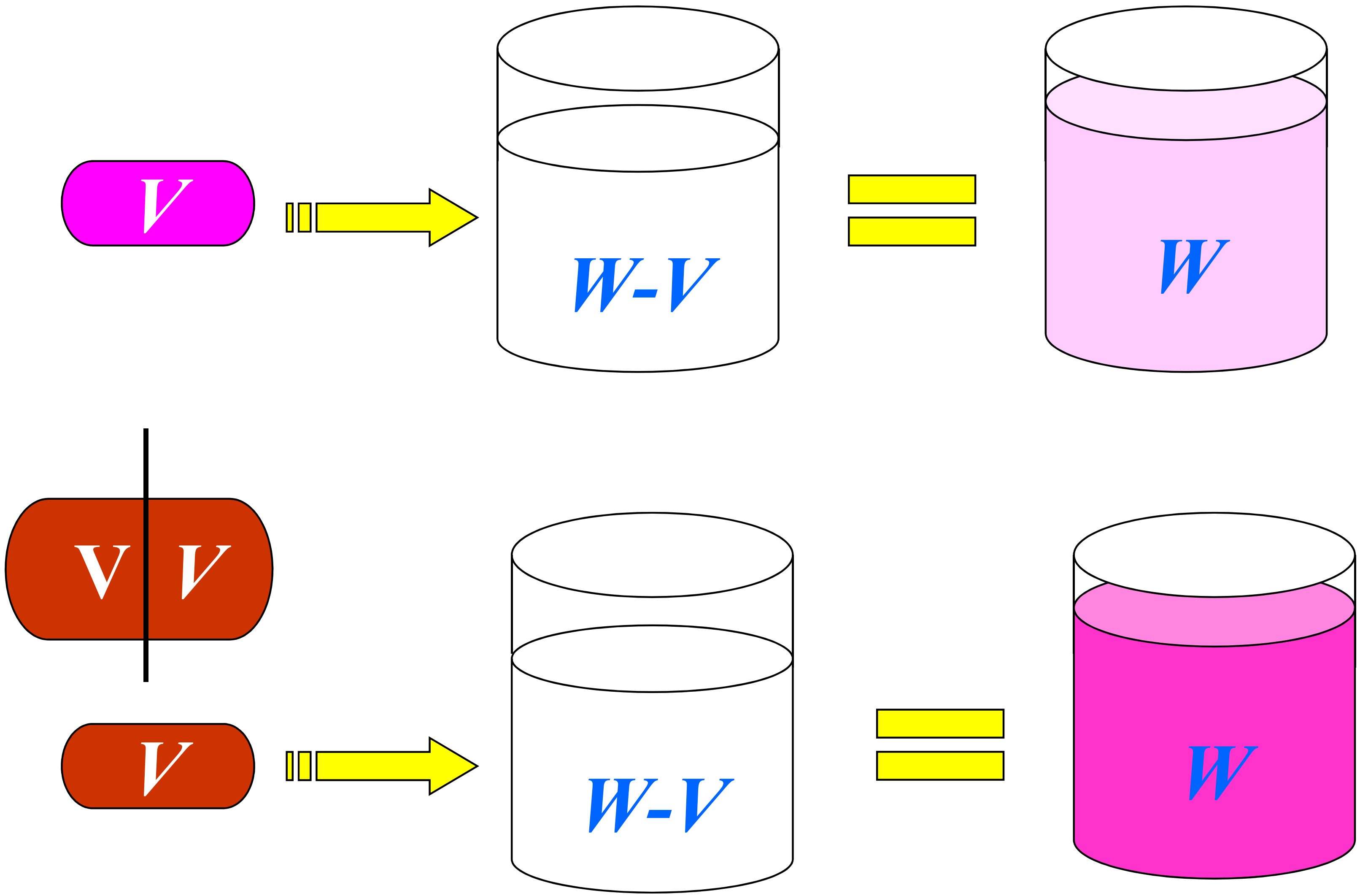
Objem účinné látky $$U = \left(\frac{p}{100}\right)V$$

Předepsaná koncentrace účinné látky v infuzi $$q = 100 \cdot \frac{U}{W} = \frac{pV}{W}$$

Koncentrace účinné látky podle nového příkazu $$\overline{p} = 2p \Rightarrow \overline{q} = \frac{2pV}{W} = 2q$$

**Závěr: Snad nebyla dvojnásobná dávka smrtelná.**

# Řešení úlohy názorně



# Obecnější úloha

Předpokládejme, že druhá firma dodala ampule o objemu $\Omega$ = 20 ml s koncentrací účinné látky $\pi$ = 50 % (objemových). Do jakého objemu základu infuze mají sestry vmíchat jednu ampuli, aby dosáhly předepsané koncentrace $q$ = 5 % ?

$x$ … objem infuze (neznámá místo objemu $W$ z předchozí úlohy)

Objem účinné látky v ampuli
$$\omega = \frac{\pi}{100} \cdot \Omega$$

Rovnice pro $x$

**lineární rovnice o neznámé $x$**
$$q = 100 \cdot \frac{\omega}{x + \Omega} \Rightarrow qx + (q - \pi)\Omega = 0$$

**řešení**
$$x = \Omega\left(\frac{\pi}{q} - 1\right) = 20\left(\frac{50}{5} - 1\right) = 180 \text{ ml}$$

# Ještě doplnění

Jaká část objemu ampule bude v infuzi, jejíž výsledný objem je předepsán jako $W$ ? Jaký výsledek očekáváte pro $W$ = 200 ml?

$y$ … část objemu ampule v infuzi o předepsaném objemu $W$

Objem účinné látky v infuzi $$w = y\omega = \frac{\pi}{100} \cdot y\Omega$$

Rovnice pro $y$

**lineární rovnice**

**o neznámé *y***

$$q = 100 \cdot \frac{w}{W} \Rightarrow q = \frac{y\pi\Omega}{W}$$

**řešení**

$$y = \frac{qW}{\pi\Omega} = \frac{5 \cdot 200}{50 \cdot 20} = 1$$

# Složitější úloha

Do infuze o celkovém objemu $W = 200$ ml se přidávají dvě účinné látky. První z nich je v ampulích o objemu $V_1 = 20$ ml v koncentraci $p_1 = 30$ % (objemových), druhá v ampulích o objemu $V_2 = 40$ ml v koncentraci $p_2 = 50$ %. Výsledná koncentrace obou účinných látek v infuzi má být $q = 15$ % a poměr jejich koncentrací $q_1 / q_2 = p = 0{,}5$ (jedna ku dvěma).

(1) Kolik ml roztoku 1 a kolik ml roztoku 2 je třeba dát do infuze ?

(2) Kolik infuzí připravíme, máme-li k dispozici $a = 20$ ampulí roztoku 1 a $b = 15$ ampulí roztoku 2 ?

**Část (1) spočteme nyní, část (2) snadno dokončíte sami.**

# Řešení složitější úlohy – sestavení rovnic

$x$ ... hledaný objem roztoku 1 (první neznámá)
$y$ … hledaný objem roztoku 2 (druhá neznámá)

$U_1$ … objem účinné látky 1 v objemu $x$
$U_2$ … objem účinné látky 2 v objemu $y$

$$U_1 = \frac{p_1}{100} \cdot x, U_2 = \frac{p_2}{100} \cdot y$$

koncentrace
$q_1$ … látky 1 v infuzi
$q_2$ … látky 2 v infuzi

$$q_1 = \frac{U_1}{W} = \frac{p_1}{100} \cdot \frac{x}{W}, q_2 = \frac{U_2}{W} = \frac{p_2}{100} \cdot \frac{y}{W}$$

$$U_1 + U_2 = U \qquad \Rightarrow \quad p_1 x + p_2 y \quad = qW$$

$$\frac{q_1}{q_2} = p \Rightarrow \frac{p_1 x}{p_2 y} = p \quad \Rightarrow \quad p_1 x - p p_2 y = 0$$

**soustava lineárních rovnic**
**o dvou neznámých *x, y***

# Řešení složitější úlohy – řešení rovnic

výchozí rovnice

$$p_1 x + p_2 y = qW$$

$$p_1 x - p p_2 y = 0$$

odečtení druhé rovnice od první

$$p_2(1+p)y = qW \Rightarrow y = \frac{qW}{p_2(1+p)}$$

dosazení *y* do kterékoli z výchozích rovnic – *x* vyjde stejně

$$x = \frac{p\,qW}{p_1(1+p)},\ y = \frac{qW}{p_2(1+p)} \quad \Rightarrow x \doteq 33,\ y = 40$$

získaná dvojice $x$=33 ml, $y$ = 40 ml je řešením soustavy

**I ve zdravotnictví někdy třeba řešit rovnice, hlavně lineární.**

# Řešení soustavy více lineárních rovnic snadno a rychle

**soustava *m* lineárních rovnic o *n* neznámých**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

**matice soustavy**

**rozšířená matice soustavy**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

$a_{ij}$, $b_i$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ … **koeficienty** (známá čísla)

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ … **neznámé**

všechny $n$-tice, které vyhovují rovnicím, tvoří **řešení** soustavy rovnic

# Ekvivalentní úpravy

**ekvivalentní úpravy soustavy rovnic**
jsou ty, které nemění její řešení

(1) násobení libovolné rovnice nenulovým číslem
(2) přičtení *k*-násobku libovolné rovnice k jiné libovolné rovnici

**ekvivalentní úpravy matice soustavy**
co provádíme s rovnicemi, provádíme s příslušnými řádky matice

(1) násobení všech prvků v libovolném řádku nenulovým číslem
(2) přičtení *k*-násobku prvků v libovolném řádku k jinému libovolnému řádku

**poznámka:** možnosti pro $m$ a $n$ … $m = n$ … $m < n$ … $m > n$

# Případ $m = n = 3$ … příklad 1 … (I)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -2x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

(2) první rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 5y + 5z &= 5 \\ -y - 2z &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

# Případ $m = n = 3$ … příklad 1 … (II)

další úpravy
(3) druhou rovnici násobíme 1/5 (tj. dělíme ji 5)
(4) druhou rovnici (po předchozí úpravě) přičteme k třetí rovnici

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ y + z &= 1 \\ - z &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

ekvivalentní soustava rovnic (která má stejné řešení jako původní)
řešení najdeme dosazováním „odzadu“
**jediné řešení …** $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$ **Proveďte zkoušku, prosím !**
**A ještě se podívejte na matici – je ve schodovitém tvaru.**

**Matice z koeficientů levých stran má stejně schodů jako celá matice (braná i se sloupcem pravých stran).**

# Případ $m = n = 3$ … příklad 2 … (I)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -2x + y - z &= 1 \\ -3x + 4y + z &= 4 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

(2) první rovnici vynásobenou 3 přičteme k třetí

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 5y + 5z &= 5 \\ 10y + 10z &= 10 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & 10 & 10 \end{array}\right)$$

# Případ $m = n = 3$ … příklad 2 … (II)

další úpravy

(3) druhou rovnici násobíme 1/5 (tj. dělíme ji 5)

(4) třetí rovnici násobíme 1/10 (tj. dělíme ji 10)

(5) druhou rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ y + z &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ekvivalentní soustava rovnic (která má stejné řešení jako původní)

řešení najdeme dosazováním „odzadu“

**jedna volná neznámá**

**nekonečně mnoho řešení …** $x = -z$, $y = 1 - z$, $z$ je libovolné

**Proveďte zkoušku! Matice jsou opět ve schodovitém tvaru.**

**Matice mají shodný počet schodů, ale o jeden menší než počet neznámých.**

# Případ $m = n = 3$ … příklad 3 … (I)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -2x + y - z &= 1 \\ -x + 3y + 2z &= 8 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

(2) první rovnici přičteme k třetí

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 5y + 5z &= 5 \\ 5y + 5z &= 10 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

# Případ $m = n = 3$ … příklad 3 … (II)

další úpravy

(3) druhou rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)

(4) Druhou rovnici násobíme 1/5 (tj. dělíme ji 5)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ y + z &= 1 \\ 0 &= 5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

ekvivalentní soustava rovnic (která má stejné řešení jako původní)

řešení najdeme dosazováním „odzadu“

**žádné řešení … poslední rovnici nelze splnit**

**Matice jsou zase ve schodovitém tvaru. Ale:**

**Matice koeficientů levých stran má méně schodů než celá matice.**

# Případ $m < n$ … příklad 1

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -2x + y - z &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

(2) upravenou druhou rovnici vynásobíme 1/5 (tj. vydělíme 5)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ y + z &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

**jedna volná neznámá**

**nekonečně mnoho řešení …** $x = -z,\ y = 1 - z,\ z$ je libovolné

**Matice jsou opět ve schodovitém tvaru.**

**Matice mají shodný počet schodů, ale o jeden menší než počet neznámých.**

# Případ $m < n$ … příklad 2

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -2x - 4y - 6z &= -5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -6 & -5 \end{array}\right)$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 0 &= -1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

**žádné řešení … druhou rovnici nelze splnit**

**Matice jsou opět ve schodovitém tvaru.**

**Matice koeficientů levých stran má méně schodů než celá matice.**

# Případ $m > n$ … příklad 1 … (I)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -2x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ -x + 2y \phantom{+ z} &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{array}$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

(2) první rovnici vynásobenou (–1) přičteme k třetí (tj. odečteme ji)

(3) první rovnici přičteme ke třetí

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 5y + 5z &= 5 \\ -y - 2z &= 0 \\ 4y + 3z &= 5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

# Případ $m > n$ … příklad 1 … (II)

další úpravy

(3) druhou rovnici vynásobíme 1/5 (tj. vydělíme 5)

(4) upravenou druhou rovnici přičteme k třetí rovnici

(5) upravenou druhou rovnici vynásobenou (–4) přičteme k třetí

(6) upravenou třetí rovnici odečteme od čtvrté

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ y + z &= 1 \\ -z &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

**Dokončete a charakterizujte řešení. Popište schodovitý tvar obou matic.**

# Případ $m > n$ … příklad 2 … (I)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -2x + y - z &= 1 \\ -x + 3y + 2z &= 3 \\ 3x + y + 4z &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

úpravy

(1) první rovnici vynásobenou 2 přičteme k druhé

(2) první rovnici přičteme k třetí

(3) první rovnici vynásobenou (–3) přičteme ke čtvrté

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 5y + 5z &= 5 \\ 5y + 5z &= 5 \\ -5y - 5z &= -5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right)$$

# Případ $m > n$ … příklad 2 … (II)

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= 2 \\
y + z &= 1 \\
0 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Úpravy rovnic, které vedly ke schodovitému tvaru matic popište.

**nekonečně mnoho řešení**

$x = -z$, $y = 1 - z$, $z$ libovolné (volná neznámá)

**Počet schodů obou matic je stejný a roven 2, o jeden menší než počet neznámých.**

# Případ $m > n$ … příklad 3 … (I)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ -x - 2y - 3z &= -2 \\ 2x + 4y + 6z &= 4 \\ -3x - 6y - 9z &= -6 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -3 & -6 & -9 & -6 \end{array}\right)$$

Popište úpravy a získejte ekvivalentní soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

**nekonečně mnoho řešení** $x = 2 - 2y - 3z$, $y$ a $z$ libovolné
**dvě volné neznámé – počet schodů matic je shodný a o dvě menší než počet neznámých**

# Obecné závěry

**Gaussova eliminační („likvidační“) metoda**

právě předvedený způsob řešení soustavy rovnic převodem matice a rozšířené matice (o sloupec pravých stran) na schodovitý tvar

**hodnost matice**

počet nenulových řádků jejího schodovitého tvaru

**soustava lineárních rovnic**

$h(\mathrm{A})$, $h(\mathrm{B})$ … hodnosti matice a rozšířené matice soustavy

**řešitelnost soustavy *m* rovnic o *n* neznámých** $\Leftrightarrow$ $h(\mathrm{A}) = h(\mathrm{B}) = h$
(schodovité tvary matic mají stejně schodů)

**počet volných neznámých** … $d = n - h$

**jediné řešení** $\Leftrightarrow$ $d = 0$, tj. $h = n$

# Úlohy na rovnice

**Úloha 1.** Proveďte rozbor řešitelnosti a počtu řešení soustavy $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých, jsou-li všechny pravé strany nulové. Zdůvodněte, proč má vždy řešení a jaké.

**Úloha 2.**

$$\begin{aligned} -x - y - 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= -4 \\ -5x + 2y + 3z &= 4 \\ x + 2y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

**Úloha 3.**

$$\begin{aligned} -x - y - 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

**Úloha 4.** Vymyslete soustavu tří rovnic o třech neznámých, která nemá řešení.

**Úloha 5.** Vymyslete soustavu tří rovnic o dvou neznámých, která má právě jedno řešení.

# Funkce, proměnné, grafy

aneb

**podnět, odezva a jejich znázornění**

# Dokonalé smysly a jak to souvisí s funkcemi

„Kdyby náš sluch, zrak, čich, hmat a chuť reagovaly úměrně intenzitě působících podnětů, čili lineárně, nebylo by možné obsáhnout tak velký rozsah jejich intenzity, s nimiž se setkáváme. Například bychom dobře viděli doma při práci, ale navečer by pro nás byla úplná tma. Naopak za slunného dne bychom oslepli. Každé čidlo je totiž nejcitlivější při určité dopadající intenzitě. Při nepatrných intenzitách nereaguje, naopak příliš velké intenzity jej zahltí nebo i zničí.“

„Je umožněno vnímání v obrovském rozsahu, ale je i zachována výborná rozlišovací schopnost relativních změn. Např. změní-li se intenzita nějakého pole z hodnoty 1000 na 10 000, vnímáme tuto změnu stejně dobře jako např. z hodnoty 0,1 na 1. Je to výborně zařízeno.“

**Ale jak je to zařízeno?**
**Smysly umí převádět násobení na sečítání – vnímají logaritmicky.**

# Naše smysly

**sluch** … Tím, že ucho vnímá logaritmicky, je schopno pojmout obrovský rozsah intenzit. Obdobně jsou na tom ostatní smysly.

**zrak** ... Oko je schopné vnímat bodový zdroj, ze kterého dopadají desítky fotonů za sekundu, výjimečně i jen několik za sekundu.

**čich** … Zředění čichově rozeznatelných látek může dosahovat hodnot jedna ku miliardě, i vyšší. Taková ohromná citlivost není často možná ani s použitím nejlepší techniky.

**chuť** … Citlivost je podobná jako u čichu, navíc čich pomáhá k lepšímu rozlišení.

# Co jsou to decibely
aneb
# uši umí logaritmovat

Kavárna byla prázdná, jen někde v rohu tiše hrál houslista a kousek opodál prováděl asistent hygienika měření hlučnosti prostředí. Naměřil 30 decibelů. Přicházeli lidé, usedali ke kávě a hovořili. Měření ukázalo 50 decibelů. Začala diskotéka, hudba sílila, a naráz bylo 100 decibelů. Zaburácel hrom – 120 decibelů.

**Co to znamená? Znamená to, že zvuk diskotéky je dvakrát intenzivnější než hovor v kavárně?**

K odpovědi na tuto a podobné otázky potřebujeme samozřejmě definici intenzity, definici hlasitosti a také vědět něco o matematických závislostech – funkcích.

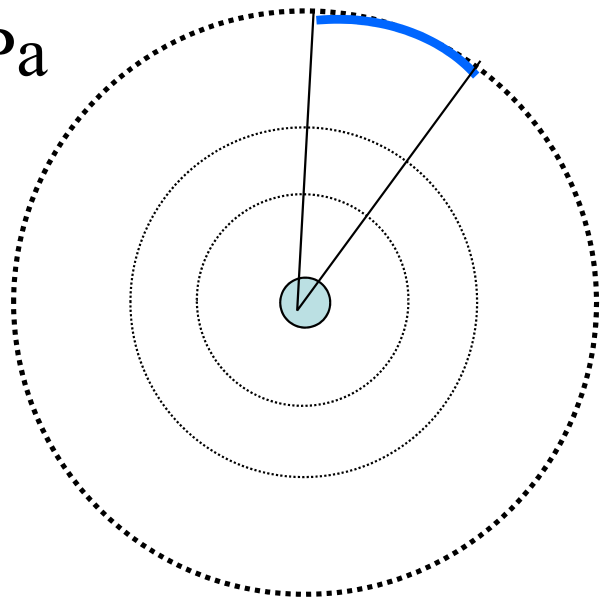
# Aritmetické a geometrické narůstání intenzita zvuku

**intenzita zvuku**
energie zvukového vlnění, která projde plochou 1m$^2$ za dobu 1s

**jednotky** … J m$^{-2}$s$^{-1}$ = W m$^{-2}$

**akustický tlak** … $p$, $I \sim p^2$

1m$^2$ … $I = P/4\pi R^2$



**práh slyšení** … $I_0 = 10^{-12}$ W m$^{-2}$, $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa

**práh bolesti** … $I_B = 10$ W m$^{-2}$

**rozsah intenzit** … 13 řádů

# Aritmetické a geometrické narůstání hladina intenzity zvuku (hlasitost) (I)

**Weberův – Fechnerův zákon**

narůstá-li intenzita řadou geometrickou, narůstá subjektivní sluchový vjem řadou aritmetickou

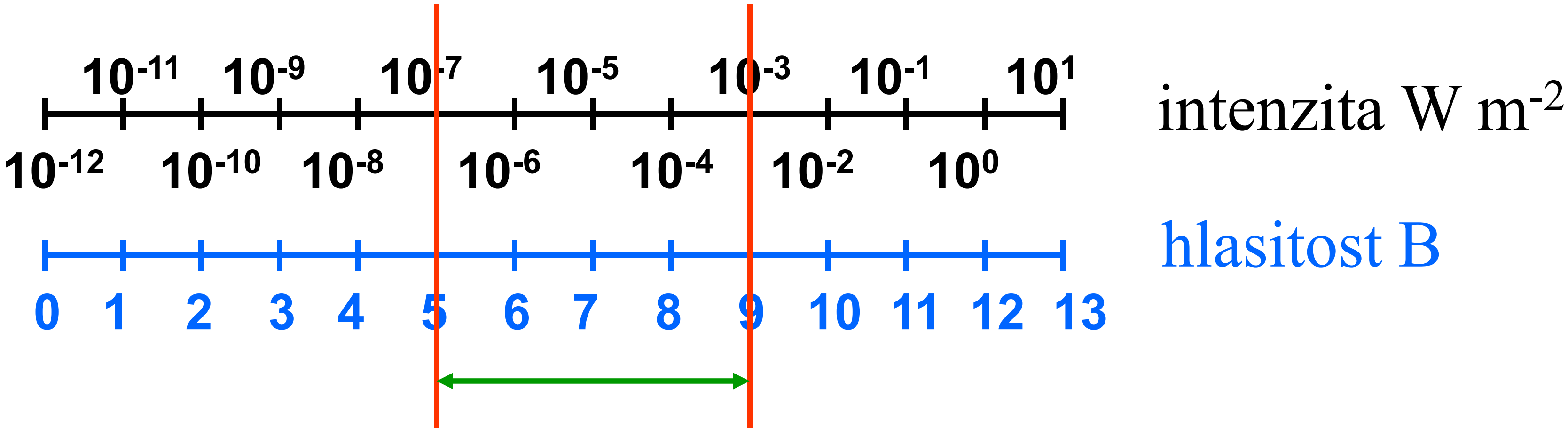
vzroste-li intenzita desetkrát, vzroste hladina intenzity, vyjadřující sluchový vjem, o 1 B (bel)

vzroste-li intenzita stokrát, vzroste hladina intenzity, vyjadřující sluchový vjem, o 2 B

vzroste-li intenzita $10^n$ - krát, vzroste hladina intenzity, vyjadřující sluchový vjem, o *n* B

# Aritmetické a geometrické narůstání hladina intenzity zvuku (hlasitost) (II)

**stupnice intenzity a hladiny intenzity**

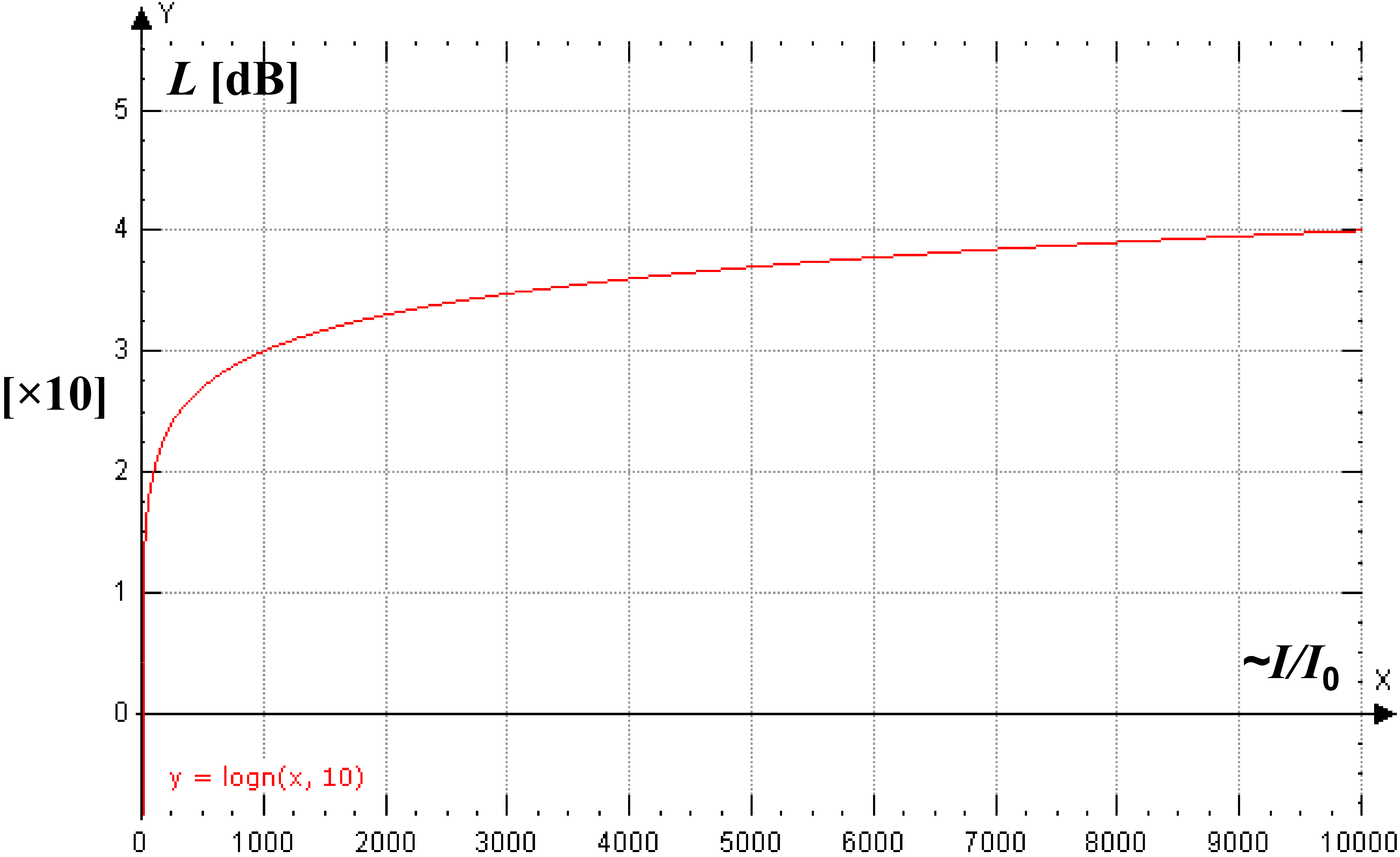



$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-3}}{10^{-7}} = 10^4, \; L_1 - L_2 = 4, \; \log_{10}\frac{I_1}{I_2} = 4$$

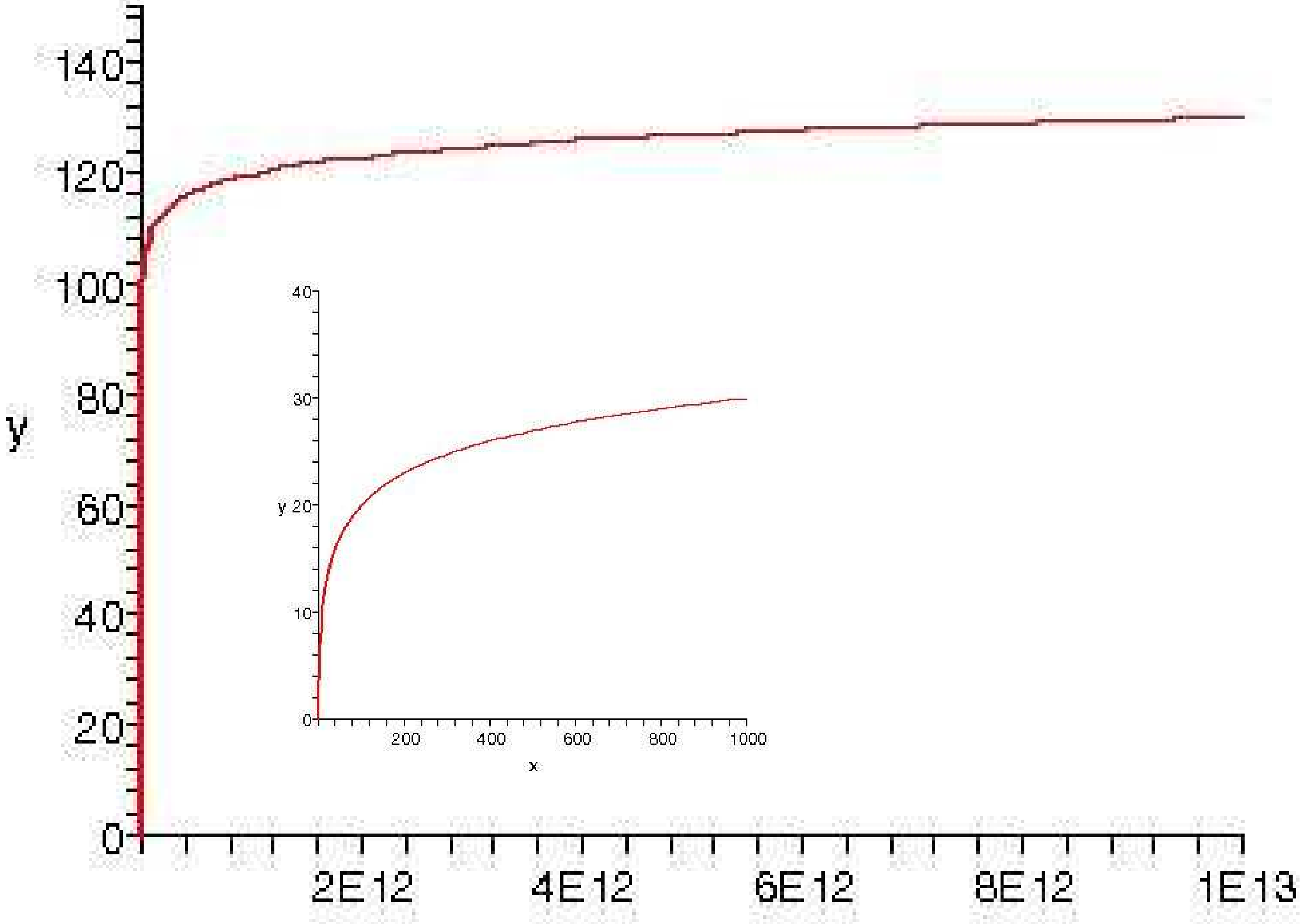
$$\Delta L = 10 \cdot \log\frac{I_1}{I_2}, \; L = 10 \cdot \log\frac{I}{I_0}$$

**jednotka hlasitosti *L* … 1 decibel**

# Závislost hlasitosti na intenzitě

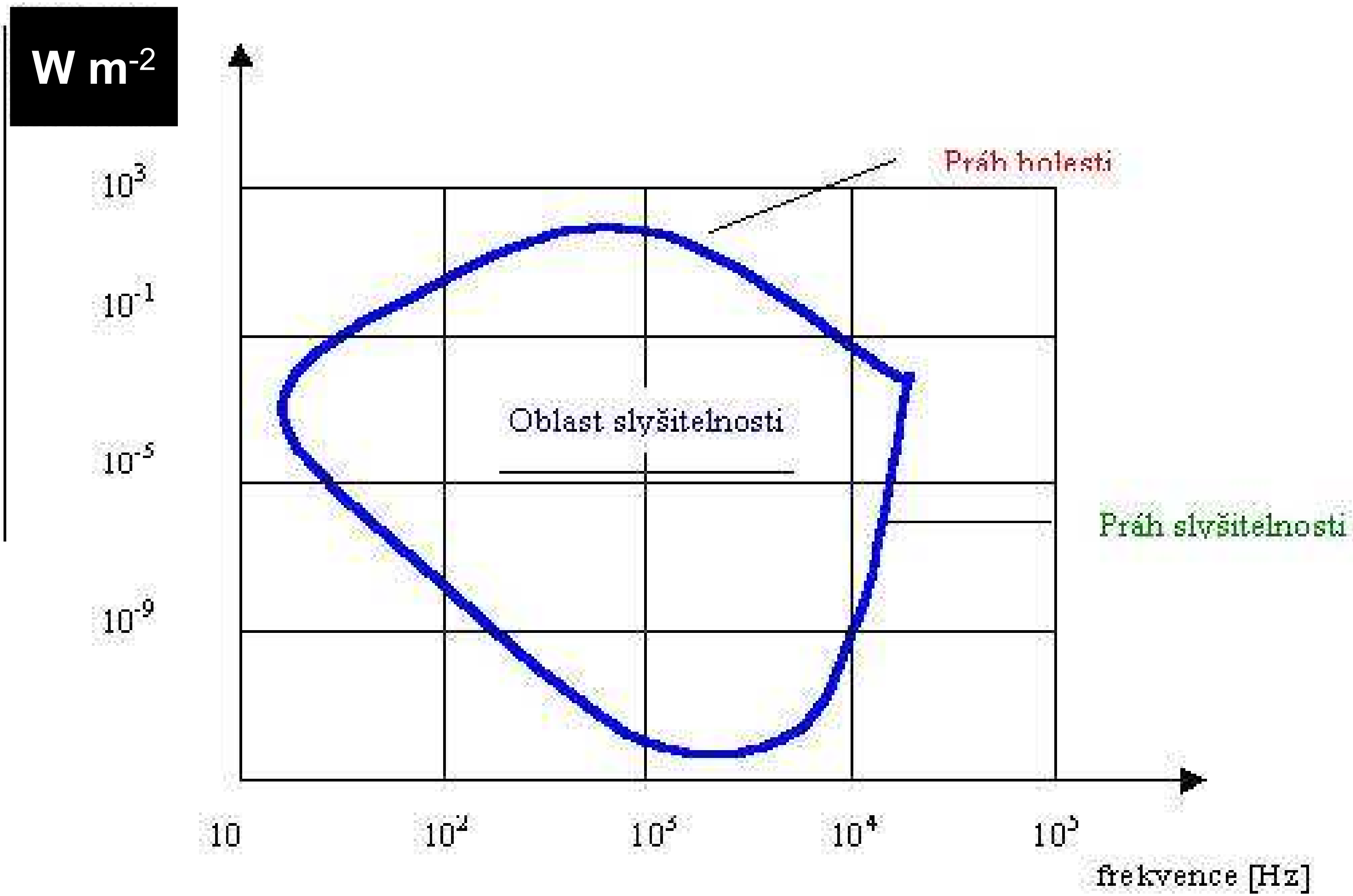


# Závislost hlasitosti na intenzitě
# celý rozsah



| SITUACE | L [dB] | I [$W m^{-2}$] | p [Pa] |
|---|---|---|---|
| práh slyšitelnosti | 0 | $10^{-12}$ | 0,000 02 |
| šepot, šelest listí | 10 | $10^{-11}$ | 0,000 065 |
| tichá zahrada | 20 | $10^{-10}$ | 0,000 2 |
| housle – pianissimo | 30 | $10^{-9}$ | 0,000 65 |
| kroky, tichá hudba | 40 | $10^{-8}$ | 0,002 |
| hluk v kavárně | 50 | $10^{-7}$ | 0,006 5 |
| hluk v obchodě | 60 | $10^{-6}$ | 0,02 |
| hluk automobilu | 70 | $10^{-5}$ | 0,064 5 |
| kancelář s psacími stroji | 80 | $10^{-4}$ | 0,204 |
| rušná ulice, klakson auta | 90 | $10^{-3}$ | 0,645 |
| orchestr fortissimo, siréna | 100 | $10^{-2}$ | 2,04 |
| sbíječka | 110 | $10^{-1}$ | 6,45 |
| tryskový motor, hrom | 120 | 1 | 20,4 |
| práh bolesti | 130 | 10 | 64,5 |

# Citlivost ucha k frekvencím



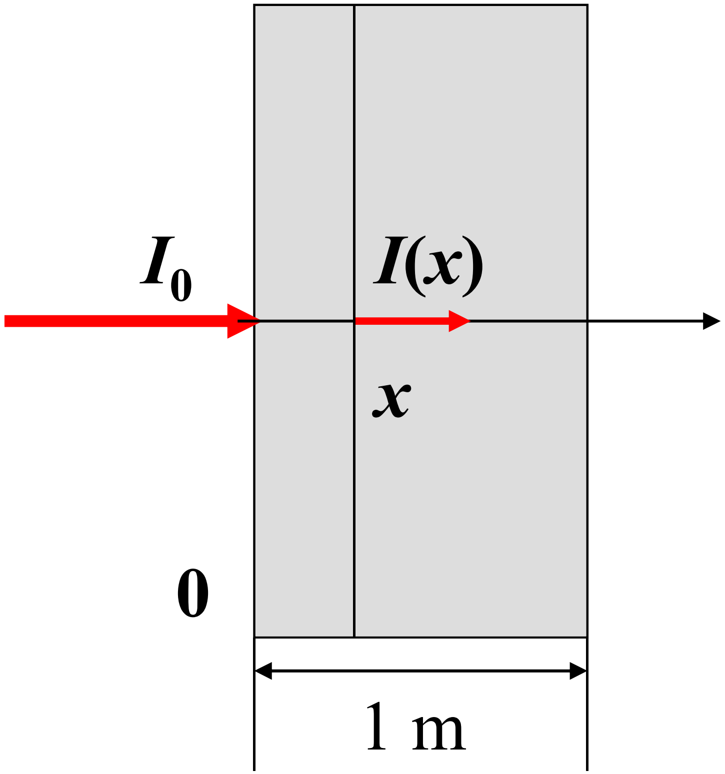
# **Jak se tlumí záření**
# aneb
# **potřebuje funkce také radiologický asistent?**

Tento příběh se stal při jedné exkurzi skupiny studentů lékařské fyziky na velmi dobře vybavené rentgenové pracoviště. Vedoucí radiologický asistent se studentům velice ochotně věnoval, ukazoval jim funkci přístrojů a zabýval se také problematikou ochrany před zářením.

Ujišťoval studenty, že se personálu nemůže nic stát, neboť obsluhuje přístroj zpoza dveří se zabudovanou olověnou deskou, přičemž rentgenové záření se v desce tlumí „úměrně čtverci její tloušťky". Studenti fyziky se poněkud rozpačitě usmívali.

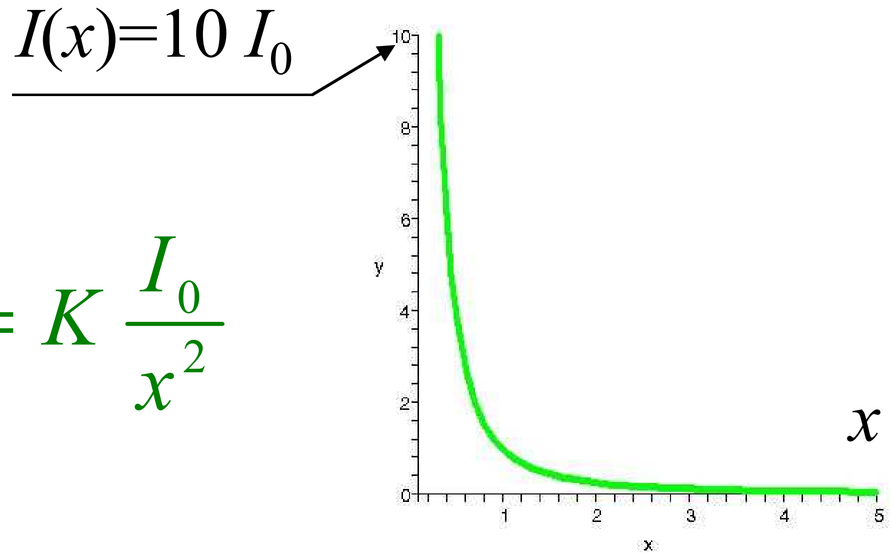
**Víte proč? Báli se ozáření nebo byl důvod jiný?**

# Jak by mělo vypadat tlumení intenzity „se čtvercem tloušťky“ ?



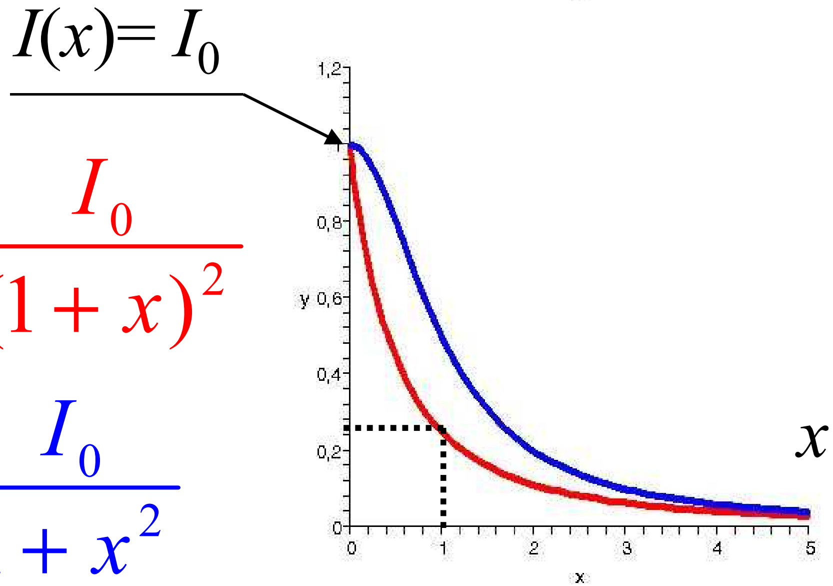

dveře 2x1x1 m

$$I(x) = K\,\frac{I_0}{x^2}$$




$$I(x) = \frac{I_0}{(1+x)^2}$$

$$I(x) = \frac{I_0}{1+x^2}$$




**Pb**, $\rho$ = 11 800 kg m$^{-3}$

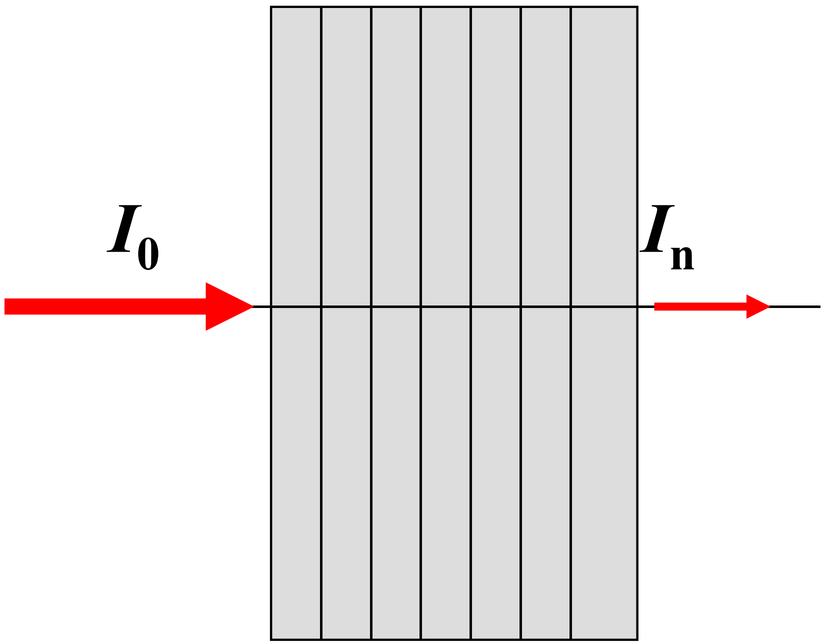
$m$ = 23,6 t

**A co teprve zástěra ?**

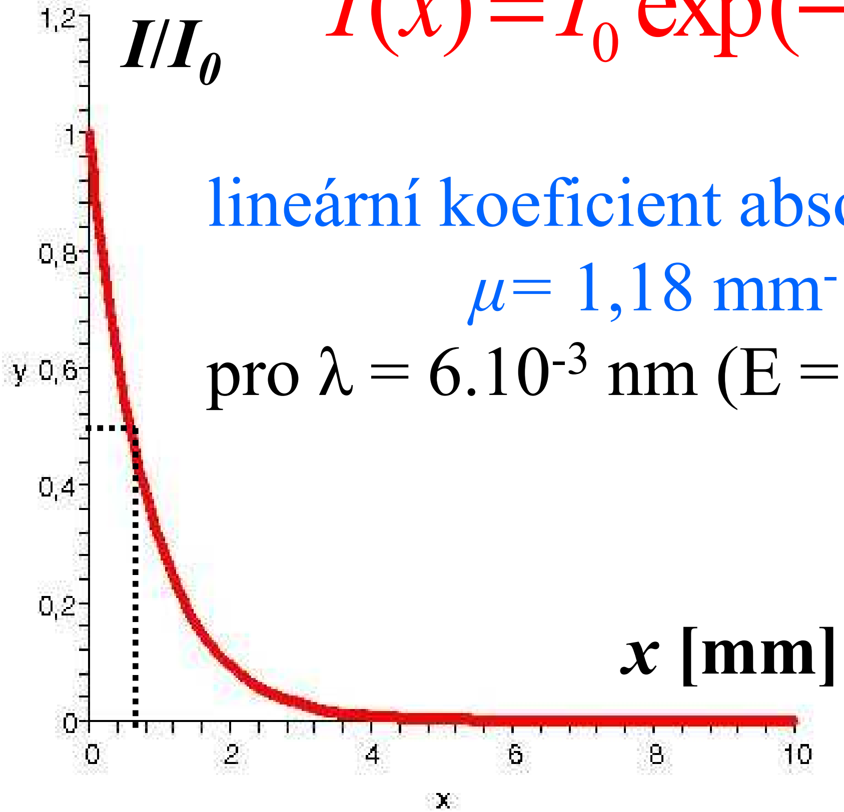
# A jak to je doopravdy ?

$0\ 1\ 2\ \ldots\ \ n$

stejně tlusté vrstvy




$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x)$$




lineární koeficient absorpce

$\mu = 1{,}18\ \mathrm{mm}^{-1}$

pro $\lambda = 6.10^{-3}$ nm (E = 0,2 MeV)

$$\frac{I_1}{I_0} = K,\ \frac{I_2}{I_1} = K,\ldots,\frac{I_n}{I_{n-1}} = K,\cdots, K = e^{-\mu}\quad,\quad e = 2{,}71828\ldots$$

**Ke snížení intenzity na polovinu stačí ani ne milimetr silná deska.**

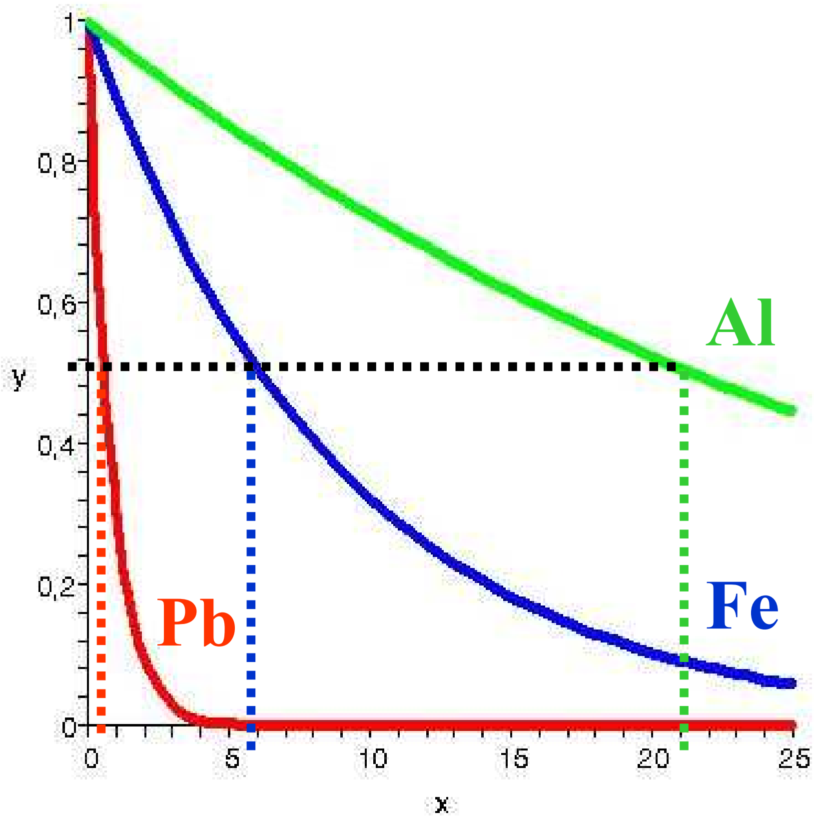
**Hmotnost olověné výplně dveří 1 mm x 1 m x 2 m je asi *m*= 23,6 kg.**

# Srovnání absorpce materiálů – čísla

http://www.eamos.cz/amos/kbf/externi/kbf_0252/ra-rozpad_absorpce.ppt

| $E_\gamma$ [MeV] | $\mu$ [cm$^{-1}$] | | | $d_{1/2}$ [mm] | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Pb** (Z=82) | **Fe** (Z=26) | **Al** (Z=13) | **Pb** (Z=82) | **Fe** (Z=26) | **Al** (Z=13) |
| 0,15 | 24,4 | 1,58 | 0,362 | 0,28 | 4,39 | 19,15 |
| 0,175 | 15,4 | 1,27 | 0,336 | 0,45 | 5,44 | 20,63 |
| 0,2 | 11,8 | 1,13 | 0,323 | 0,59 | 6,13 | 21,46 |
| 0,25 | 6,58 | 0,94 | 0,296 | 1,05 | 7,37 | 23,42 |
| 0,3 | 4,76 | 0,85 | 0,278 | 1,46 | 8,15 | 24,93 |
| 0,5 | 1,72 | 0,66 | 0,228 | 4,03 | 10,50 | 30,40 |
| 1,0 | 0,79 | 0,47 | 0,166 | 8,77 | 14,75 | 41,76 |
| 2,0 | 0,51 | 0,43 | 0,117 | 13,59 | 21,00 | 59,24 |
| 5,0 | 0,49 | 0,25 | 0,075 | 14,15 | 27,73 | 92,42 |
| 10,0 | 0,60 | 0,23 | 0,062 | 11,55 | 30,14 | 111,8 |

# Srovnání absorpce materiálů – grafy




E = 0,2 MeV

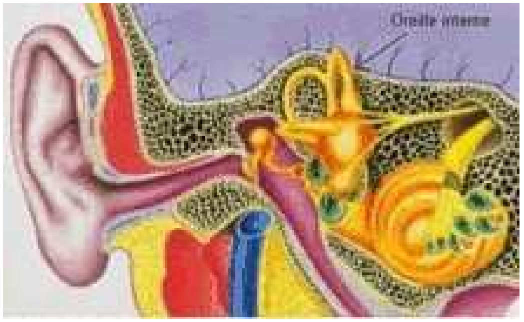
$$y = \frac{I(x)}{I_0} = \exp(-\mu x)$$

**Význam hodnoty $d_{1/2}$ (polovrstva):**
Pro $x = d_{1/2}$ klesne hodnota intenzity záření na polovinu původní hodnoty.

# Co jsou to funkce ?

**Reálná funkce jedné reálné proměnné**

podnět – zvuková vlna



odezva – do mozku (vjem)

nezávisle proměnná
( $x$ … intenzita zvuku)

**funkční předpis**
$\boldsymbol{f}$

závisle proměnná
( $y$ … hlasitost, $y = f(x)$)

$$y = f(x), \quad x = \frac{I}{I_0}, \quad y = L, \quad L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

# Obory funkce

**Definiční obor funkce** $D_f$

soubor přípustných hodnot nezávisle proměnné $x$

Příklad: $x = I$ (intenzita slyšitelného zvuku), $D_f = [10^{-12}, 10]$ [W m$^{-2}$]

**Obor hodnot funkce** $H_f$

soubor hodnot, kterých nabývá závisle proměnná $y$, když $x$ **!!**
proběhne celý definiční obor. Každému $x$ se přiřadí **právě jedno** $y$.

Příklad: $y = L$ (hlasitost), $H_f = [0, 130]$ [dB]

**Graf funkce** $G_f$

soubor dvojic $[x,y]$, kde $y = f(x)$, většinou znázorněný v rovině $x$-$y$

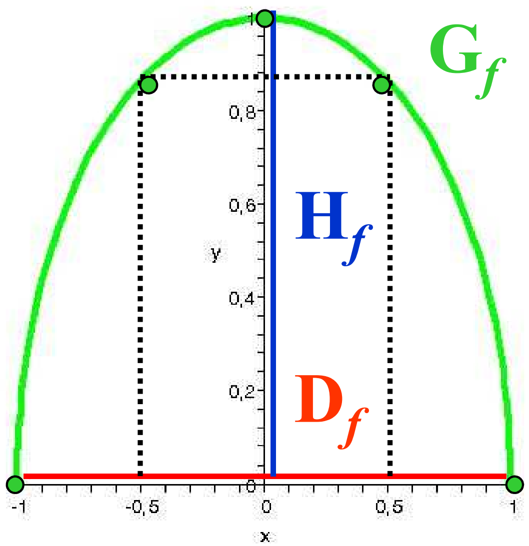
**Úkol:** Zamyslete se nad tím, jaký asi je $D_f$ a $H_f$ pro funkci popisující závislost intenzity záření na tloušťce materiálu, jímž záření prošlo. Vezměte v úvahu, že některé veličiny mohou nabývat (z matematického hlediska) i libovolně velkých (malých) hodnot, i když se tyto hodnoty nedají prakticky realizovat.

# Způsoby zadání funkce

**Funkce je pravidlo, které každé hodnotě $x$ z $D_f$ přiřadí právě jedno $y = f(x)$. Je zadána vždy spolu s definičním oborem.**

Definiční obor buď zadáme přímo, nebo jej určíme z funkčního předpisu tak, aby všechny operace v předpisu měly smysl.

Obor hodnot je pak již jednoznačně určen zadáním funkce.

<table>
<tr><th>zadání předpisem</th><th>zadání tabulkou</th><th>zadání grafem</th></tr>
<tr>
<td>$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$<br>$D_f = [-1, 1]$<br>$H_f = [0, 1]$<br>Pro $x$ mimo $D_f$ nemá odmocnina smysl.</td>
<td>jen některé hodnoty<br>
<table>
<tr><th>$x$</th><th>$y=f(x)$</th></tr>
<tr><td>– 1,00</td><td>0,00</td></tr>
<tr><td>– 0,50</td><td>0,87</td></tr>
<tr><td>0,00</td><td>1,00</td></tr>
<tr><td>0,50</td><td>0,87</td></tr>
<tr><td>1,00</td><td>0,00</td></tr>
</table>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

# Vsuvka – funkce několika proměnných – I

**Reálná skalární funkce více reálných proměnných**

nezávisle proměnné $x,y,z$ …
(třeba souřadnice)

$(x,y,z)$

**funkční předpis**
$\boldsymbol{f}$

závisle proměnná $w$
(třeba hustota, $w = f(x,y,z)$)

$w = f(x,y,z)$

**Reálná vektorová funkce několika reálných proměnných**

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Například indukce magnetického pole Země v závislosti na poloze

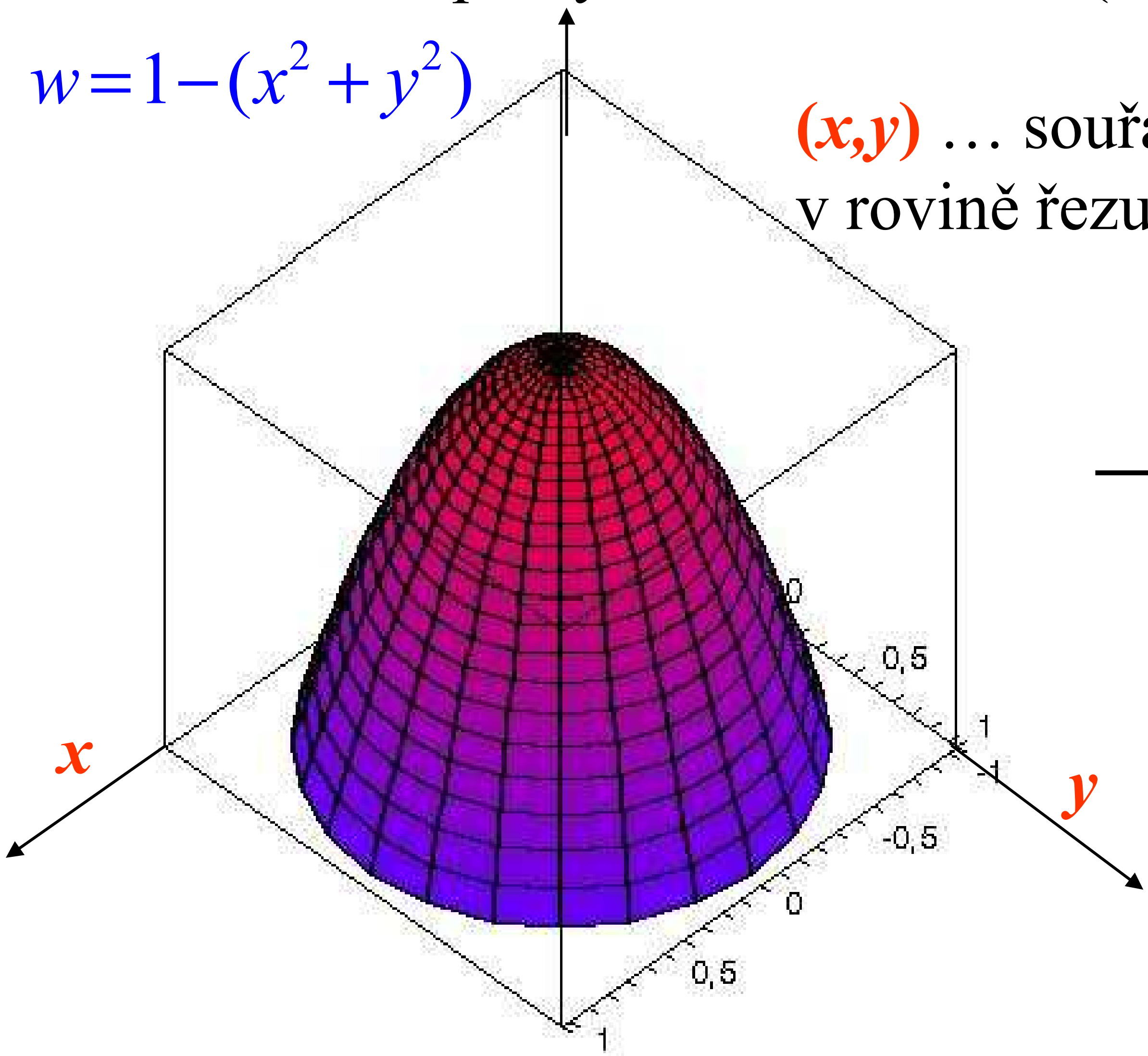
$$\vec{r} \to \vec{B}, \quad \vec{B}(\vec{r}) = (B_1(x,y,z), B_2(x,y,z), B_3(x,y,z))$$

# Vsuvka – funkce několika proměnných – II

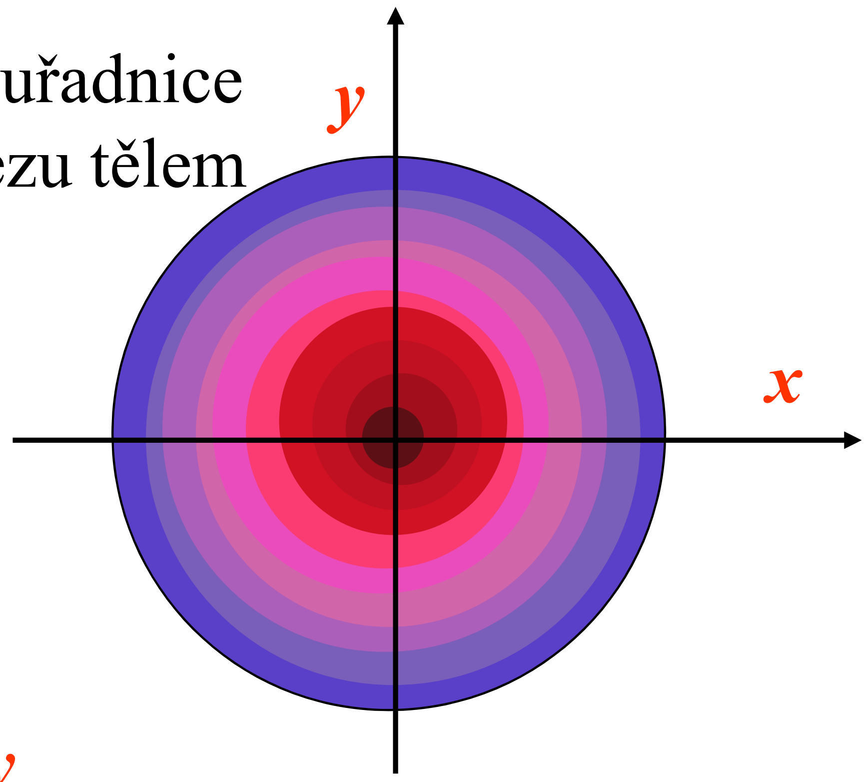
**Příklad funkce dvou proměnných**

hustota tkáně v pomyslném řezu tělem (zviditelněná zobrazením CT)

$w = 1 - (x^2 + y^2)$




$(x,y)$ … souřadnice v rovině řezu tělem




barva odpovídá jistému rozmezí funkčních hodnot $w$, tj. hodnot hustoty tkáně

# Vsuvka – funkce několika proměnných – III

**skutečný rentgenový počítačový tomogram**

**tomogram břišní dutiny**

**místo barvy jsou hodnoty hustoty odstupňovány odstíny šedi**

# Divné funkce - příklady

**(1)**

$$D_f = [0,1] \ldots f: x \to y = f(x) = \begin{cases} 1 \ \ldots \text{ pro } x \text{ racionální} \\ 0 \ \ldots \text{ pro } x \text{ iracionální} \end{cases}$$

$H_f = \{0, 1\}$

**(2)**

$D_f = [1,2,3,\ldots] \ldots f: x_i \to y_i = f(x_i)$ … posloupnost

$H_f = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$

**(3)**

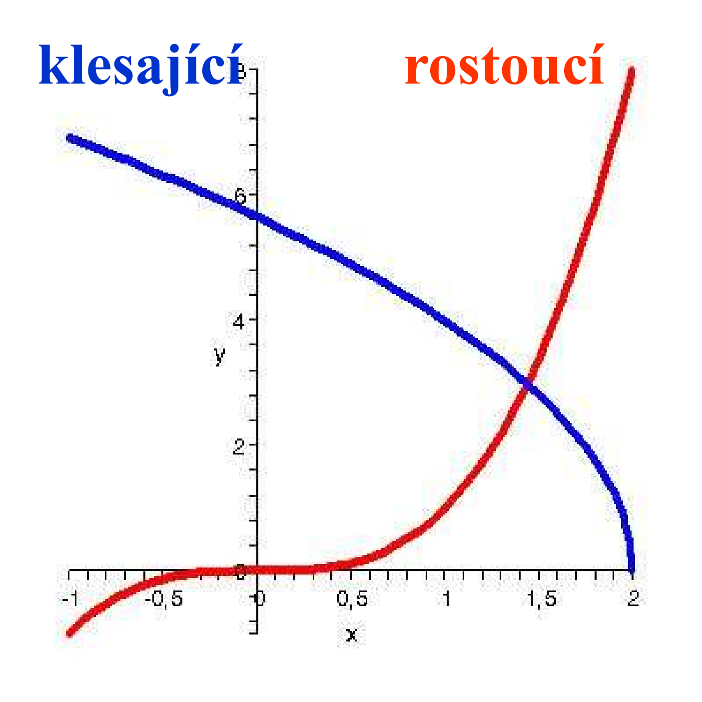
$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{1, 2\} \ldots f: x_i \to y_i = f(x_i) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$H_f = \mathbf{R} \setminus \{5, 7\}$

Některé funkce nemají hladké nebo spojité grafy, nebo je ani graficky znázornit nelze. Ale těmi se zatím zabývat nebudeme.

# Základní vlastnosti funkcí – I

## Monotonie na intervalu – A




$[\,a, b\,] = [-1, 2]$

**funkce na intervalu [*a*,*b*]**

**rostoucí**

pro všechny hodnoty $x_1 < x_2$ z $[a,b]$

platí $f(x_1) < f(x_2)$

**klesající**

pro všechny hodnoty $x_1 < x_2$ z $[a,b]$

platí $f(x_1) > f(x_2)$

**neklesající**

pro všechny hodnoty $x_1 < x_2$ z $[a,b]$

platí $f(x_1) \leq f(x_2)$

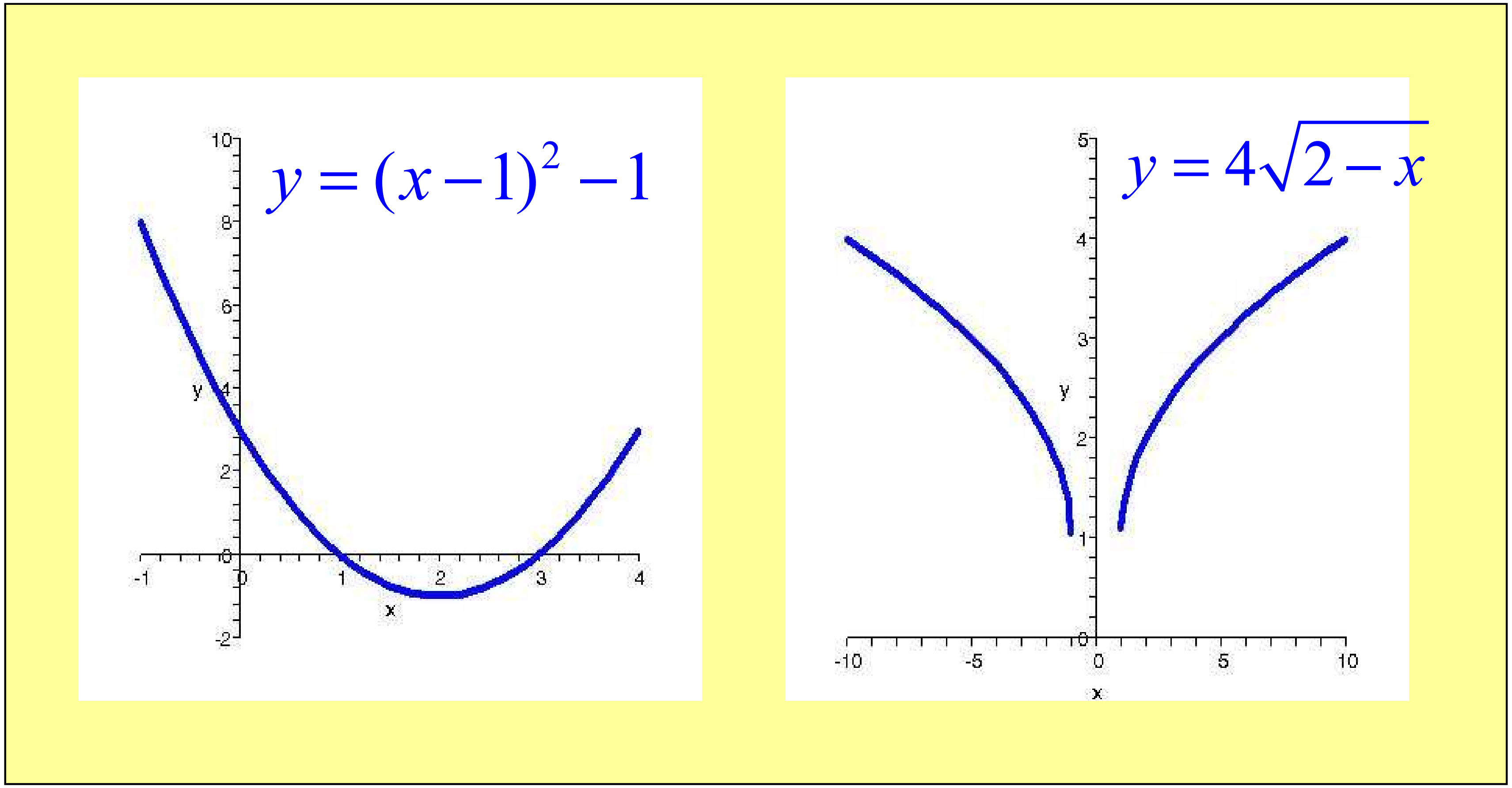
**nerostoucí**

pro všechny hodnoty $x_1 < x_2$ z $[a,b]$

platí $f(x_1) \geq f(x_2)$

# Základní vlastnosti funkcí – II

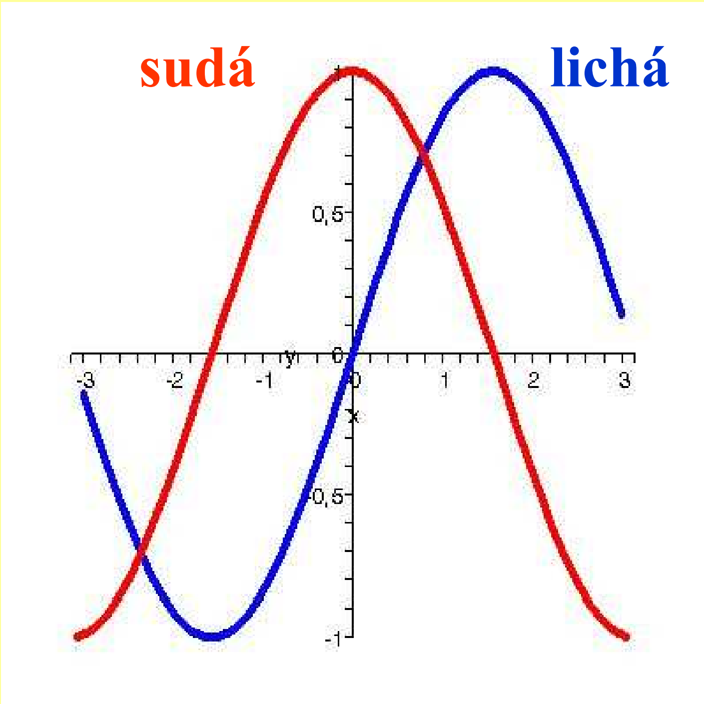
## Monotonie na intervalu – B




**Úkol:** Určete největší možné definiční obory a obory hodnot znázorněných funkcí a intervaly, na kterých jsou tyto funkce rostoucí, resp. klesající.

# Základní vlastnosti funkcí – III

## Symetrie




**[– *a*, *a* ] = [– *π*, *π*]**

**funkce na intervalu [– *a*, *a* ], (resp. oboru, který spolu s každou hodnotou *x* obsahuje také – *x*)**

**sudá**

pro všechny hodnoty $x$ z $[-a,a]$

platí $f(x) = f(-x)$

**lichá**

pro všechny hodnoty $x$ z $[-a,a]$

platí $f(x) = -f(-x)$

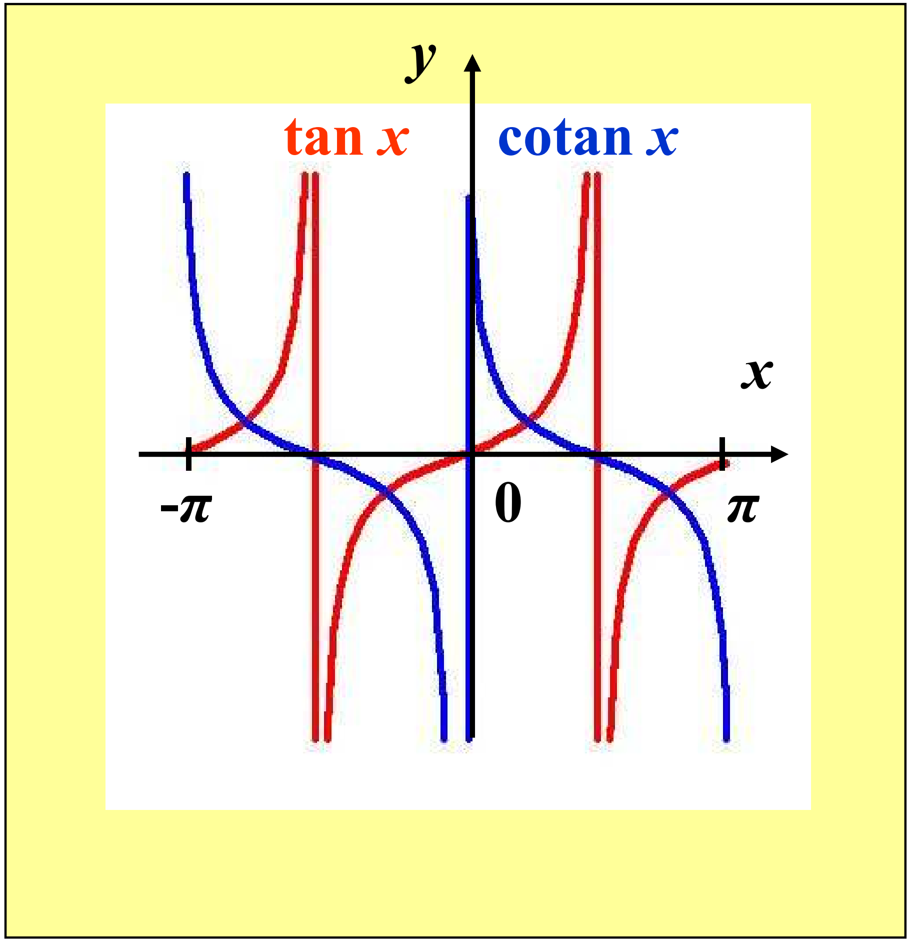
na obrázku … cos $x$ (sudá na $[-\pi, \pi]$)

sin $x$ (lichá na $[-\pi, \pi]$)

**Úkol:** Na kterých intervalech z obrázku (a určete to i obecně) jsou funkce cos $x$ a sin $x$ rostoucí, resp. klesající? Jsou tyto funkce rostoucí či klesající na celém $[-\pi,\pi]$?

# Základní vlastnosti funkcí – IV

## Periodicita




**funkce na oboru D, který spolu s každou hodnotou *x* obsahuje také $x + p$, $p > 0$ … perioda**

**periodická**

pro všechny hodnoty *x* ™ D
platí $f(x) = f(x + p)$

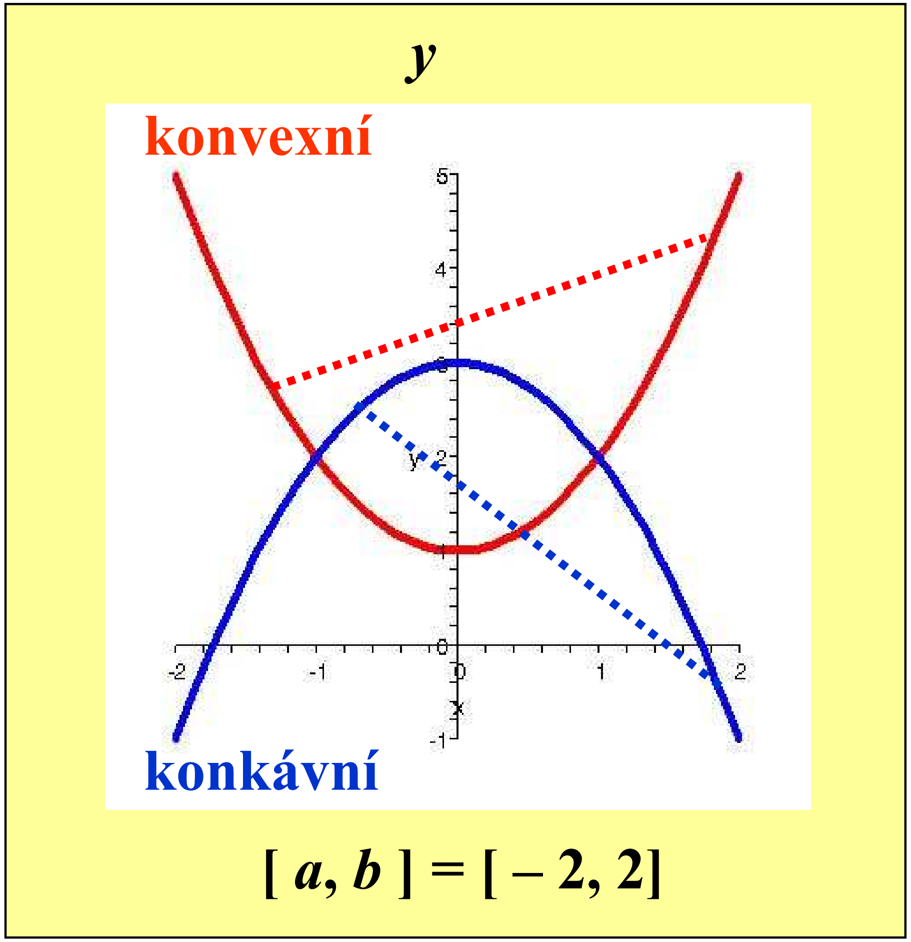
na obrázku … tan *x*, cotan *x*
(periodické na **R** s periodou $p = \pi$)

$D_f = \square \setminus \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\}$ $D_f = \square \setminus \{ n\pi \}$

**Úkol:** Na kterých intervalech jsou tan *x* a cotan *x* rostoucí, resp. klesající? Na kterých intervalech jsou sudé, resp. liché? Jsou sin *x* a cos *x* periodické? S jakou periodou?

# Základní vlastnosti funkcí – V

**Konvexnost - konkávnost** **funkce na intervalu [*a*, *b*]**




**konvexní**

pro všechny hodnoty $x_1$, $x_2$ z $[a, b]$ leží graf funkce mezi body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ pod jejich přímou spojnicí

**konkávní**

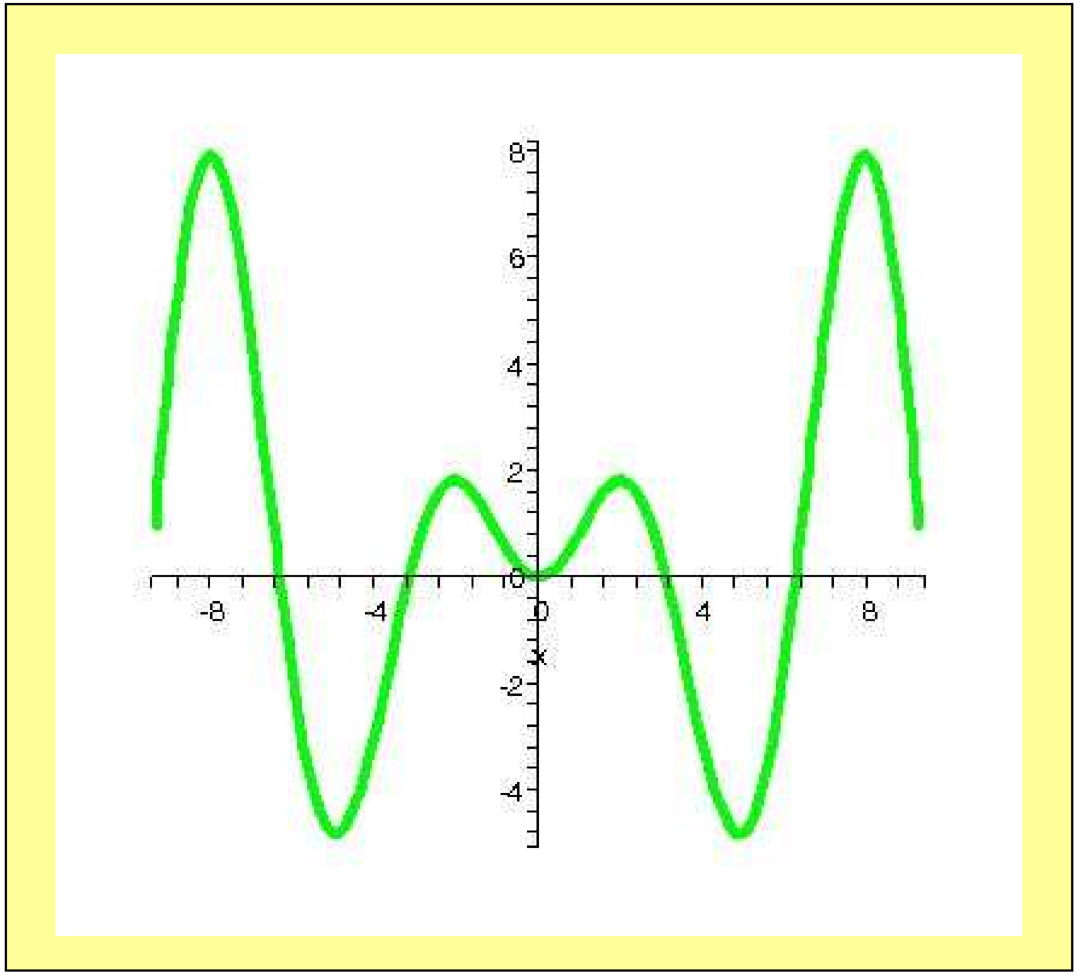
pro všechny hodnoty $x_1$, $x_2$ z $[a, b]$ leží graf funkce mezi body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ nad jejich přímou spojnicí

na obrázku … $y = 1 + x^2$, $y = 3 - x^2$

**Úkol:** U všech předchozích grafů rozhodněte, na kterých intervalech jsou znázorněné funkce konvexní, resp. konkávní.

# Základní vlastnosti funkcí – VI

## „Komplexnější“ úloha




Funkce je zadána na intervalu [ *a*, *b* ] předpisem

$$y = x \cdot \sin x$$

$$[a, b] = [-3\pi, 3\pi]$$

**Úkol:** Určete největší možný definiční obor a obor hodnot znázorněné funkce, a intervaly v [ *a*, *b* ] , na kterých je rostoucí, resp. klesající, sudá, resp. lichá, konvexní, resp. konkávní. Je tato funkce periodická ?

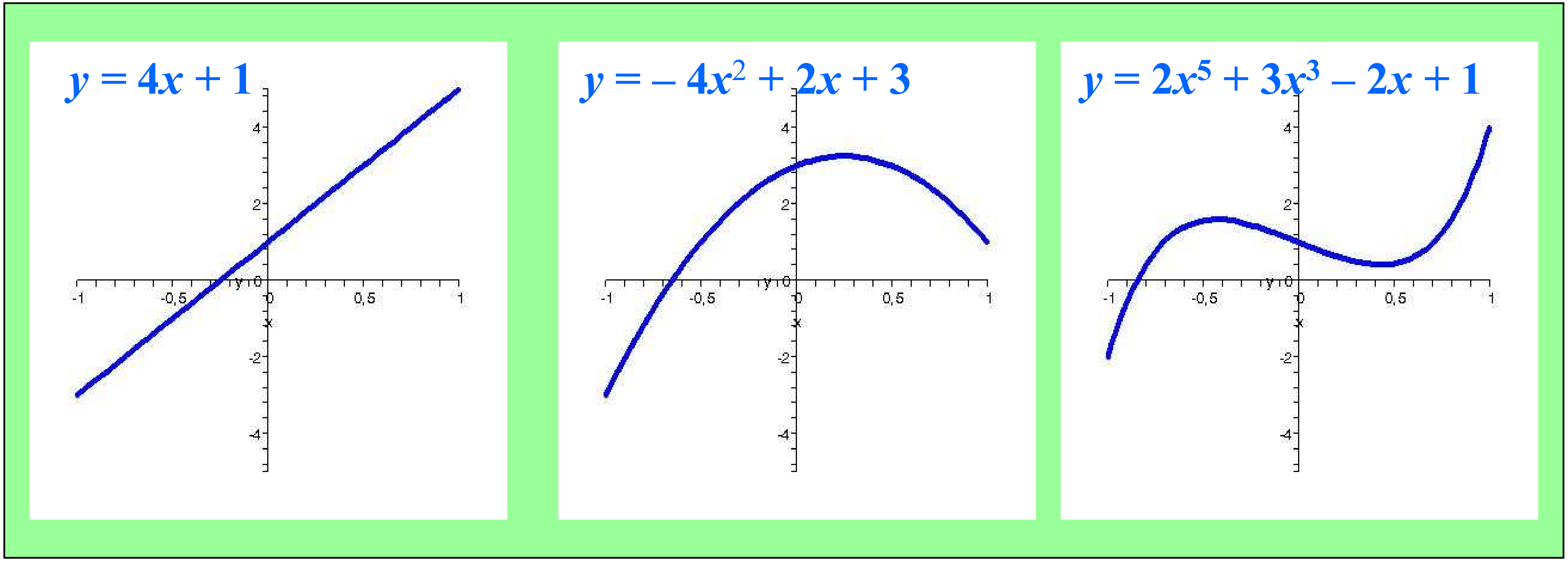
# Elementární funkce - I

**Polynomy (stupně *n* s reálnými koeficienty)**

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

$n = 1$ … lineární funkce $\boldsymbol{y = ax + b}$

$n = 2$ … kvadratická funkce $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$



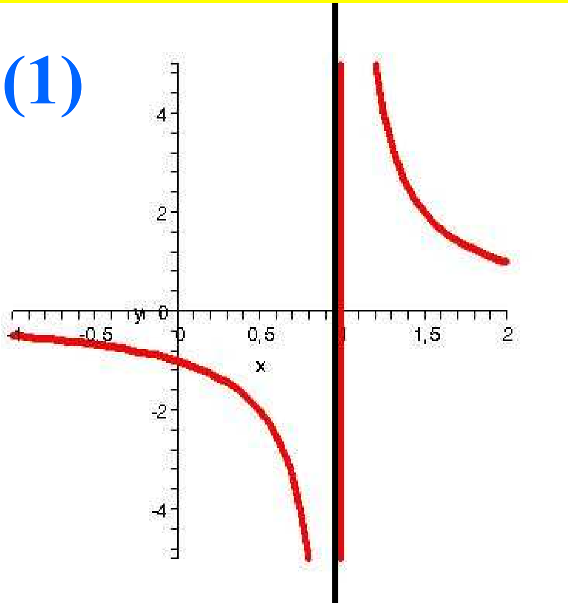
# Elementární funkce - II

## Racionální lomené funkce

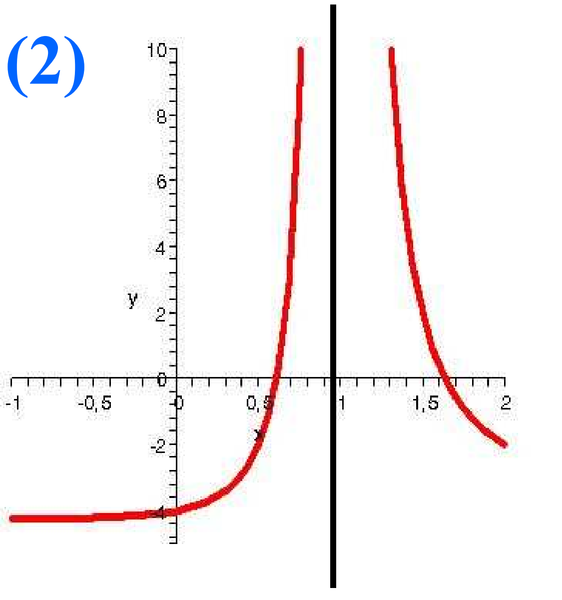
$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

$n = 0$, m = 1 … nepřímá úměra $\boldsymbol{y = a\,(x - c)^{-1}}$

**(1)**




**(2)**




$$(1)\ y = \frac{1}{x-1}$$

$$(2)\ y = \frac{-3x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

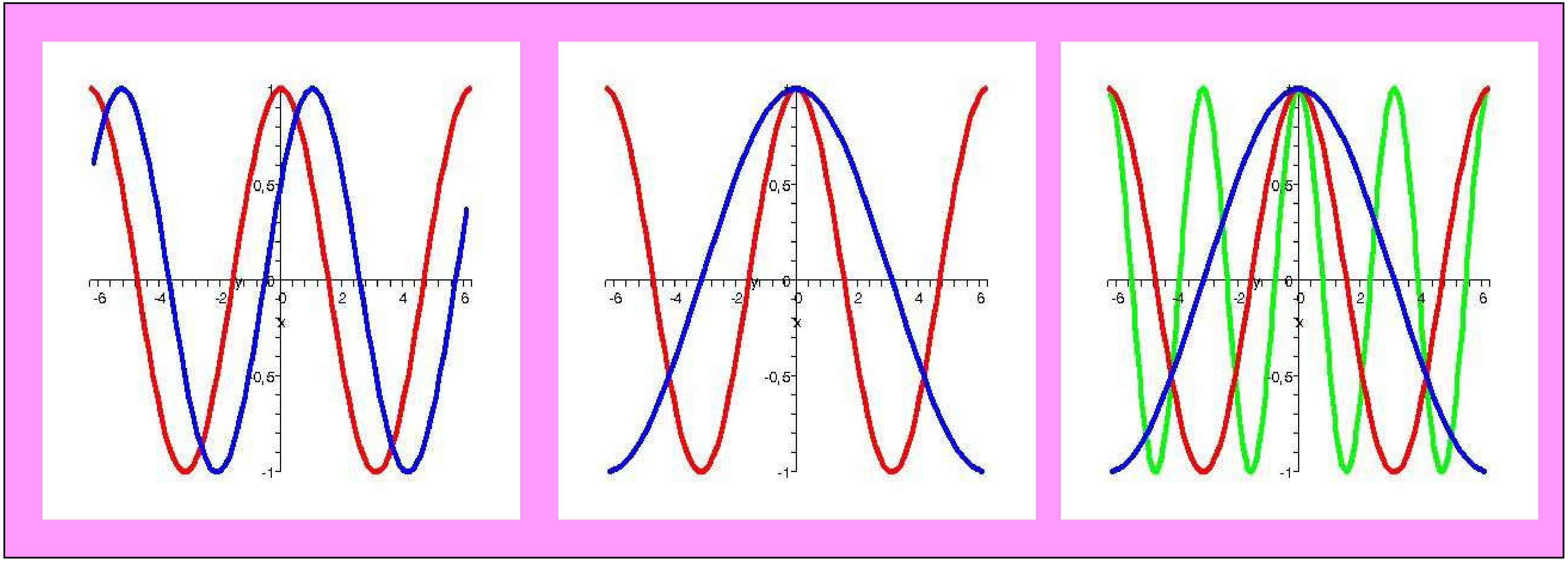
# Elementární funkce – III

**Goniometrické funkce … sin *x*, cos *x*, tan *x*, cotan *x***

**Připomeňte si dosud uvedené vlastnosti těchto funkcí.**

Goniometrické funkce obecného lineárního argumentu ***A* = *ax*+*b***

$\cos x, \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad$ $\cos x, \cos\frac{x}{2}$ $\qquad$ $\cos x, \cos\frac{x}{2}, \cos 2x$



# Elementární funkce - IV

**Exponenciální a logaritmické funkce**

Umocnění pevného základu na hodnotu *x* a inverzní operace

$$y = z^x, \quad x = \log_z y, \quad z > 0,\ z \neq 1$$

$0{,}5^x, 2^x, 3^x \qquad \log_{0,5} x, \log_2 x, \log_3 x \qquad 10^x, \log x$