

# Matematika

**základy diferenciálního počtu  
derivace a tečny, integrály a plochy  
diferenciální rovnice**

podzim 2010, druhá část

# Derivace a tečny

aneb

**matematika**

**„libovolně malých“ změn**

# Nejen velké, ale i malé změny „jsou život“ aneb opravdu potřebujeme diferenciální počet?

Zkuste si představit situaci: Sedíte v místnosti, kde tikají hodiny. Za chvíli je nevnímáte. Ale hned si uvědomíte, kdyby se zastavily.

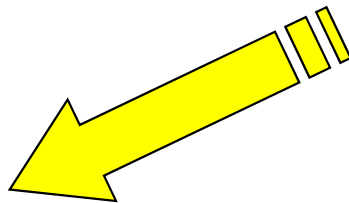
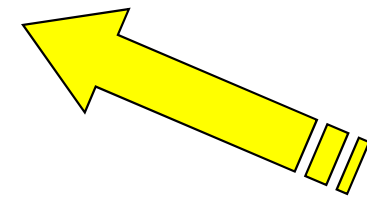
Nebo: Máte dlaň položenou na stole v klidu. Za chvíli nic nehmatáte. Abyste hmat „oživili“, musíte prsty po stole posunout.

**Organismus reaguje na časovou změnu.**

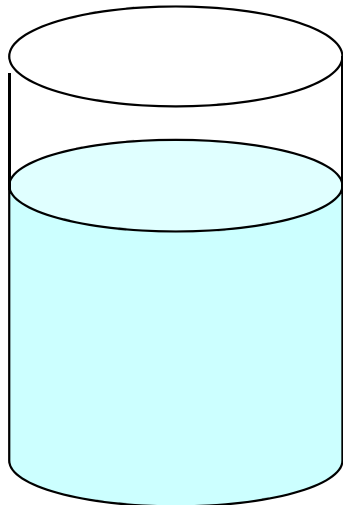
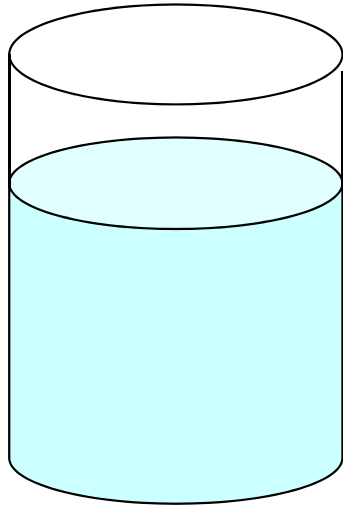
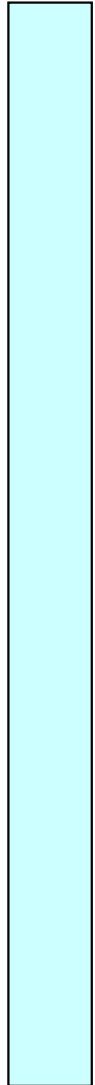
Abychom jeho chování (a další jevy související se změnami) pochopili, potřebujeme aparát k počítání s malými změnami.

# Batesonův pokus se žábou

rychlé zahřívání nádoby s vodou a žábou:  
žába změnu pozná a vyskočí



pomalé zahřívání nádoby s vodou a žábou:  
žába změnu nepozná a uvaří se



# Batesonův zákon

**Bateson – Ehrenberg**

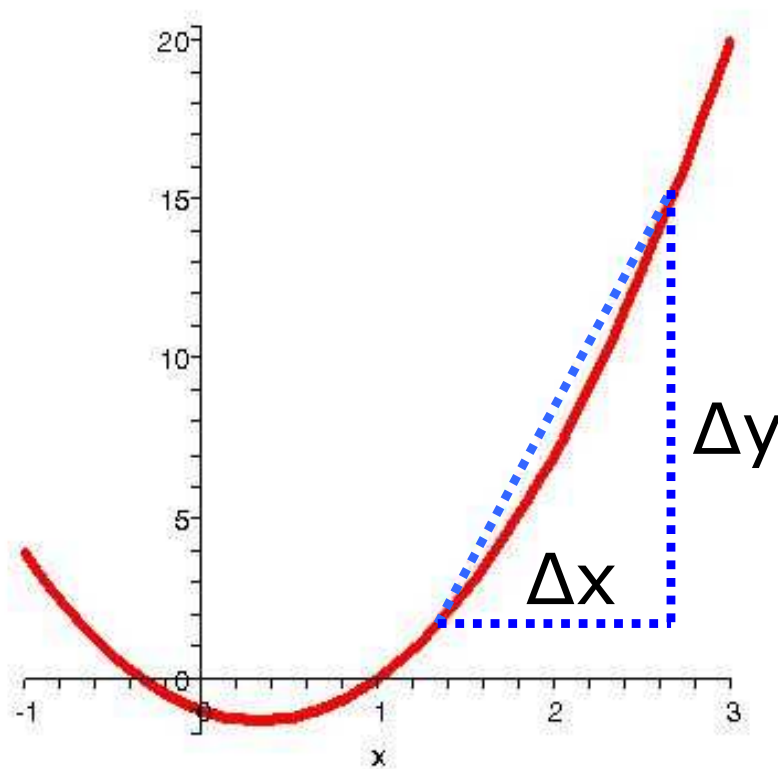
**Organismus reaguje na časovou změnu (derivaci) vnímaných počitků.**

**„Matematizace“:**

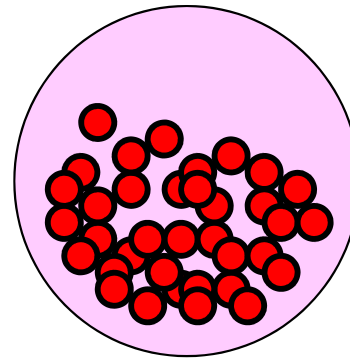
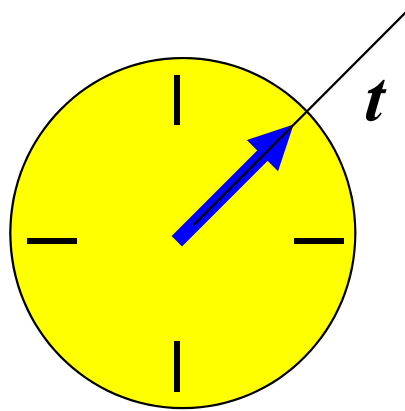
*P* ... signál, podnět  
(vnímaný počitek)

*R* ... odezva, reakce

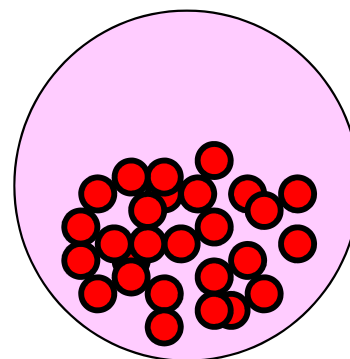
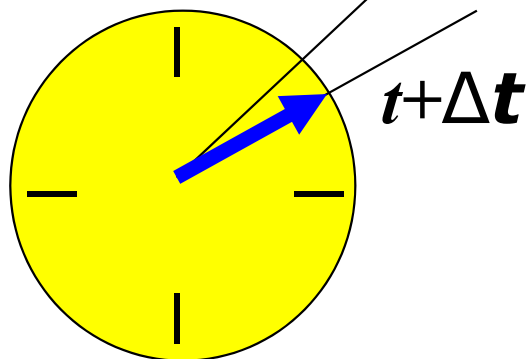
$$\langle R \rangle = \frac{\Delta P}{\Delta t} \dots R = \frac{dP}{dt}$$



# Rozpad jader



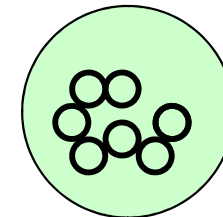
$N \sim 4,8 \cdot 10^{22}$  na  $1 \text{ cm}^3$



$N + \Delta N$

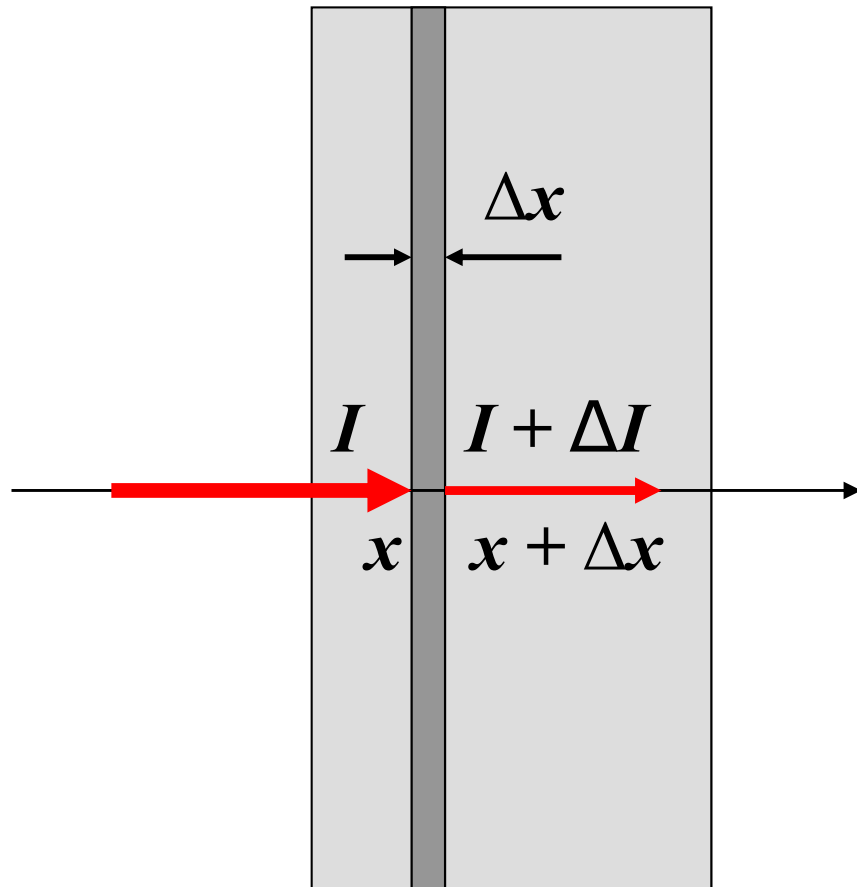
$\Delta N \sim -2,4 \cdot 10^5$  na  $1 \text{ cm}^3$

$\Delta t = 1 \text{ s}$



$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N, \quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}}, \quad \tau_{1/2} = 4,47 \cdot 10^9 \text{ let}$$

# Absorpce záření



$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = -\mu I, \quad \frac{dI(x)}{dx} = -\mu I(x)$$

$$\mu = \frac{\ln 2}{d_{1/2}}, \quad d_{1/2} = \text{polotloušťka}$$

$$I(d_{1/2}) = \frac{1}{2} I(0)$$

# Přírodní zákony - příklady

**Klasická mechanika – Newtonův druhý pohybový zákon**

$$m \vec{a} = F(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

**Klasická elektrodynamika – zákon elektromagnetické indukce**

$$U_{\text{indukované}} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi \dots \text{ indukční tok}$$

**Kvantová mechanika – časový vývoj systému**

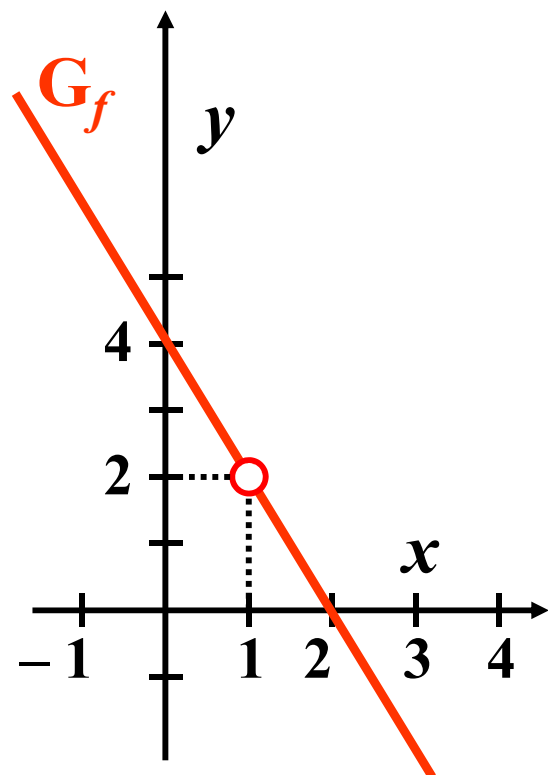
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad H \dots \text{ operátor energie, } \psi \dots \text{ stav}$$

**Příroda nás informuje o změnách. Zákony přírody nejčastěji představují chování časových a prostorových změn veličin.**

**Je tedy dobré umět se změnami počítat?**



# Jak se dělí nula nulou



$$f(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{x - 1}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = -2x + 4 \quad \text{pro } x \in D_f$$

„Pokus“ o dělení nulou

$x$	1,200	1,100	1,050	1,020	1,110	1,005	1,002	1,001
$f(x)$	1,600	1,800	1,900	1,960	1,980	1,990	1,996	1,998

$x$	0,800	0,900	0,950	0,980	0,990	0,995	0,998	0,999
$f(x)$	2,400	2,200	2,100	2,040	2,020	2,010	2,004	2,002

Co si myslíte o možnosti dělení nulou? Jde to provést, nebo se tomu lze za určitých podmínek „přiblížit“?

# Limitní chod

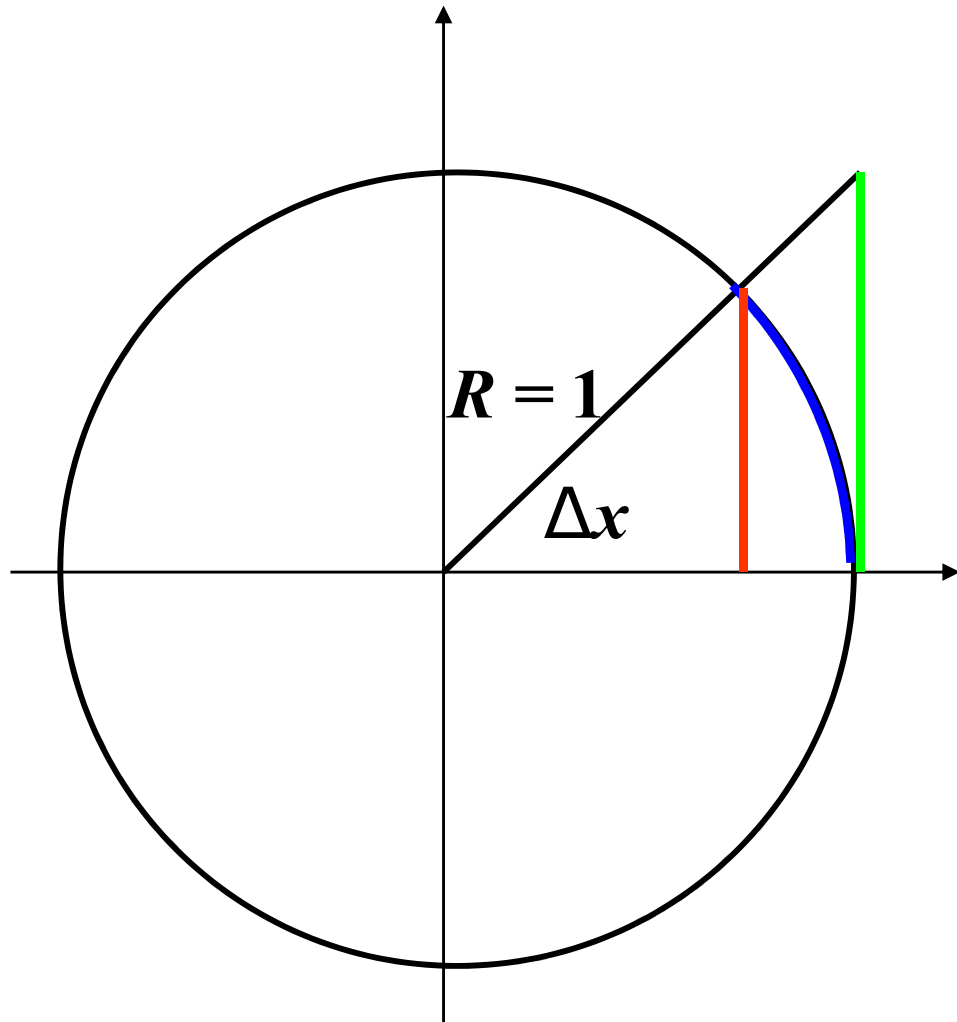
Nulou dělit nelze. Je-li například funkce  $h(x)$ , jmenovatelem podílu  $p(x) = g(x) / h(x)$ , a  $h(x)$  pro určitou hodnotu  $a$  proměnné  $x$  nabývá nuly, nelze hodnotu  $a$  do zlomku dosadit (nedal by se vyčíslit).

Viděli jsme ale, že když se ve zlomku  $p(x)$  blíží k nule jak čítec, tak jmenovatel, může se stát, že se hodnota zlomku blíží k jistému definovanému číslu  $L$ .

Číslo  $L$  se pak nazývá limitou funkce  $p(x)$  a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = L, \quad \text{obecně} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

# Jedna důležitá limita



$$\sin \Delta x \leq \Delta x \leq \tan \Delta x \Rightarrow$$

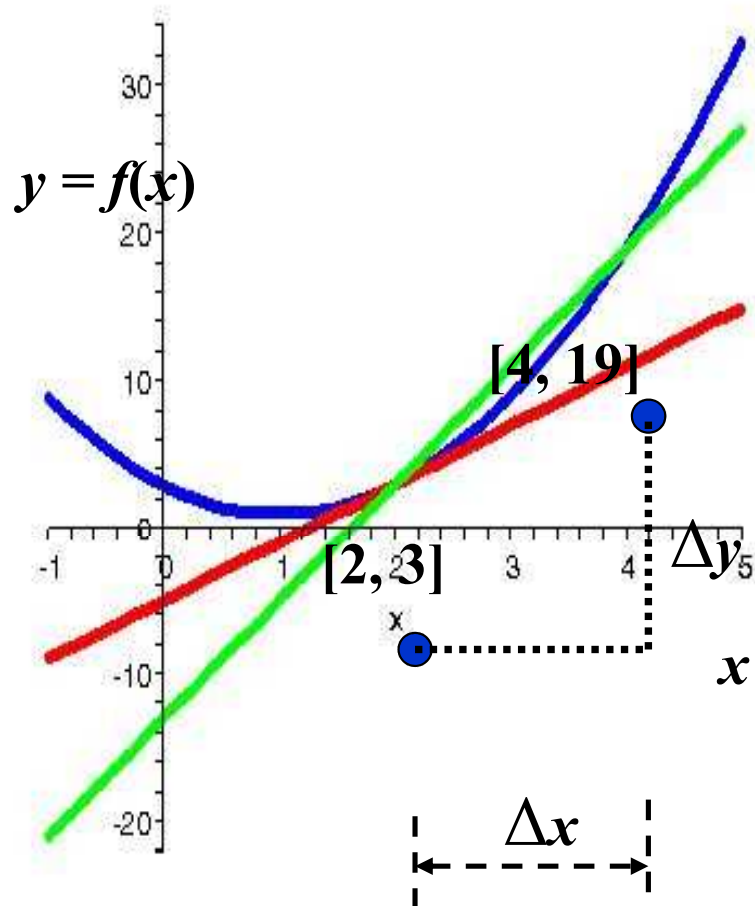
$$\frac{1}{\sin \Delta x} \geq \frac{1}{\Delta x} \geq \frac{\cos \Delta x}{\sin \Delta x}$$

$$1 \geq \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \geq \cos \Delta x \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 1$$

$$\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

# Problém tečny a derivace



$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3, \quad a = 2$$

$$s \cdots \text{sečna: } y = 8x - 13$$

$$t \cdots \text{tečna: } y = 4x - 5$$

$$\square (s, x) = \beta, \quad \square (t, x) = \alpha, \quad \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta$$

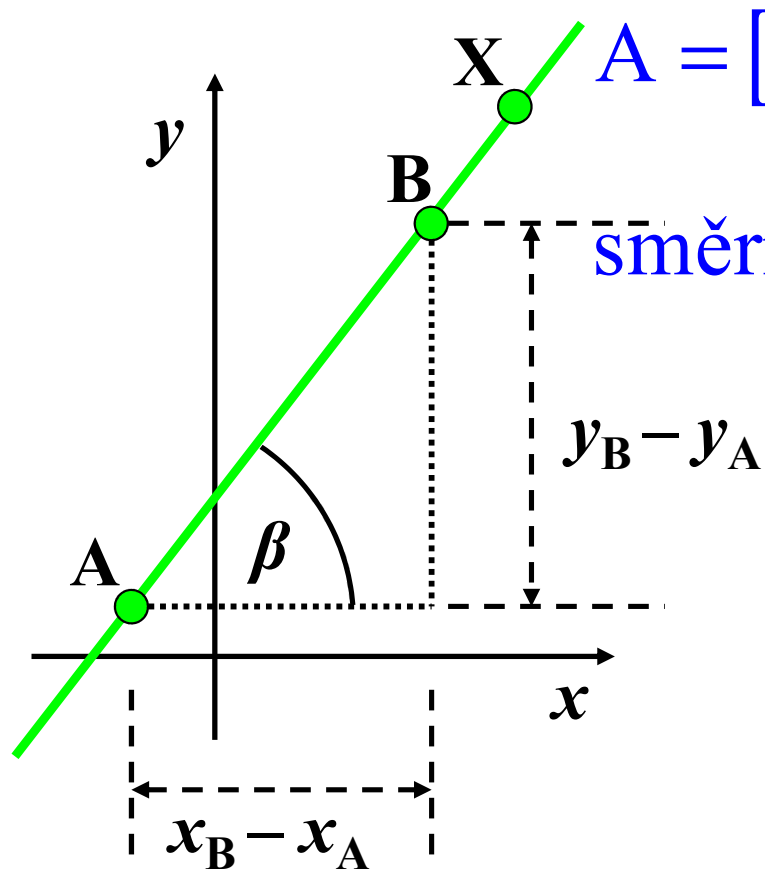
$$\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

**Hodnota  $f'(x)$  určená předchozí limitou, je derivace funkce  $f(x)$  v bodě  $x$ .**

**Chápeme-li  $x$  jako proměnnou, je  $f'(x)$  funkce. Směrnice tečny ke grafu závisí na bodu dotyku.**

# Výpočet směrnice a rovnice přímky



$$A = [x_A, y_A], \quad B = [x_B, y_B], \quad X = [x, y]$$

$$\text{směrnice} \dots \tan \beta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x - x_A},$$

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

pro sečnu z předchozího obrázku:

$$A = [2, 3], \quad B = [4, 19]$$

$$y - 3 = \frac{19 - 3}{4 - 2} (x - 2) \Rightarrow y = 8x - 13$$

# Výpočet směrnice a rovnice tečny

$$A=[x, f(x)], \quad B=[x+\Delta x, f(x+\Delta x)]$$

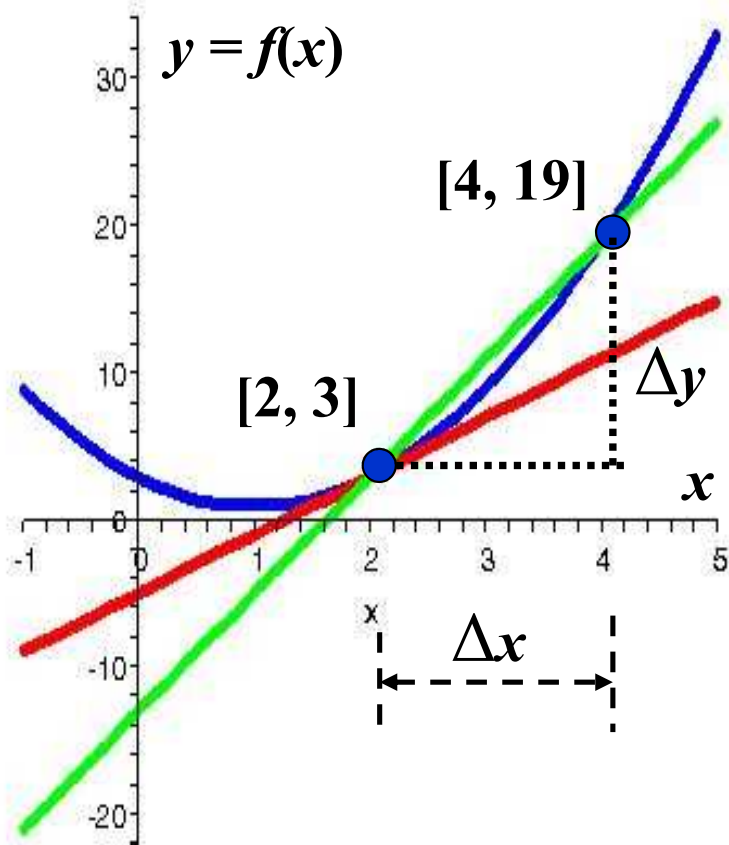
$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{[2(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) + 3] - [2x^2 - 4x + 3]}{\Delta x} =$$

$$= \frac{4x\Delta x - 4\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(4x - 4 + 2\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 4x - 4$$

$$\text{pro } x=2 \text{ je } \tan \alpha = 4$$



**Sami dokončete výpočet rovnice tečny, když nyní znáte směrnici.**

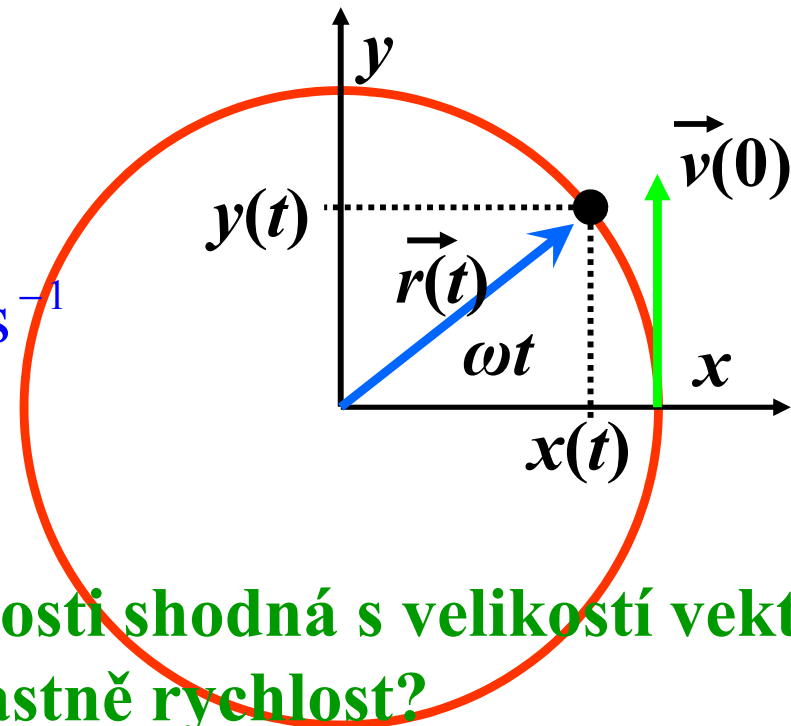
# Derivace a fyzika

**Příklad:** S rovnoměrným pohybem po kružnici se již každý jistě setkal, třeba na řetízkovém kolotoči. Takový pohyb koná například i odstředivka používaná ve zdravotnických zařízeních. Řekněme, že nějaké tělísko obíhá ve vzdálenosti  $R = 1,0$  m od osy kolotoče a že jeden oběh trvá  $T = 4,0$  s. Závislost polohy tělíska na čase pak lze vyjádřit například takto:

$$x(t) = R \cos \omega t, \quad y(t) = R \sin \omega t,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}, \quad v = \omega R = 1,57 \text{ m s}^{-1}$$

$v \dots$  obvodová rychlost



**Je získaná hodnota obvodové rychlosti shodná s velikostí vektoru rychlosti daného bodu? Co je to vlastně rychlost?**

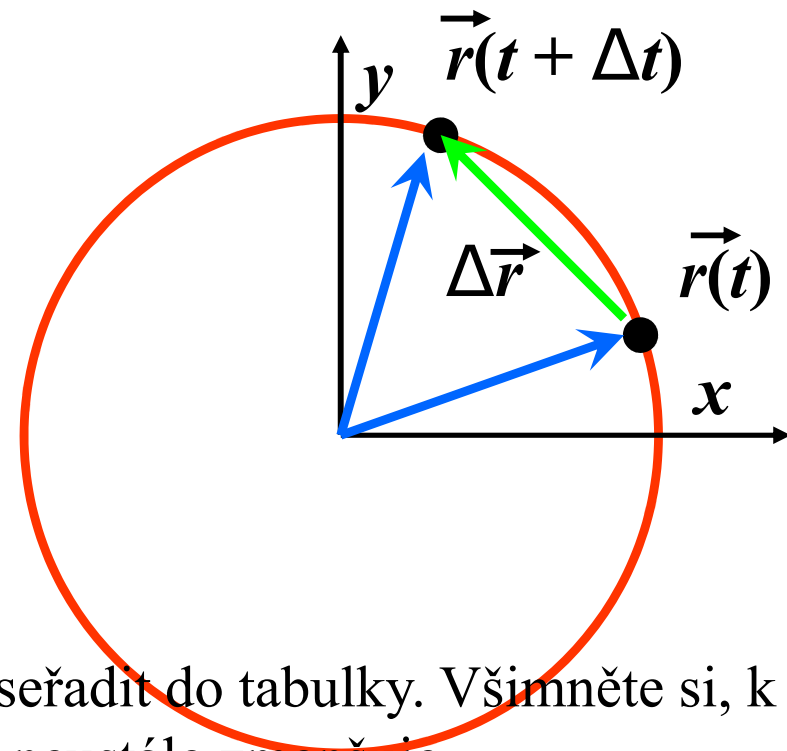
# Průměrná rychlost za dobu $\Delta t$

$$\begin{aligned}\langle \vec{v} \rangle &= \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \\ &= \left( \frac{\cos \frac{\pi}{2} (t + \Delta t) - \cos \frac{\pi}{2} t}{\Delta t}, \frac{\sin \frac{\pi}{2} (t + \Delta t) - \sin \frac{\pi}{2} t}{\Delta t} \right)\end{aligned}$$

$$|\langle \vec{v} \rangle| = \sqrt{\langle v_x \rangle^2 + \langle v_y \rangle^2}, \quad \tan \beta = \frac{\langle v_y \rangle}{\langle v_x \rangle}$$

$t = 0$  s,  $\Delta t$  je postupně

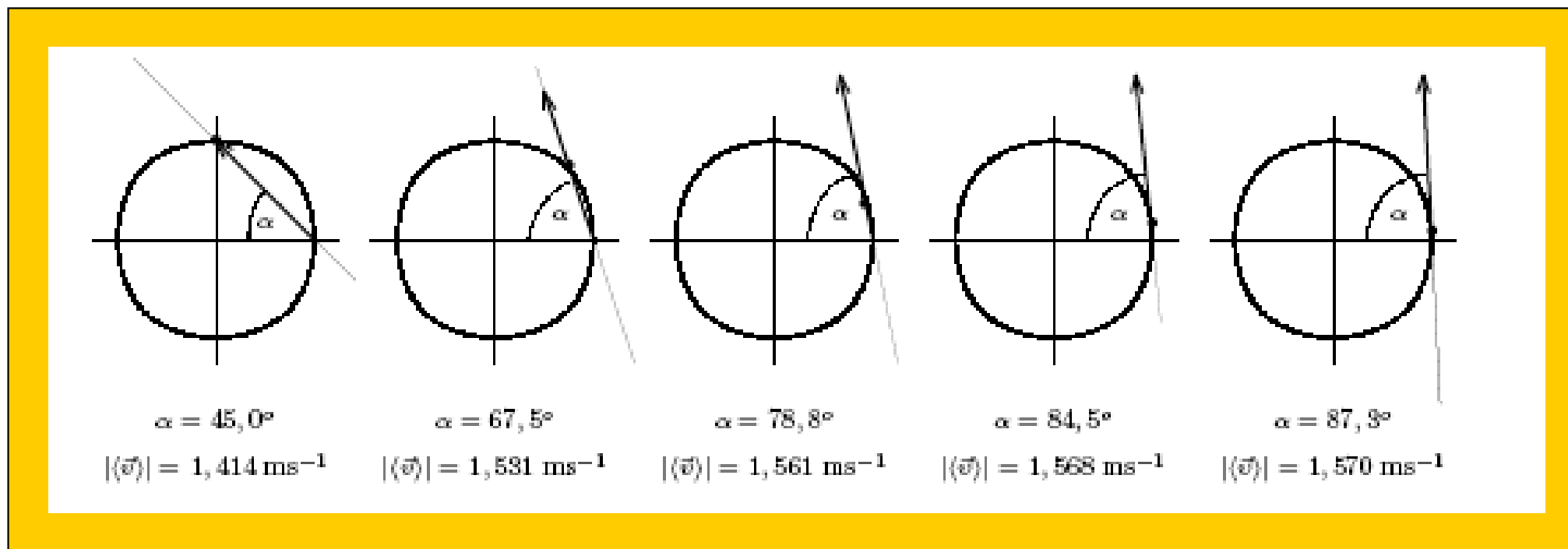
$$1 \text{ s}, \frac{1}{2} \text{ s}, \frac{1}{4} \text{ s}, \frac{1}{8} \text{ s}, \frac{1}{16} \text{ s}$$



**Úkol:** Zkuste si sami velikosti průměrných rychlostí a jejich úhly  $\alpha$  s osou  $x$  vypočítat a seřadit do tabulky. Všimněte si, k jakým hodnotám se blíží, když se interval  $\Delta t$  neustále zmenšuje.



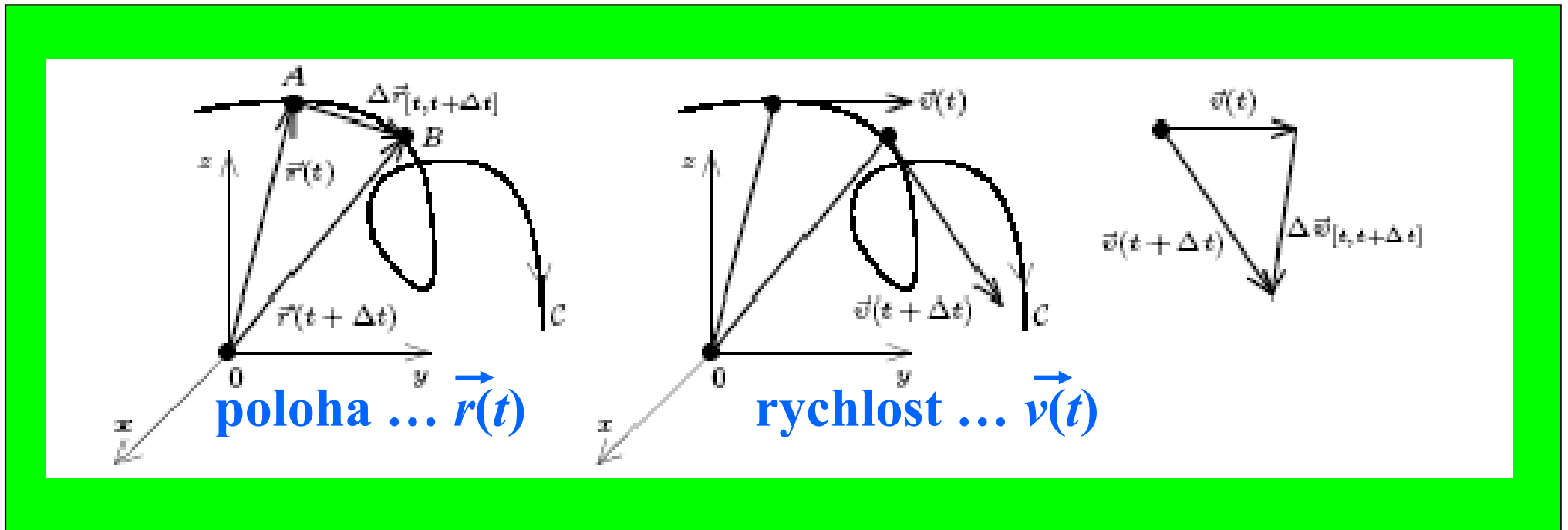
# Průměrná rychlost ve zmenšujícím se intervalu



**A tady jsou výsledky řešení Vašeho úkolu.**

# Okamžitá rychlost jako limita

## Pohyb hmotného bodu po prostorové křivce



$$\text{rychlost} \cdots \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\text{zrychlení} \cdots \vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

# Příklady odvození derivací

**Příklad 1:**  $f(x) = x^3$  Metoda vykrácení nepohodlného výrazu

$$\begin{aligned} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} &= \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \\ &= \frac{\cancel{\Delta x} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2]}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 3x^2 \end{aligned}$$

**Příklad 2:**  $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} &= \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) &\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \cos x \end{aligned}$$

# Derivace elementárních funkcí

$$(1) \quad f(t) = t^n, \quad f'(t) = nt^{n-1}, \quad n \in \mathcal{R} \text{ libovolné}$$

$$(2) \quad f(t) = \sin t, \quad f'(t) = \cos t,$$

$$f(t) = \cos t, \quad f'(t) = -\sin t,$$

$$(3) \quad f(t) = e^t, \quad f'(t) = e^t; \quad f(t) = a^t, \quad f'(t) = a^t \ln a,$$

$$f(t) = \ln t, \quad f'(t) = \frac{1}{t}; \quad f(t) = \log_a t, \quad f'(t) = \frac{1}{t \ln a},$$

# Pravidla pro derivování

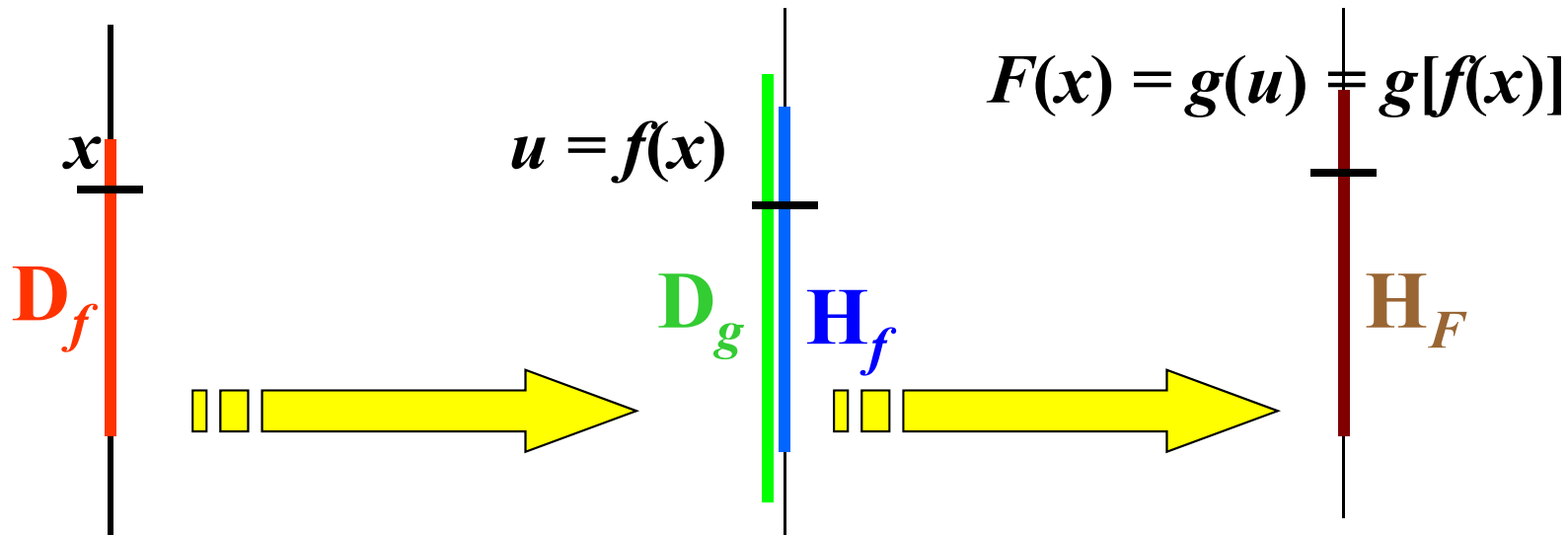
$$(4) \quad [f(t) \pm g(t)]' = f'(t) \pm g'(t) ,$$

$$(5) \quad [f(t)g(t)]' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t) ; \quad [k f(t)]' = k f'(t) , k = \text{konst.} ,$$

$$(6) \quad \left[ \frac{f(t)}{g(t)} \right]' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{[g(t)]^2} ,$$

$$(7) \quad F(t) = g[f(t)] , \quad F'(t) = g'[f(t)] \cdot f'(t) .$$

# Pravidlo pro složenou funkci

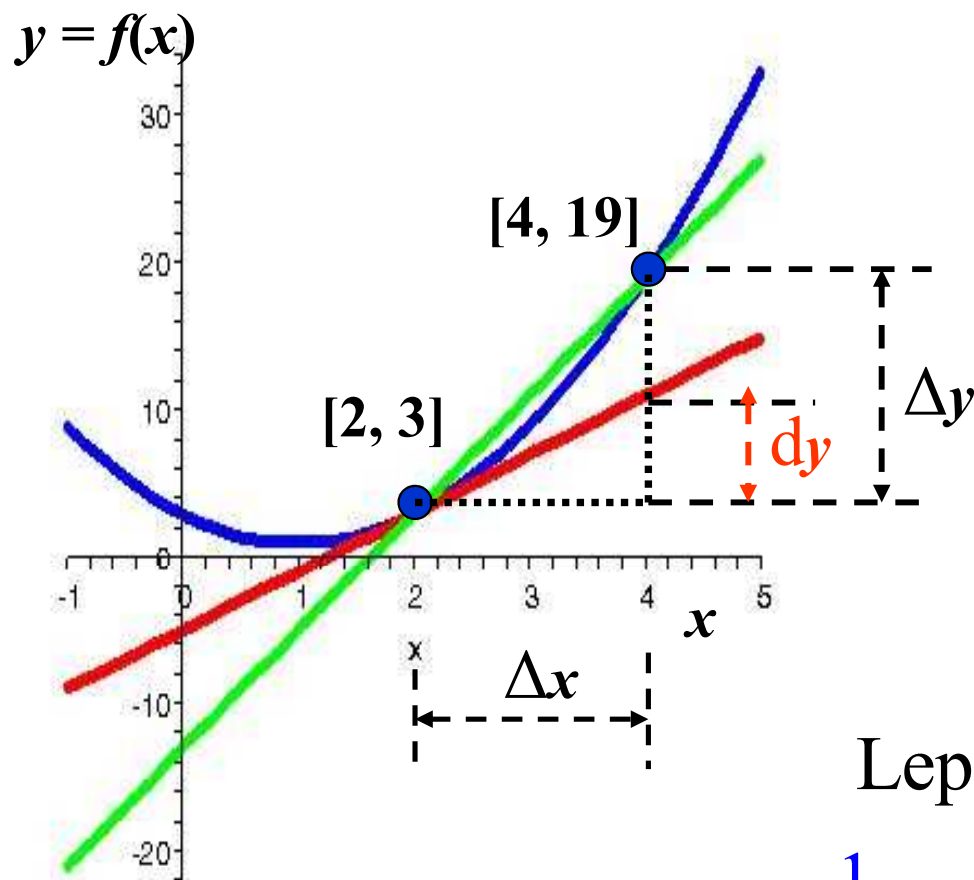


$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{g(u + \Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$g'(u) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

# Odhady změn hodnot funkce

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3, \quad x = 2, \quad \square (t, x) = \alpha, \quad \tan \alpha = f'(a) = 4$$



$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \text{chyba odhadu}$   
 $\Delta x \cdots dx, \quad dy = f'(x) dx$   
úplný diferenciál  
funkce v bodě  $x$

Lepší odhady : Taylorův rozvoj

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)\Delta x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\Delta x^n + \cdots$$

## Dva příklady na odhady

**Příklad 1.** Určete přibližnou hodnotu čísla  $2,03^5$ .

$$f(x) = x^5, \quad x = 2, \quad \Delta x = 0,03, \quad f'(x) = 5x^4 \Big|_{x=2} = 80, \quad f''(x) = 20x^3 \Big|_{x=2} = 160$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)\Delta x^2 + \dots$$

$$\approx 2^5 + 80 \cdot 0,03 + 160 \cdot 0,0009 = 32 + 2,4 + 0,144 \approx 34,5$$

**Příklad 2.** Určete přibližnou hodnotu  $\sin 3^\circ$ .

$$f(x) = \sin x, \quad x = 0, \quad \Delta x = 3^\circ = 0,052 \text{ rad}$$

$$f'(x) = \cos x \Big|_{x=0} = 1, \quad f''(x) = \sin x \Big|_{x=0} = 0, \quad f'''(x) = -\cos x \Big|_{x=0} = -1$$

$$\sin \Delta x \approx \Delta x - \frac{1}{3!} \Delta x^3 + \frac{1}{5!} \Delta x^5 - \dots$$



## Několik úloh na derivace a tečny

**Úloha 1.** Odvod'te pravidlo pro derivaci funkcí  $x^4$ ,  $x^5$ ,  $x^n$ . Pro  $x^n$  použijte binomickou větu.

**Úloha 2.** Vypočt'ete derivace následujících funkcí

$$F(x) = \frac{\sqrt{\cos^2 \sqrt{x^2 - 1} - \sin^2 \sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1}$$

$$F(x) = \ln[\cos^2 \sqrt{x^2 + 1}]$$

**Úloha 3.** Určete rovnici tečny ke grafu funkce  $f(x) = \sin^2 x$  v bodě  $t = \pi/4$ .

# Integrály a plochy

aneb

**jak zjistit funkci z její derivace**

# Obrácená úloha mechaniky aneb od zrychlení k trajektorii

Základní zákon mechaniky – druhý Newtonův zákon – umožňuje vyjádřit zrychlení hmotného bodu na základě sil, jimiž na hmotný bod působí okolní objekty.

Zrychlení je však derivací rychlosti, a ta je derivací polohy.

Abychom zjistili funkci, která popisuje závislosti polohy hmotného bodu na čase, musíme nějakou zpětnou procedurou najít, jak vypadala funkce, než jsme ji zderivovali.

**Opačná procedura k derivování, tj. nalézání původní (primitivní) funkce, se nazývá integrování.**

# Primitivní funkce (neurčitý integrál)

Předpokládejme, že na intervalu  $[a, b]$  je definována funkce  $f(x)$ , která je spojitá (její limita v každém bodě existuje a je rovna funkční hodnotě, graf funkce není „potrhaný“). Funkce  $F(x)$  definovaná na intervalu  $(c, d)$  obsahujícím  $[a, b]$ , a taková, že její derivace na intervalu  $[a, b]$  je rovna  $F'(x) = f(x)$ , je **primitivní funkcí (neurčitým integrálem) k funkci  $f(x)$  na  $[a, b]$ .**

**Příklad:** Funkce  $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$  je definována na  $\mathbf{R}$ . Funkce  $F(x) = x^4 - x^2 + x$  je k ní funkcí primitivní, ale také všechny funkce tvaru  $F(x) + \text{libovolná konstanta } C$ .

**Jak je to možné, že jedna a táž funkce má nekonečně mnoho primitivních funkcí lišících se navzájem o konstantu?**

# Tabulka primitivních funkcí – I

$$(1) \quad f(t) = t^n \qquad F(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$$

$$(2) \quad f(t) = \cos t \qquad F(t) = \sin t$$

$$f(t) = \sin t \qquad F(t) = -\cos t$$

$$(3) \quad f(t) = e^t \qquad F(t) = e^t$$

$$f(t) = \frac{1}{t} \qquad F(t) = \ln |t|$$

$$f(t) = a^t \qquad F(t) = \frac{a^t}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t \ln a} \qquad F(t) = \log_a |t|, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$(4) \quad f(t) = f_1(t) \pm f_2(t) \qquad F(t) = F_1(t) \pm F_2(t),$$

$F_1(t)$  resp.  $F_2(t)$  je primitivní funkcí k  $f_1(t)$  resp.  $f_2(t)$

$$f(t) = k g(t) \qquad F(t) = k G(t), \quad k = \text{konst.},$$

$G(t)$  je primitivní funkcí k  $g(t)$

# Tabulka primitivních funkcí – II

$$(5) \quad f(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \quad F(t) = \operatorname{tg} t$$

$$f(t) = -\frac{1}{\sin^2 t} \quad F(t) = \operatorname{cotg} t$$

$$(6) \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad F(t) = \arcsin t$$

$$f(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad F(t) = \arccos t$$

$$(7) \quad f(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad F(t) = \operatorname{arctg} t$$

$$f(t) = -\frac{1}{1+t^2} \quad F(t) = \operatorname{arccotg} t$$

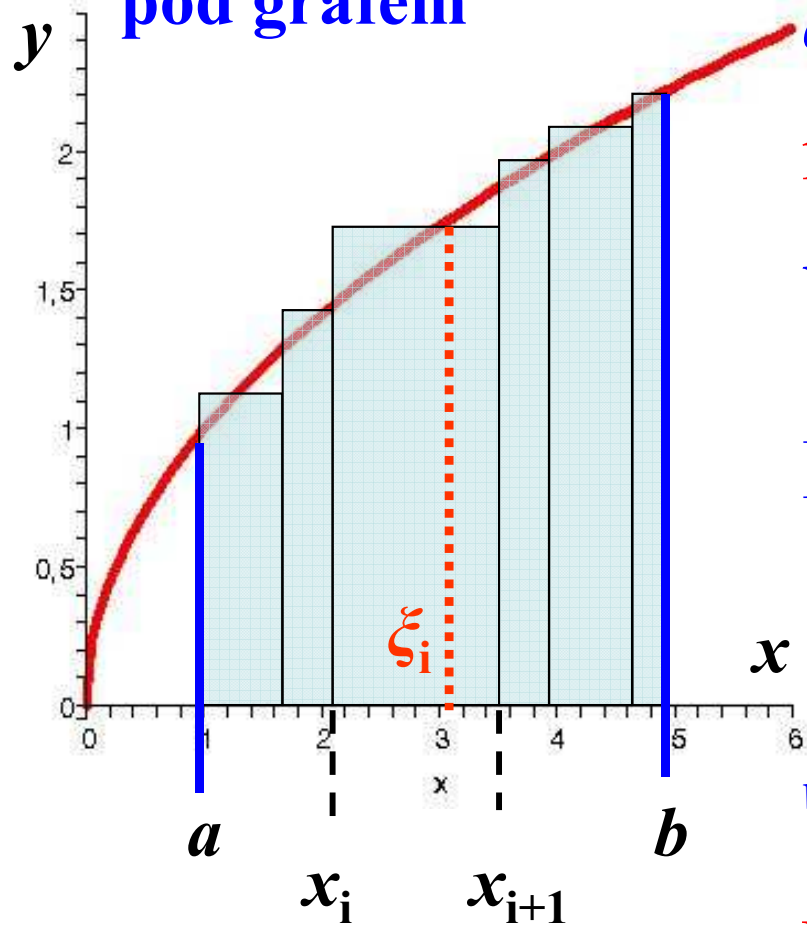
$$(8) \quad f(t) = \frac{1}{t^2-1} \quad F(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1}$$

$$(9) \quad f(t) = \sqrt{1-t^2} \quad F(t) = \frac{1}{2} \left[ \arcsin t + t\sqrt{1-t^2} \right]$$

$$(10) \quad f(t) = \sqrt{1+t^2} \quad F(t) = \frac{1}{2} \left[ \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2} \right]$$

# Problém plochy

určit plochu  $P$   
pod grafem



dělení  $D$  intervalu  $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

norma dělení:

$$\nu(D) = \min \{x_{i+1} - x_i \mid i = 0, 1, \dots, n\}$$

$$P \approx S(D) = \sum_{i=0}^n f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

určitý integrál

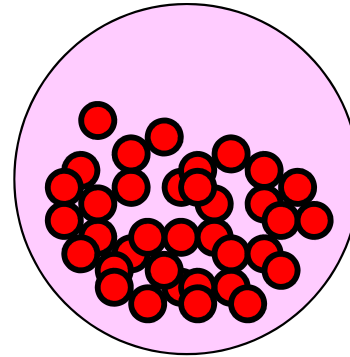
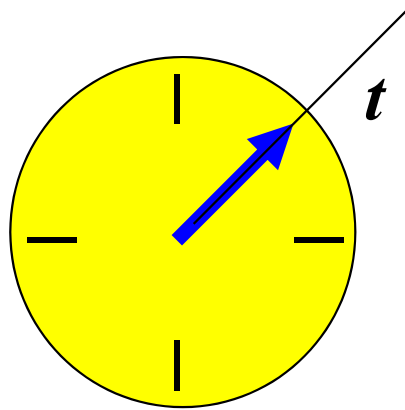
# Diferenciální rovnice

aneb

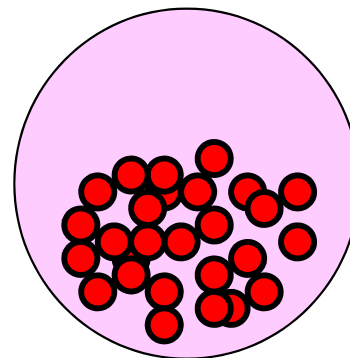
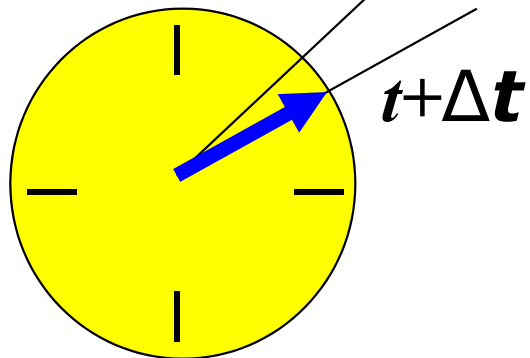
**jak z rovnice pro změnu určit funkci**



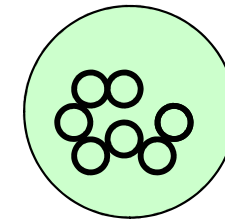
# Rozpad jader – ještě jednou



$N \sim 4,8 \cdot 10^{22}$  na  $1 \text{ cm}^3$



$N + \Delta N$



$\Delta N \sim -2,4 \cdot 10^5$  na  $1 \text{ cm}^3$

$\Delta t = 1 \text{ s}$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N, \quad \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}}, \quad \tau_{1/2} = 4,47 \cdot 10^9 \text{ let}$$

# Rozpad jader - řešení

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \cdots f'(x) = -\lambda f(x)$$

$$f'(x) + \lambda f(x) = 0, \quad ? f(x) = \exp(\alpha x)$$

$$\alpha \cdot \exp(\alpha x) + \lambda \cdot \exp(\alpha x) = 0 \Rightarrow \alpha = -\lambda$$

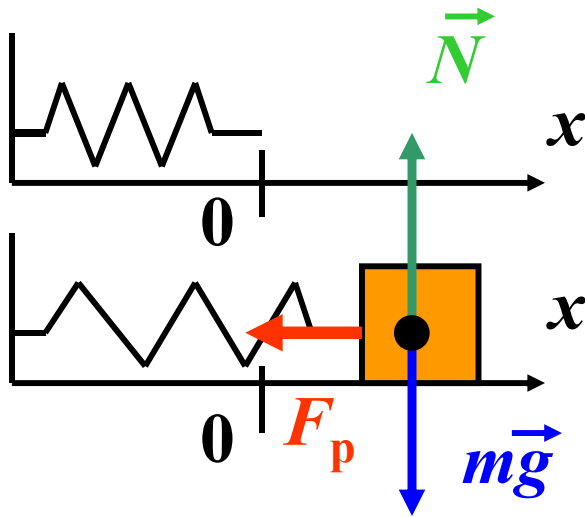
$$f(x) = K \exp(-\lambda x), \quad K \cdots \text{libovolná konst.}$$

$$\text{počáteční podmínka: } f(0) = f_0 \Rightarrow K = f_0$$

$$f(x) = f_0 \exp(-\lambda x) \cdots N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$$

**Úkol:** Použijte uvedený postup pro řešení problému s absorpcí záření.  
Počáteční podmínka zde má charakter zadání intenzity záření na povrchu.

# Ještě jednou mechanika



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_p \quad \dots \quad m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad ? \quad x = \exp(\alpha t)$$

$$\alpha^2 + \omega^2 = 0, \quad \alpha = \pm i\omega$$

$$x(t) = C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t)$$

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\text{počáteční podmínky } x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

**Dokončete řešení na základě znalosti počátečních podmínek.**

**Předchozí rovnice jsou ukázkou obyčejných diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu, lineárních, s konstantními koeficienty a homogenních.**