Radiologická fyzika

Ultrazvuk –

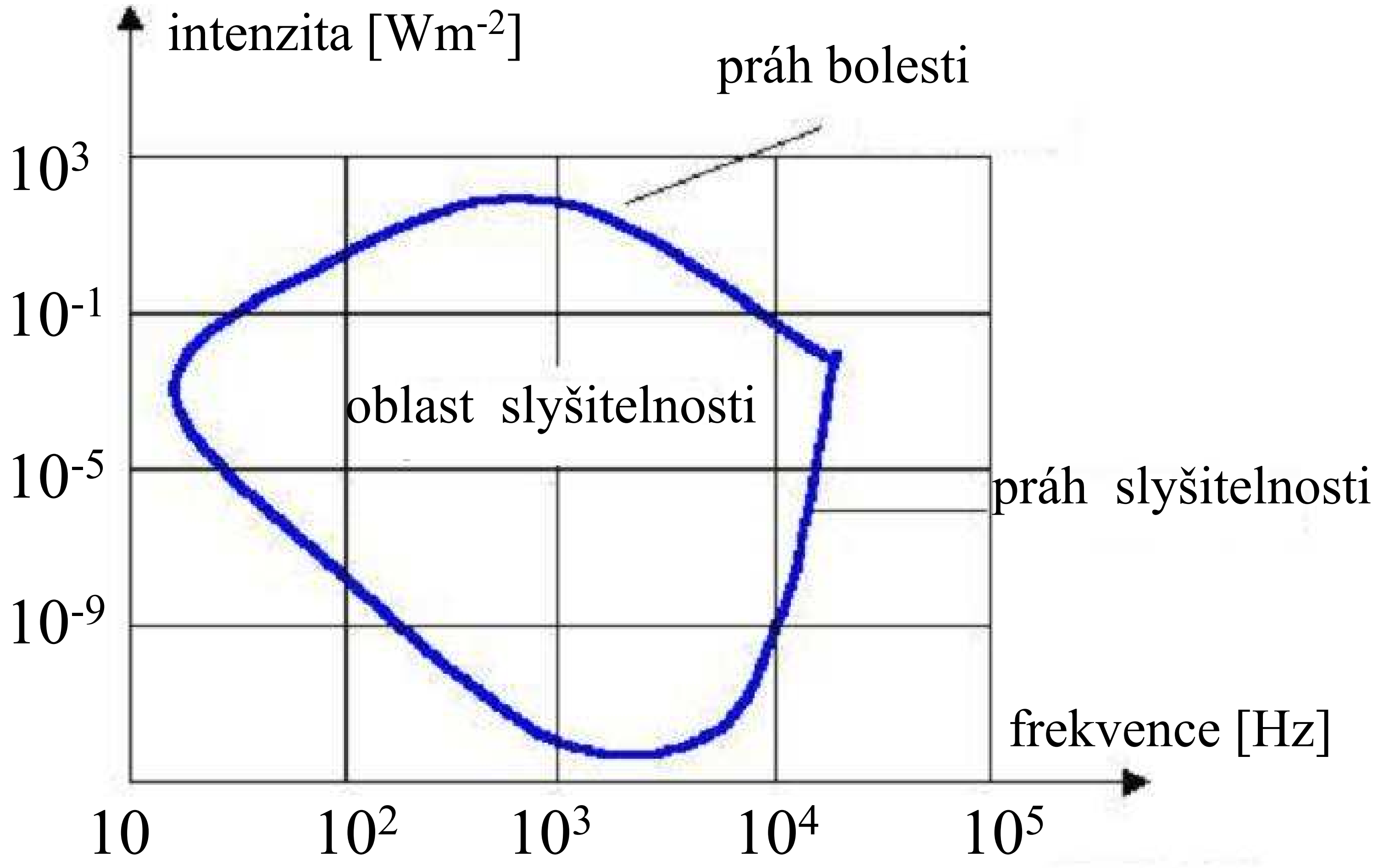
základní charakteristiky

podzim 2010, sedmá přednáška

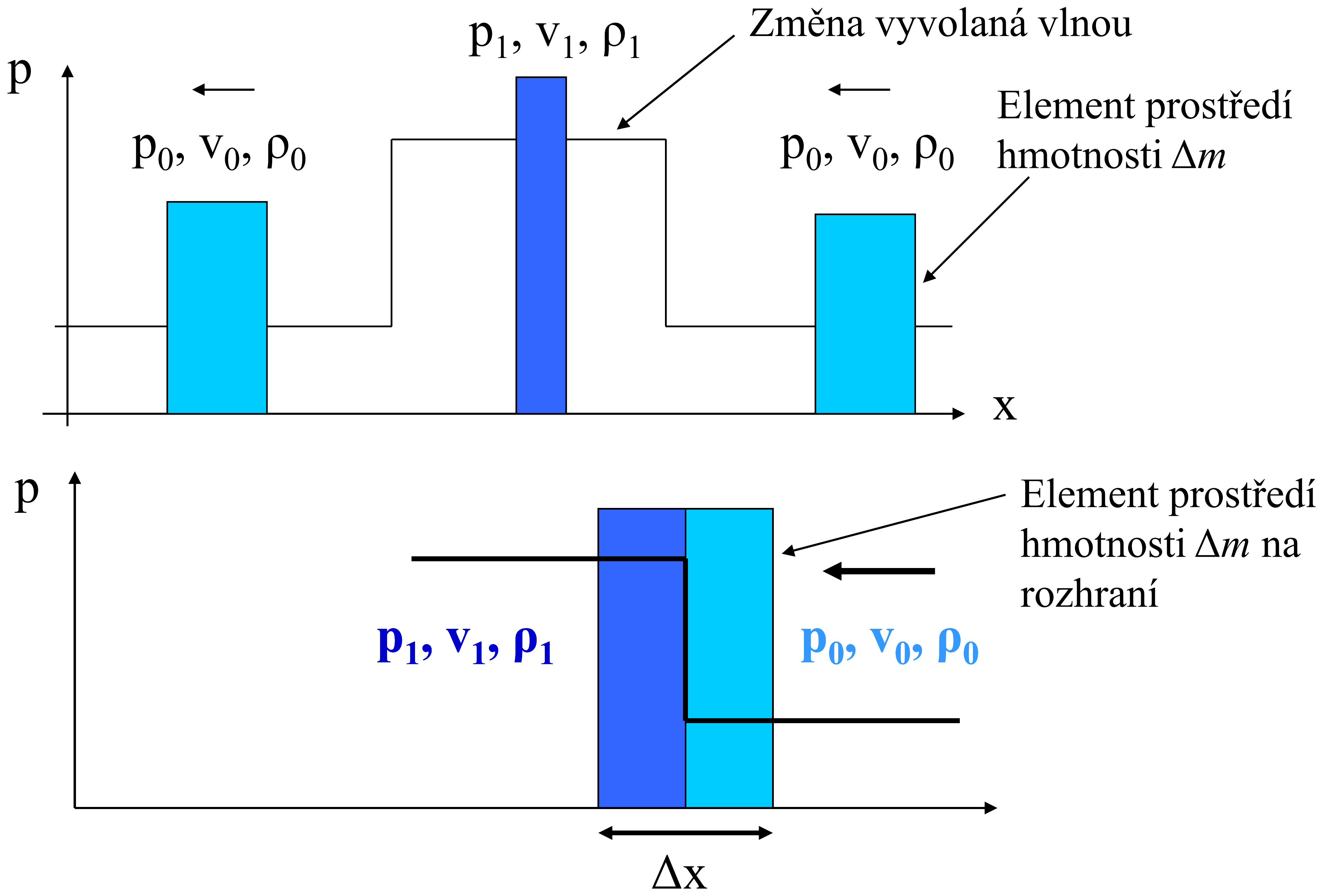
Ultrazvuk

Ultrazvuk je zvukové vlnění s frekvencí vyšší jak 20 kHz. Tato hranice je dána hranicí slyšitelnosti zvuku u průměrného lidského ucha. Pro ultrazvukovou diagnostiku v medicíně (velmi rozšířená je také ultrazvuková diagnostika v různých inženýrských aplikacích) se používají frekvence řádu jednotek až desítek MHz.

Citlivost ucha k frekvencím



Šíření zvukové vlny



Newtonův druhý zákon

Známý tvar Newtonova zákona přepíšeme na

$$\underbrace{\frac{\rho_0+\rho_1}{2}\Delta x\,S}_{m}\,\underbrace{\frac{v_0-v_1}{\Delta t}}_{a}=\underbrace{p_1 S-p_0 S}_{F}$$

Dosadíme

$$\Delta x=\frac{v_0+v_1}{2}\Delta t$$

a dostáváme

$$p_1-p_0=\frac{\rho_0+\rho_1}{2}\,\frac{v_0+v_1}{2}\left(v_0-v_1\right)$$

Zákon zachování hmoty

$$\rho_0 v_0=\rho_1 v_1$$

umožní úpravou vyjádřit rozdíl rychlostí

$$\rho_0 v_0-\frac{1}{2}\rho_1 v_0-\frac{1}{2}\rho_0 v_1=\rho_1 v_1-\frac{1}{2}\rho_1 v_0-\frac{1}{2}\rho_0 v_1 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\rho_0+\rho_1\right)\left(v_0-v_1\right)=\left(\rho_1-\rho_0\right)\left(v_1+v_0\right)$$

Rychlost zvuku

Předchozími úpravami dostáváme

$$\left(\frac{v_0 + v_1}{2}\right)^2 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0}$$

neboli výraz pro rychlost zvuku (pro rychlost zvuku budeme v této části nadále používat *c*, na rozdíl od rychlosti pohybu elementu prostředí, ktero budeme značit *v*)

$$c = \left(\frac{\Delta p}{\Delta \rho}\right)^{1/2}$$

Označíme-li *K* modul pružnosti

$$K = \rho \frac{\Delta p}{\Delta \rho}$$

je konečný výraz pro rychlost zvuku

$$\boxed{c = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{1/2}}$$

Rychlost zvuku pro různá prostředí

Prostředí	v / $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	Prostředí	v / $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	Prostředí	v / $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Plyny[a]		*Pevné látky*[a]		*Kapaliny*[a]	
Vzduch (0 °C)	331	Hliník	6 420	Voda (0 °C)	1 402
Vzduch (20 °C)	343	Ocel	5 941	Voda (20 °C)	1 482
Helium	965	Žula	6 000	Mořská voda[b]	1 522
Vodík	1 284				

[a] 0 °C a tlak 1 atm, pokud neuvedeno jinak.
[b] Při 20 °C a salinitě 3,5 %.

Hustota vody je téměř tisíckrát větší než hustota vzduchu. Kdyby o rychlosti zvuku rozhodovala pouze hustota, dalo by se očekávat, že se ve vodě bude zvuk šířit asi třicetkrát pomaleji než ve vzduchu. Z tabulky ale vyplývá, že je ve vodě zvuk naopak čtyřikrát rychlejší než ve vzduchu. Proto by měl být modul pružnosti vody více než desetitisíckrát větší než u vzduchu. Tak tomu skutečně je, protože voda je v porovnání se vzduchem mnohem hůř stlačitelná.

Rovinná vlna

Popis

$$s = s_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - f\,t\right)\right] = s_m \sin[k\,x - \omega t]$$

Protože

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad , \quad k = \frac{\omega}{c}$$

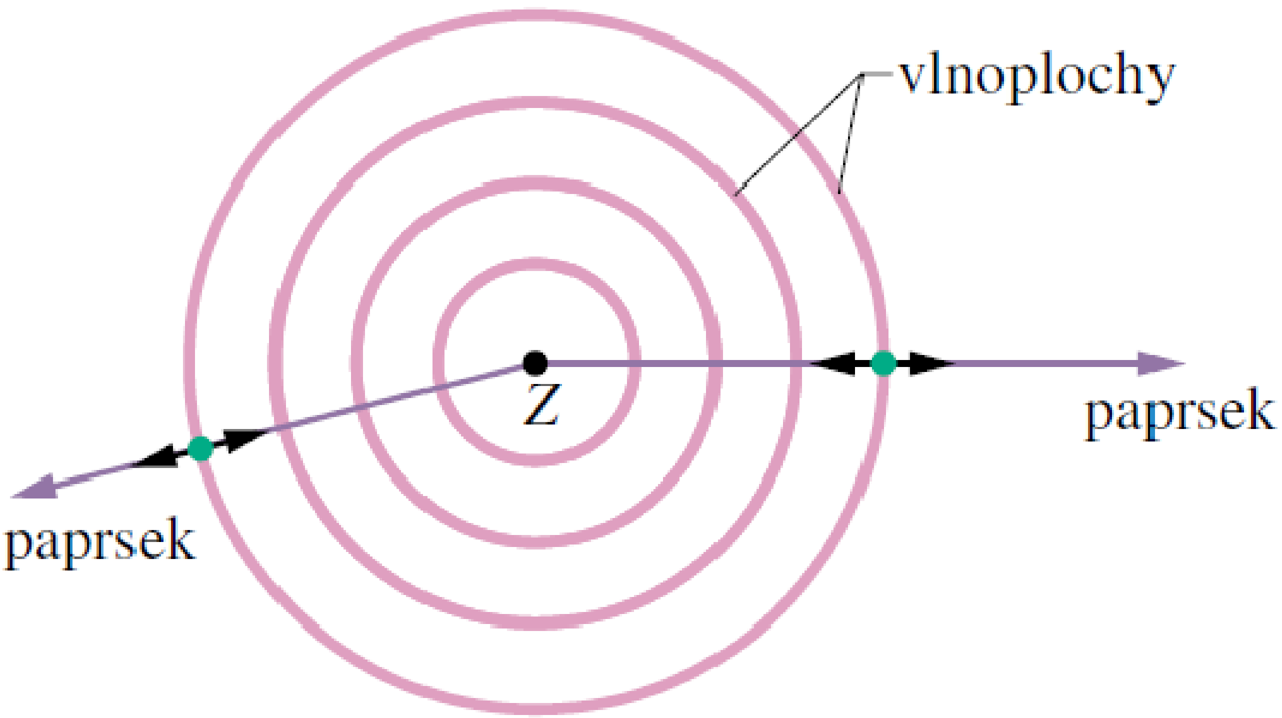
můžeme také psát

$$s = s_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - c\,t)\right] = s_m \sin\left[\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right]$$

Kulová vlna

Popis

$$s = s_m \frac{r_0}{r} \sin\left[2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - f\,t\right)\right]$$



Energie zvukové vlny

Kmitající element prostředí (objemu $\Delta V = S\Delta x$) má energii jak kinetickou, tak potenciální. V okamžiku, kdy je rychlost kmitání maximální (to není rychlost zvukové vlny!) je celá energie obsažena v kinetické části. Je tedy

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \cos[kx - \omega t] \quad \Rightarrow \quad v_m = \omega s_m$$

a dále

$$\Delta E = \frac{1}{2} \underbrace{\rho S \Delta x}_{\Delta m} \underbrace{(\omega s_m)^2}_{v_m^2}$$

Výkon zvukové vlny pak bude ($\Delta x = c\Delta t$) – tady už přirozeně c je rychlost zvuku

$$W = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 s_m^2 S$$

Intenzita zvukové vlny

Intenzita je energie zvukové vlny, která projde jednotkovou plochou za jednotku času

$$I = \frac{W}{S} = \frac{\Delta E}{S\,\Delta t} \quad , \quad [I] = \mathrm{W\,m^{-2}}$$

neboli

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\rho\, c\, \omega^2\, s_m^2}$$

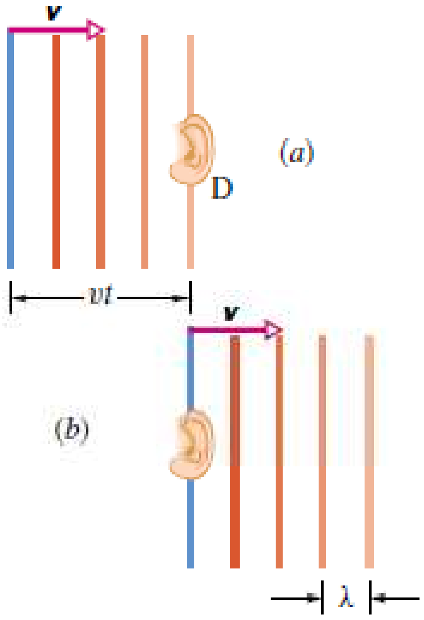
Hladina intenzity zvuku

$$\beta = (10\,\mathrm{dB})\log\frac{I}{I_0} \quad , \quad I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

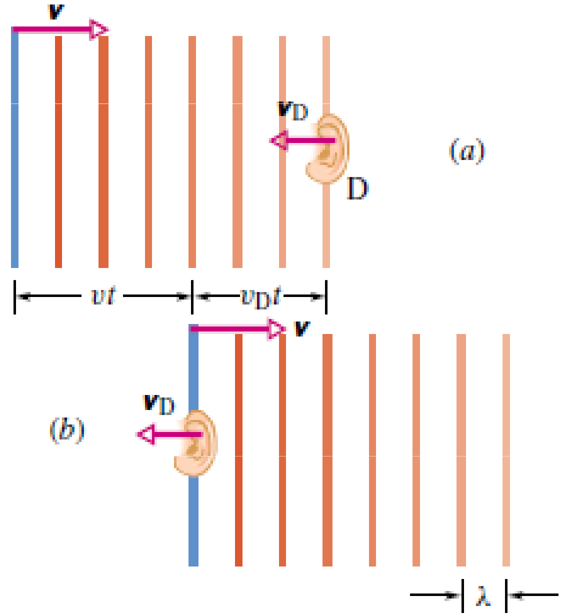
V amplitudách, kdy $I^{1/2}=s_\mathrm{m}$ a $\log(a^n)=n\log(a)$

$$\beta = (10\,\mathrm{dB})\log\left(\frac{I^{1/2}}{I_0^{1/2}}\right)^2 = (20\,\mathrm{dB})\log\frac{s_m}{s_{m0}}$$

Pohyb detektoru ke zdroji



Zdroj i detektor v klidu

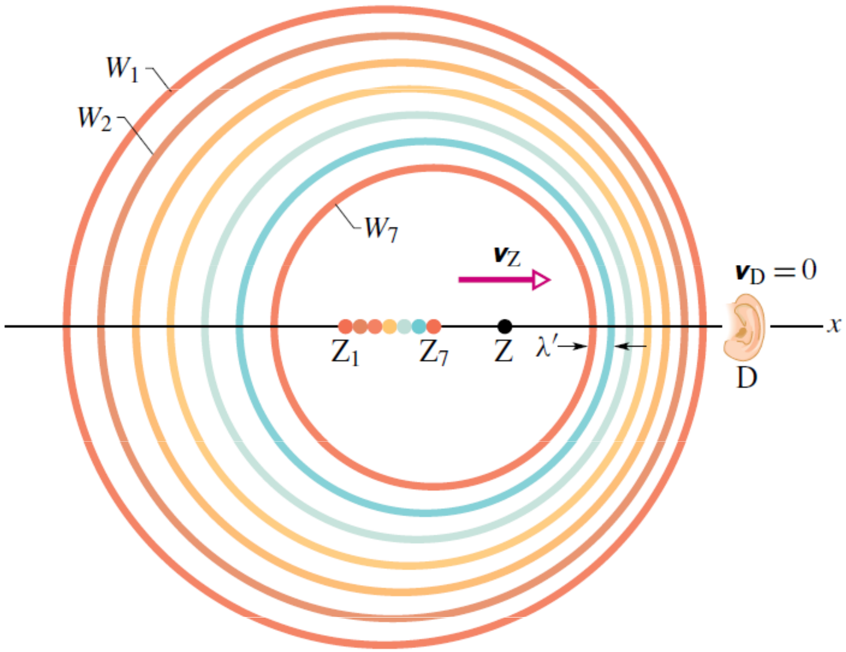


Zdroj v klidu, detektor se pohybuje ke zdroji

$$f' = \frac{\frac{c' t}{\lambda}}{t} = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c + v_D}{\frac{c}{f}} = f\,\frac{c + v_D}{c}$$

Počítáme takto: dráha $c't$, o kterou se za dobu t posunuly vlnoplochy dělena vlnovou délkou λ je rovna počtu vlnových délek. Tento počet vydělíme dobou t a dostáváme frekvenci f.

Pohyb zdroje k detektoru



Detektor je v klidu, zdroj se přibližuje k detektoru. Vlnoplochy vycházejí ze zdroje v intervalu T=1/f, takže jejich vzdálenost je vlnová délka λ. Detektor ovšem zaznamená vzhledem k pohybu zdroje (vlnoplochy nejsou vysílány ze stejného bodu) vzdálenost vlnoploch λ/.

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{cT - v_Z T} = \frac{c}{\frac{c}{f} - \frac{v_Z}{f}} = f\frac{c}{c - v_Z}$$

Dopplerův jev

Zdroj je v klidu, detektor se pohybuje ke zdroji

$$f' = f\frac{c + v_D}{c}$$

Detektor je v klidu, zdroj se pohybuje k detektoru:

$$f' = f\frac{c}{c - v_Z}$$

Při sbližování

$$f' > f$$

Zdroj je v klidu, detektor se pohybuje od zdroje

$$f' = f\frac{c - v_D}{c}$$

Detektor je v klidu, zdroj se pohybuje od detektoru:

$$f' = f\frac{c}{c + v_Z}$$

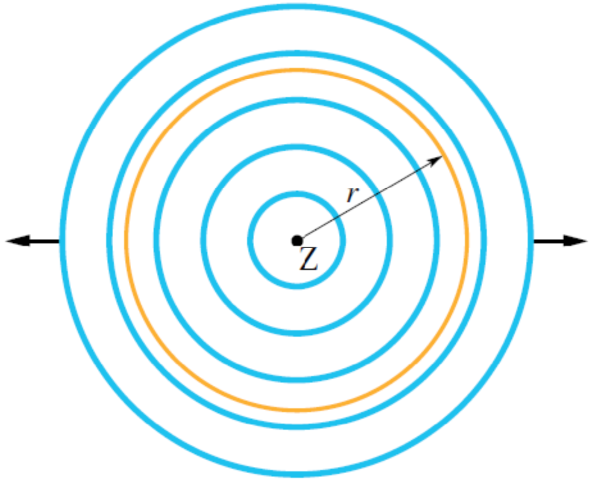
Při vzdalování

$$f' < f$$

Pokles intenzity

Výkon zdroje označme P_Z , intenzita kulové vlny vycházející z počátku

$$I = \frac{P_Z}{4\pi r^2}$$



Máme-li několik (nekoherentních) zdrojů, je intenzita součtem

$$I = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\frac{P_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^2}$$

Potřebné vztahy

Polohový vektor v kartézských souřadnicích, funkce souřadnic a její gradient

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad , \quad f = f(x,y,z) \quad , \quad \mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Vektorové pole a jeho divergence

$$\vec{u} = u_x(x,y,z)\vec{i} + u_y(x,y,z)\vec{j} + u_z(x,y,z)\vec{k} \quad ,$$

$$\mathbf{div}\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Skalární součin

$$\vec{u}\cdot\mathbf{grad} = u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}$$

skalární součin	**dva vektory**	$\rightarrow$	**skalární veličina**
gradient	**funkce**	$\rightarrow$	**vektorová veličina**
divergence	**vektorové pole**	$\rightarrow$	**skalární veličina**

Rychlost zvuku I

Základními rovnicemi jsou rovnice kontinuity a Eulerova rovnice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \mathbf{grad}\right)\vec{v} = -\frac{\mathbf{grad}\, p}{\rho}$$

Pro malé kmity (položíme $\rho=\rho_0+\delta\rho$, $p=p_0+\delta p$) ponecháme v rovnicích jen členy prvního řádu v $\delta\rho$, δp a v_s, takže máme

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0\, \mathbf{div}\vec{v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\mathbf{grad}\,\delta p}{\rho_0} = 0$$

Stejně jako každý pohyb v ideální tekutině je i šíření zvuku děj adiabatický. Proto můžeme psát

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_S \delta\rho$$

Rychlost zvuku II

Máme teď z rovnice kontinuity (v dalším už budeme vynechávat index 0)

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \mathrm{div}\vec{v} = 0$$

Zapíšeme ještě vektor rychlosti jako gradient nějaké potenciálové funkce φ a linearizovaná Eulerova rovnice je pak

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Máme pak již vlnovou rovnici s výrazem pro rychlost zvuku

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0} \qquad \boxed{c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}}$$

Rychlost zvuku III

V jednorozměrném případě je jedním z řešení φ=*f*(*x*-*vt*). Potom máme

$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f^{/}(x-c\,t)\quad,\quad \delta p=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\rho\,c\,f^{/}(x-c\,t)$$

odkud porovnáním

$$v=\frac{\delta p}{\rho\,c}=c\frac{\delta\rho}{\rho}$$

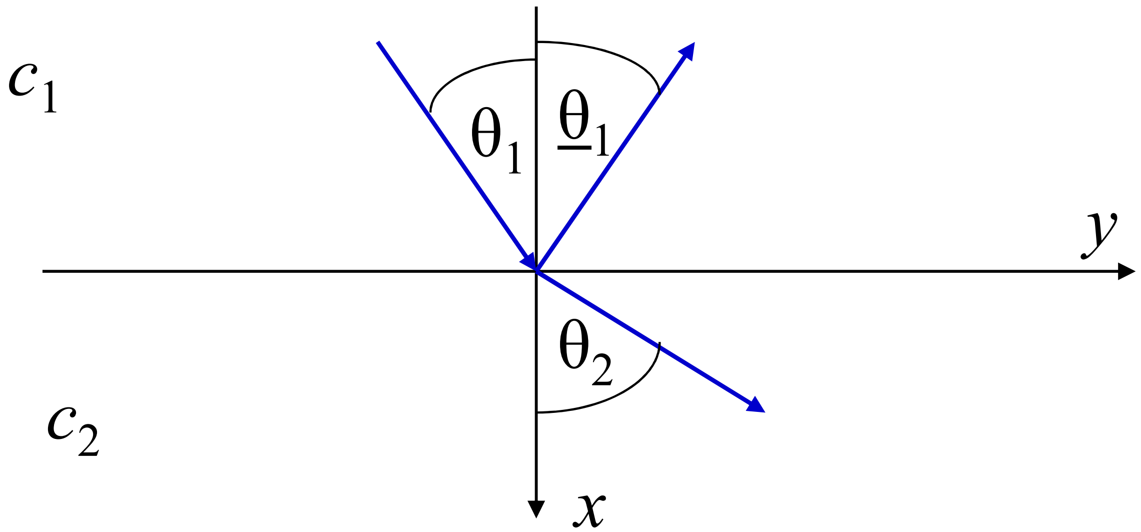
Pro kolísání teploty musíme připomenout termodynamickou identitu

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S=\frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

takže

$$\delta T=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\frac{T}{c_p}v\,c$$

Odraz a lom na rozhraní



Pro dopadající, odraženou a prošlou vlnu máme

$$\varphi_i = a_i \sin\left[\omega\left(\frac{x\cos\theta_1}{c_1} + \frac{y\sin\theta_1}{c_1} - t\right)\right]$$

$$\varphi_r = a_r \sin\left[\omega\left(-\frac{x\cos\underline{\theta}_1}{c_1} + \frac{y\sin\underline{\theta}_1}{c_1} - t\right)\right]$$

$$\varphi_t = a_t \sin\left[\omega\left(\frac{x\cos\theta_2}{c_2} + \frac{y\sin\theta_2}{c_2} - t\right)\right]$$

Podmínky spojitosti

Na rozhraní (x=0) musí být u všech vln stejná závislost na souřadnici y (vlstnosti prostředí se v tomto směru nemění), což vede k tomu, že úhel odrazu je roven úhlu dopadu a poměr sinů úhlů dopadu a lomu (úhel se měří od kolmice k rozhraní) je roven poměru rychlostí

$$\underline{\theta}_1 = \theta_1 \quad , \quad \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Dále se musí rovnat tlak a kolmá složka rychlosti na obou stranách rozhraní

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad , \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

odkud

$$\rho_1 \left(a_i + a_r \right) = \rho_2 \, a_t \quad , \quad \frac{\cos\theta_1}{c_1} \left(a_i - a_r \right) = \frac{\cos\theta_2}{c_2} a_t$$

Propustnost a odrazivost I

Amplitudy odražená a prošlé vlny vypočteme z předchozích vztahů jako

$$a_r = \frac{Z_2\cos\theta_1 - Z_1\cos\theta_2}{Z_2\cos\theta_1 + Z_1\cos\theta_2} a_i \quad , \quad a_t = \frac{c_2}{c_1}\frac{2Z_1\cos\theta_1}{Z_2\cos\theta_1 - Z_1\cos\theta_2} a_i$$

kde $Z=\rho c$ je tzv. akustická impedance. Toky na jednotkovou plochu rozhraní splňují zákon zachování

$$\boxed{I_r + I_t = I_i}$$

Máme

$$I_i = \cos\theta_1 \frac{\rho_1}{c_1}\omega^2 |a_i|^2 \quad , \quad I_r = \cos\theta_1 \frac{\rho_1}{c_1}\omega^2 R |a_i|^2$$

$$I_t = \cos\theta_1 \frac{\rho_1}{c_1}\omega^2 T |a_i|^2$$

$$R = \left(\frac{Z_2\cos\theta_1 - Z_1\cos\theta_2}{Z_2\cos\theta_1 + Z_1\cos\theta_2}\right)^2 \quad , \quad T = \frac{4Z_1 Z_2\cos\theta_1\cos\theta_2}{\left(Z_2\cos\theta_1 + Z_1\cos\theta_2\right)^2}$$

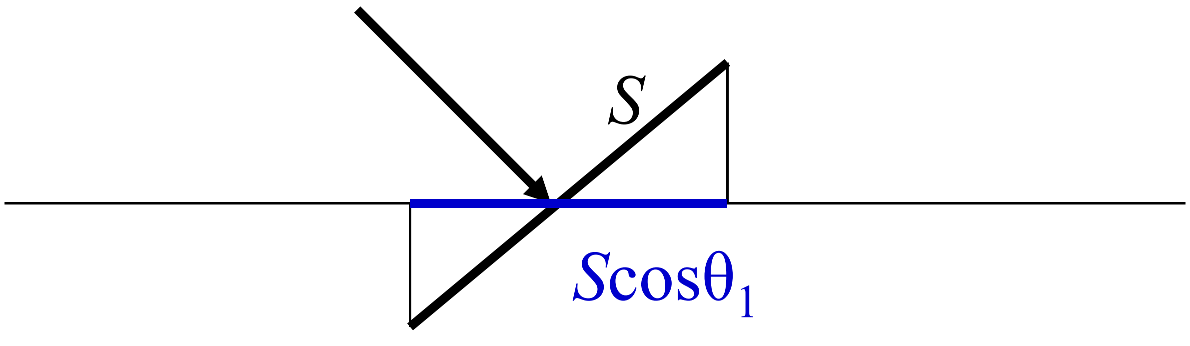
Propustnost a odrazivost II

Z definice koeficientů odrazivosti a propustnosti a zákona zachování toku na rozhraní plyne

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{T} = \left(\frac{Z_2 \cos\theta_1 - Z_1 \cos\theta_2}{Z_2 \cos\theta_1 + Z_1 \cos\theta_2} \right)^2 + \frac{4\, Z_1\, Z_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{\left(Z_2 \cos\theta_1 + Z_1 \cos\theta_2 \right)^2} = 1$$

Pro kolmý dopad ($\theta_1 = \underline{\theta}_1 = \theta_2 = 0$) se vztahy zjednoduší na

$$R = \frac{\left(Z_2 - Z_1 \right)^2}{\left(Z_2 + Z_1 \right)^2} \quad , \quad T = \frac{4\, Z_2\, Z_1}{\left(Z_2 + Z_1 \right)^2}$$



Akustická impedance

Látka	$Z = \rho c$ [kg m^{-2} s^{-1} . 10^{-4}]
Vzduch	0,0004
Voda	1,50
Hliník	18,0
Tuk	1,38
Vodová a sklovitá část oka	1,50
Mozek	1,55
Krev	1,61
Ledviny	1,62
Lidská měkká tkáň (střední hodnota)	1,63
Slezina	1,64
Játra	1,65
Sval	1,70
Oční bulva	1,85
Lebeční kost	6,10

Rychlost zvuku

Látka	c [m s^{-1}]
Vzduch	331
Destilovaná voda [25 °C]	1498
Destilovaná voda [25 °C]	1540
Tuk	1475
Mozek	1560
Krev	1570
Ledviny	1560
Lidská měkká tkáň (střední hodnota)	1540
Slezina	1570
Játra	1570
Sval	1580
Oční bulva	1620
Lebeční kost	3360

Absorbce zvuku I

Vyjdeme ze standardního exponenciálního zákona

$$I(x) = I(0)e^{-\mu x}$$

Pro vyjádření poklesu hladiny hlasitosti v decibelech musíme provést následující úpravy

$$\beta(x) - \beta(0) = 10\,\mathrm{dB}\log\frac{I(x)}{I_0} - 10\,\mathrm{dB}\log\frac{I(0)}{I_0} =$$

$$10\,\mathrm{dB}\log\frac{I(x)}{I(0)} = 10\,\mathrm{dB}\log e^{-\mu x} = 10\,\mathrm{dB}\log 10^{-\mu x \log e}$$

Používáme úpravy $x=10^{\log x}$, $(10^a)^b=10^{a.b}$, takže pro pokles hladiny hlasitosti dostáváme lineární závislost (10.μ.log$e$=α)

$$\boxed{\beta(x) = \beta(0) - \alpha x}$$

$$[\beta] = \mathrm{dB} \quad , \quad [\alpha] = \mathrm{dB\,m^{-1}} \quad , \quad [x] = \mathrm{m}$$

Absorbční koeficient pro 1 MHz

Látka	α [dB m^{-1}]
Voda	0,22
Tuk	60
Vodová a sklovitá část oka	10
Mozek	85
Krev	18
Ledviny	100
Plíce	4000
Mícha	100
Játra	90
Sval napříč vláken	330
Sval podél vláken	120
Oční bulva	200
Ricinový olej	95
Lebeční kost	2000

Absorbční koeficient pro f MHz

Látka	
Voda	$\alpha_1 f^2$
Tuk	$\alpha_1 f$
Vodová a sklovitá část oka	$\alpha_1 f$
Mozek	$\alpha_1 f$
Krev	$\alpha_1 f$
Ledviny	$\alpha_1 f$
Plíce	$\alpha_1 f$
Mícha	$\alpha_1 f$
Játra	$\alpha_1 f$
Sval napříč vláken	$\alpha_1 f$
Sval podél vláken	$\alpha_1 f$
Oční bulva	$\alpha_1 f$
Ricinový olej	$\alpha_1 f^2$
Lebeční kost	$\alpha_1 f^2$

α_1 – koeficient pro 1 Mhz