Radiologická fyzika

Ultrazvuk –

vlnové vlastnosti

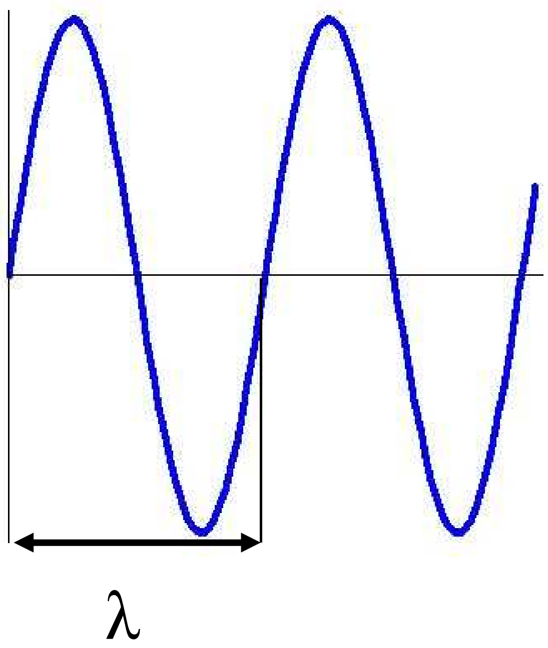
podzim 2010, osmá přednáška

Poznámka

Tato presentace se od předchozích odlišuje tím, že obsahuje matematicky náročnější části – pracuje se s funkcemi komplexní proměnné a integrály. Nebude proto asi pro většinu posluchačů zajímavá.

Ultrazvuk

Ultrazvuk je zvukové vlnění s vysokou frekvencí. Pro ultrazvukovou diagnostiku v medicíně se používají frekvence řádu jednotek až desítek MHz.



$$s = \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - f\,t\right)\right]$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

vlastnosti zdroje

vlastnosti prostředí

Rychlost pohybu elementu prostředí

Elementárními úpravami základnách rovnic hydrodynamiky (rovnice kontinuity a Eulerova rovnice) dospějeme k výrazu pro rychlost zvuku

$$\boxed{c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}}$$

(čtverec rychlosti zvuku je dán změnou tlaku v daném elementu prostředí se změnou hustoty v tomto elementu, aniž si sousední elementy vyměňují teplo). Zapíšeme-li ještě vektor rychlosti daného elementu zapíšeme jako gradient nějaké potenciálové funkce φ, je tato funkce řešením vlnové rovnice (Δ je Laplaceův operátor)

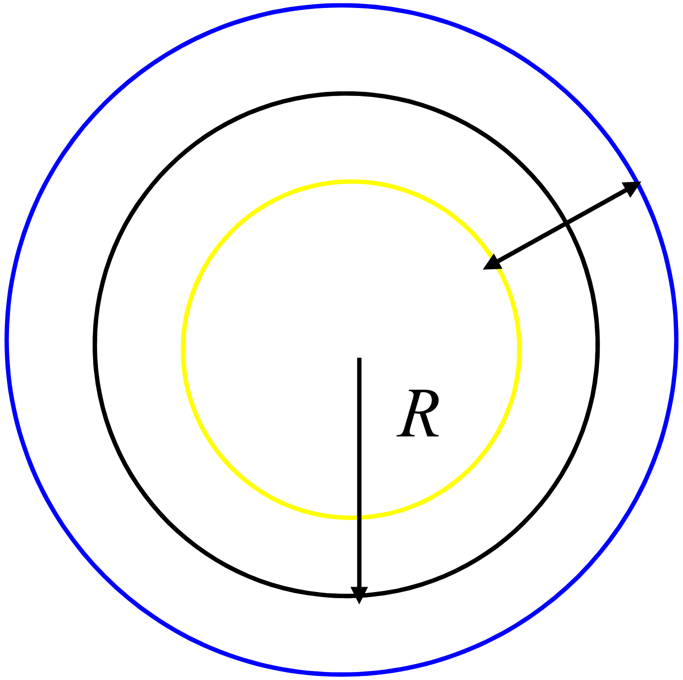
$$\boxed{\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi \quad , \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta\varphi = 0}$$

V kartézských souřadnicích $\varphi=\varphi(x,y,z)$ a

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} \quad , \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Kmitající koule

Mějme kouli poloměru R vykonávající malé pulsace, tj. body na povrchu koule radiálně kmitají rychlostí $u(t)$



$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = u(t)$$

Obecná kulová vlna

Mějme kouli poloměru R vykonávající malé pulsace, tj. body na povrchu koule radiálně kmitají rychlostí $u(t)$. Řešení úlohy (tedy řešení vlnové rovnice) hledáme ve tvaru

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{r}f\left(t-\frac{r-R}{c}\right)$$

Na povrchu musí být rychlosti pohybu elementu budící koule i elementu okolního prostředí stejné

$$u(t)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R}=-\left[\frac{1}{Rc}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{f}{R^2}\right]$$

takže řešením je

$$\varphi(r,t)=-c\frac{R}{r}e^{-\frac{ct'}{R}}\int_{-\infty}^{t'}u(\tau)e^{\frac{c\tau}{R}}d\tau \quad , \quad t'=t-\frac{r-R}{c}$$

Harmonická kulová vlna

Předpokládejme teď, že $u(t)=v_R\sin(\omega t)$. Potom je výraz pro rychlost pohybu elementu v obecném bodě tvořen relativně jednoduchým vztahem

$$\boxed{v(r,t)=a(r)\sin\left[\omega\left(t-\frac{r-R}{c}\right)+\chi(r)\right]}$$

$$a(r)=\frac{v_R\,\omega^2 R^2}{\left(\omega^2 r^2+c^2\right)^{1/2}\left(\omega^2 R^2+c^2\right)^{1/2}} \quad , \quad \chi(r)=\mathrm{arctg}\frac{\omega(r+R)}{\omega^2 r R-c^2}$$

Při ultrazvukové diagnostice máme vždy $\omega r > \omega R >> c$ (jinak zapsáno $r > R >> \lambda$), takže se vztah pro rychlost pohybu elementu prostředí zjednoduší na

$$\boxed{v(r,t)=v_R\frac{R}{r}\sin\left[\omega\left(t-\frac{r-R}{c}\right)\right]}$$

Časová střední hodnota

Z různých důvodů není zajímavá a mnohdu ani dobře měřitelná okamžitá hodnota fyzikální veličiny $F(t)$, ale její střední hodnota za dobu T , tj.

$$\langle F \rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt$$

Tato doba bývá někdy velmi dlouhá (čekáme, až se nějaký jev ustálí a nezajímá nás přechodový jev). Pro veličinu s periodou $\omega=2\pi f$ je touto dobou přirozeně perioda $T=1/f$

$$\boxed{F\left(t+\frac{1}{f}\right) = F(t) \quad , \quad \langle F \rangle = f\int_0^{1/f} F(t)\,dt}$$

Zejména

$$\langle \sin(2\pi f t) \rangle = f\int_0^{1/f} \sin(2\pi f t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

$$\left\langle [\sin(2\pi f t)]^2 \right\rangle = f\int_0^{1/f} [\sin(2\pi f t)]^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin x)^2\,dx = \frac{1}{2}$$

Intenzita harmonické kulové vlny

Odvodili jsme výraz pro rychlost pohybu elementu prostředí

$$\boxed{v(r,t) = v_R \frac{R}{r} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r-R}{c}\right)\right]}$$

Intenzita zvukové vlny je

$$\boxed{I(r) = \rho c \left\langle \left[v(r,t)\right]^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\rho c v_R^2 \frac{R^2}{r^2}}$$

neboli

$$\boxed{\frac{I(r)}{I(R)} = \frac{R^2}{r^2}}$$

Komplexní čísla

Základem je třeba zavedení pojmu komplexní jednotky, čísla, které neleží na reálné ose

$$\boxed{i=\sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad i.i=-1}$$

Pomocí komplexní jednotky zavádíme komplexní čísla. Jsou-li *a* ,*b*, *c*, *d* reálná čísla, pro komplexní čísla $w=a+i.b$, $z=c+i.d$

$$\boxed{w+z=(a+c)+i(b+d) \quad , \quad w.z=(a.c-b.d)+i(a.d+b.c)}$$

Každý si jistě pamatuje, že platí

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b).(a+b)}$$

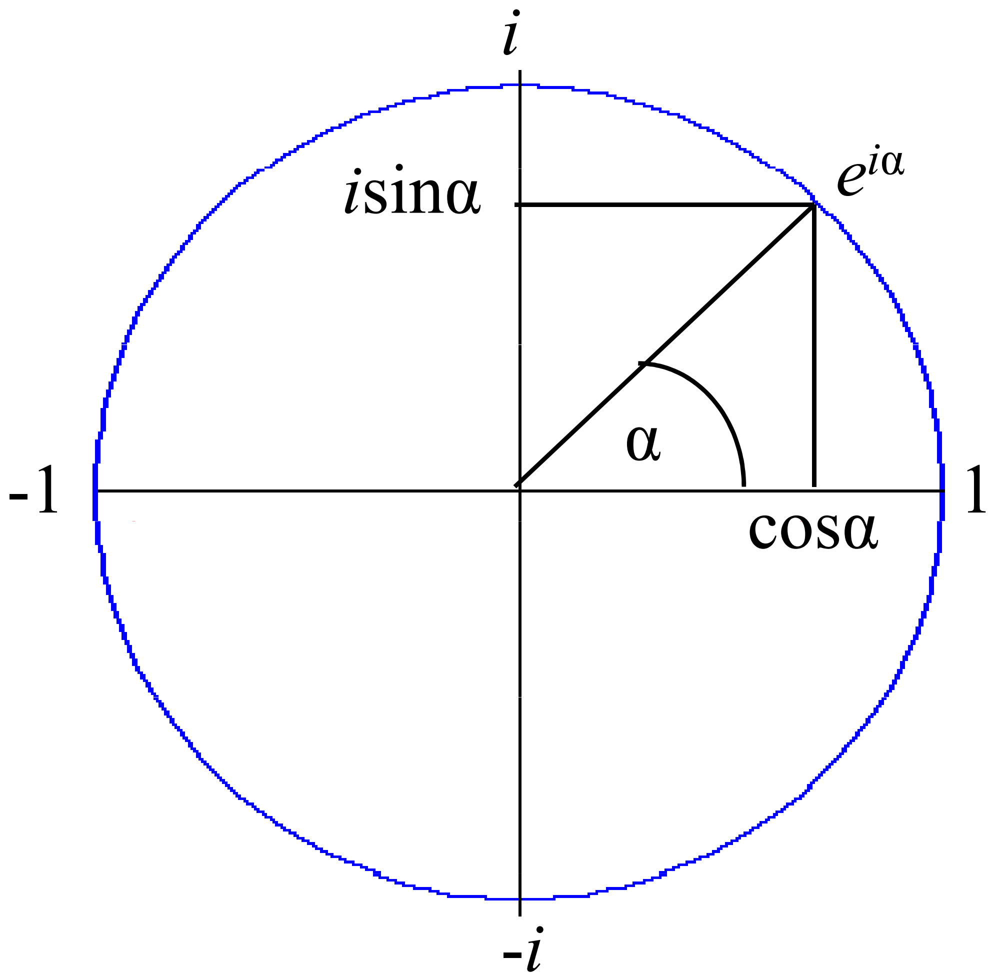
Pomocí komplexní čísel můžeme psát také

$$\boxed{a^2+b^2=(a-i.b).(a+i.b)}$$

Komplexní jednotka

Jsou-li a ,b reálná čísla, definujeme ke komplexní číslu w číslo komplexně sdružené w^* a modul $|w|$

$$\boxed{w = a + i\,b \quad , \quad w^* = a - i\,b \quad , \quad |w| = \sqrt{w\,w^*} = \sqrt{a^2 + b^2}}$$



Eulerův vztah

$$\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha}$$

Platí

$$\boxed{\left|e^{i\alpha}\right| = \sqrt{e^{i\alpha}\,e^{-i\alpha}} = \sqrt{e^0} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1}$$

Zápis vln pomocí komplexních čísel

Tento zápis přináší velké zjednodušení. Je například velmi výhodné, že nedochází při derivování (a integrování) k „přecházení“ od sinu ke kosinu

$$\boxed{\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \quad , \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \quad , \quad \frac{de^{ix}}{dx} = i\,e^{ix}}$$

Monochromatickou kulovou vlnu s frekvencí ω, která vychází z nějakého bodu zdroje zapisujeme jako

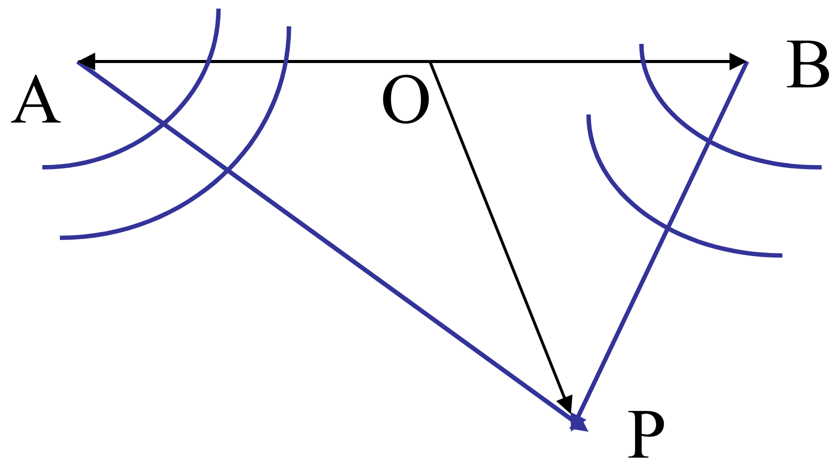
$$\boxed{\varphi(\vec{r},t) = \frac{A}{R}\exp[i\,k\,R - \omega t] \quad , \quad k = \frac{\omega}{c} \quad , \quad R = |\vec{r} - \vec{r}_S|}$$

Zdroj ultrazvukových vln není ale nikdy tak jednoduchý. Má jisté nezanedbatelné geometrické rozměry a budí vlny s daleko složitější časovou závislostí než jsou prosté harmonické kmity.

Při odvozování obecně platných vztahů (a v mnoha dalších aplikacích) hraje velmi důležitou roli Fourierova transformace. Také její zápis pomocí komplexních proměnných je podstatně jednodušší.

Skládání dvou harmonických vln – geometrie

Dva zdroje v různých bodech kmitající ve fázi



$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \vec{r}_B \quad , \quad \overrightarrow{OP} = \vec{r} \quad , \quad AP = |\vec{r} - \vec{r}_A| \quad , \quad BP = |\vec{r} - \vec{r}_B|$$

Vhodnou volbou souřadnicového systému (body A a B leží na ose x, počátek půlí jejich vzdálenost) můžeme psát

$$|\vec{r} - \vec{r}_A| = \left[\left(x + \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2} \quad , \quad |\vec{r} - \vec{r}_B| = \left[\left(x + \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}$$

Skládání dvou harmonických vln – aproximace

Pole φ v bodě P je součtem polí φ_A a φ_B

$$\varphi(\vec{r}) = a\left\{\frac{\exp\left[i\,k\left|\vec{r}-\vec{r}_A\right|\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_A\right|}+\frac{\exp\left[i\,k\left|\vec{r}-\vec{r}_B\right|\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_B\right|}\right\}\exp\left[-i\,\omega t\right]$$

Závislost na *d* v čitateli zanedbáme, jde o pomalou změnu amplitudy, takže

$$\left|\vec{r}-\vec{r}_A\right| \approx \left|\vec{r}-\vec{r}_B\right| \approx r$$

Totéž zanedbání nemůžeme ale provést v exponentu, protože

$$\psi_A = k\left[\left|\vec{r}-\vec{r}_A\right| - r\right] \quad , \quad \psi_B = k\left[\left|\vec{r}-\vec{r}_B\right| - r\right]$$

jako součin velkého ($k=2\pi/\lambda$) a malého čísla nemusí být malé (ve srovnání s π, kdy při změně o tuto hodnotu se obrátí znaménko celého výrazu pro vlnu). Máme tedy

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{2\,a\exp\left[i\,k\,r\right]}{r}\exp\left[i\,\frac{\psi_A+\psi_B}{2}\right]\cos\left[\frac{\psi_A-\psi_B}{2}\right]\exp\left[-i\,\omega t\right]$$

Fourierova transformace

Máme-li nějakou funkci času $f(t)$, pak (za jistých matematických předpokladů) je možno ji zapsat jakou lineární kombinaci harmonických funkcí

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp[-i\omega t]\, d\omega}$$

Funkce $F(\omega)$ je pak

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[i\omega t]\, dt}$$

Říkáme, že funkce $f(t)$ a $F(\omega)$ jsou navzájem zobrazeny pomocí Fourierovy transformace. Fourierovy transformace využijeme dále při hledání řešení vlnové rovnice pro ultrazvukové pole (například popsané lokální změnou tlaku) vyvolané nějakým kmitajícím zdrojem.

Vlnová rovnice

Vlnovou rovnici pro časově závislé tlakové pole

$$\boxed{\frac{\partial^2 p(\vec{r},t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p(\vec{r},t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p(\vec{r},t)}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(\vec{r},t)}{\partial t^2}}$$

převedeme Fourierovou transformací

$$\boxed{p(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p(\vec{r},\omega)\exp[-i\omega t]\,d\omega}$$

na rovnici pro harmonickou vlnu

$$\boxed{\frac{\partial^2 p(\vec{r},\omega)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p(\vec{r},\omega)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p(\vec{r},\omega)}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}p(\vec{r},\omega)=0}$$

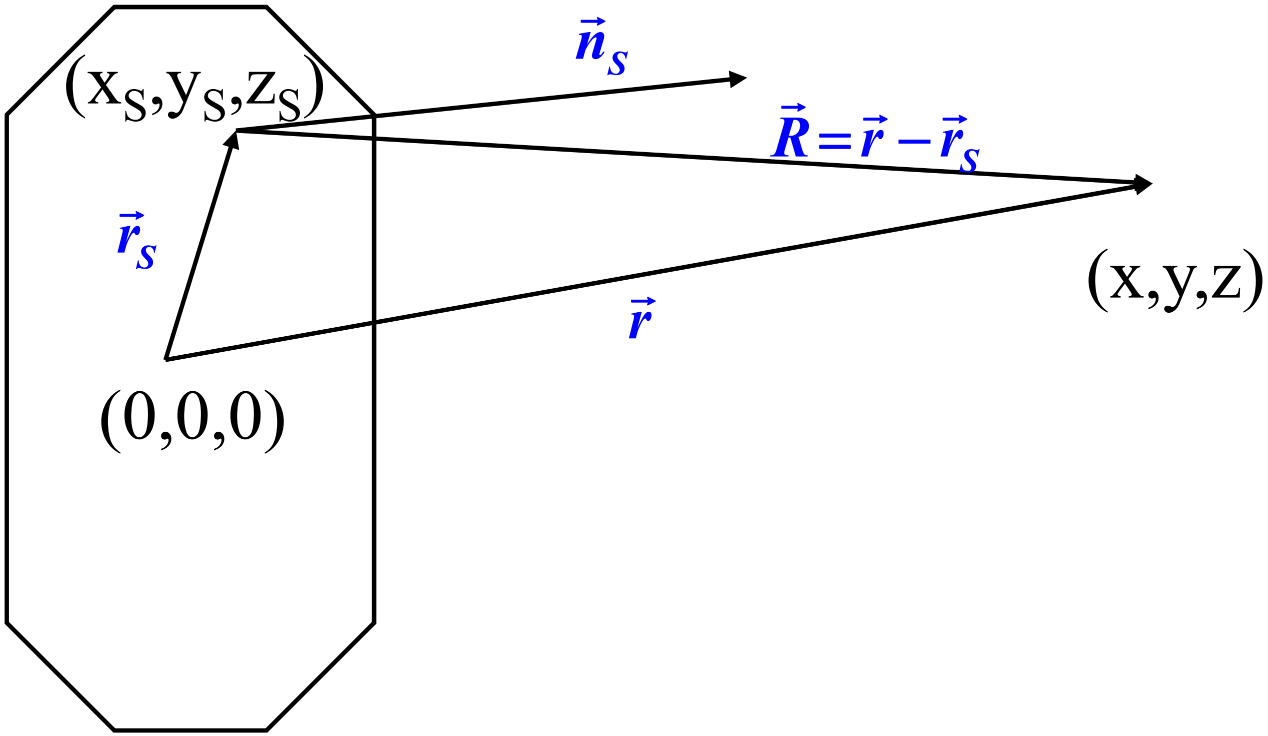
Známe-li rozložení tlakového pole na ploše zdroje (a při splnění některých dalších vcelku přirozených podmínek), získáme řešení rovnice pomocí Huygensova – Fresnelova principu.

Řešení pro monochromatickou vlnu

Huygensův – Fresnelův princip

$$\boxed{p(\vec{r},\omega) = \frac{\omega}{2\pi i c}\iint_S \frac{p_S(\vec{r}_S,\omega)}{R}\exp\left[i\frac{\omega}{c}R\right]\cos\left(\vec{n}_S,\vec{R}\right)dS}$$

Integruje se po ploše detektoru *S*.



Obecné řešení

Pomocí Fourierovy transformace přejdeme od řešení pro monochromatickou vlnu k obecnému časově závislému řešení vlnové rovnice pro tlakové pole

$$\boxed{p(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi c}\iint_S \frac{\cos\left(\vec{n}_S,\vec{R}\right)}{R}\left\{\frac{d}{dt}p_S\left(\vec{r}_S,t-\frac{R}{c}\right)\right\}dS}$$

Volbou rozložení tlakového pole na ploše zdroje můžeme dosáhnout nejrozmanitějších profilů ultrazvukového svazku jak v prostoru tak v čase. Dříve se pracovalo pouze s nejjednodušším tvarem

$$\boxed{p_S\left(\vec{r}_S,t-\frac{R}{c}\right) = p\exp\left[i\frac{\omega}{c}R\right]\exp[-i\omega t]}$$

a v analogii se světelnou optikou byl ve svazku rozlišován Fresnelův nebo Fraunhoferův profil.