Radiologická fyzika

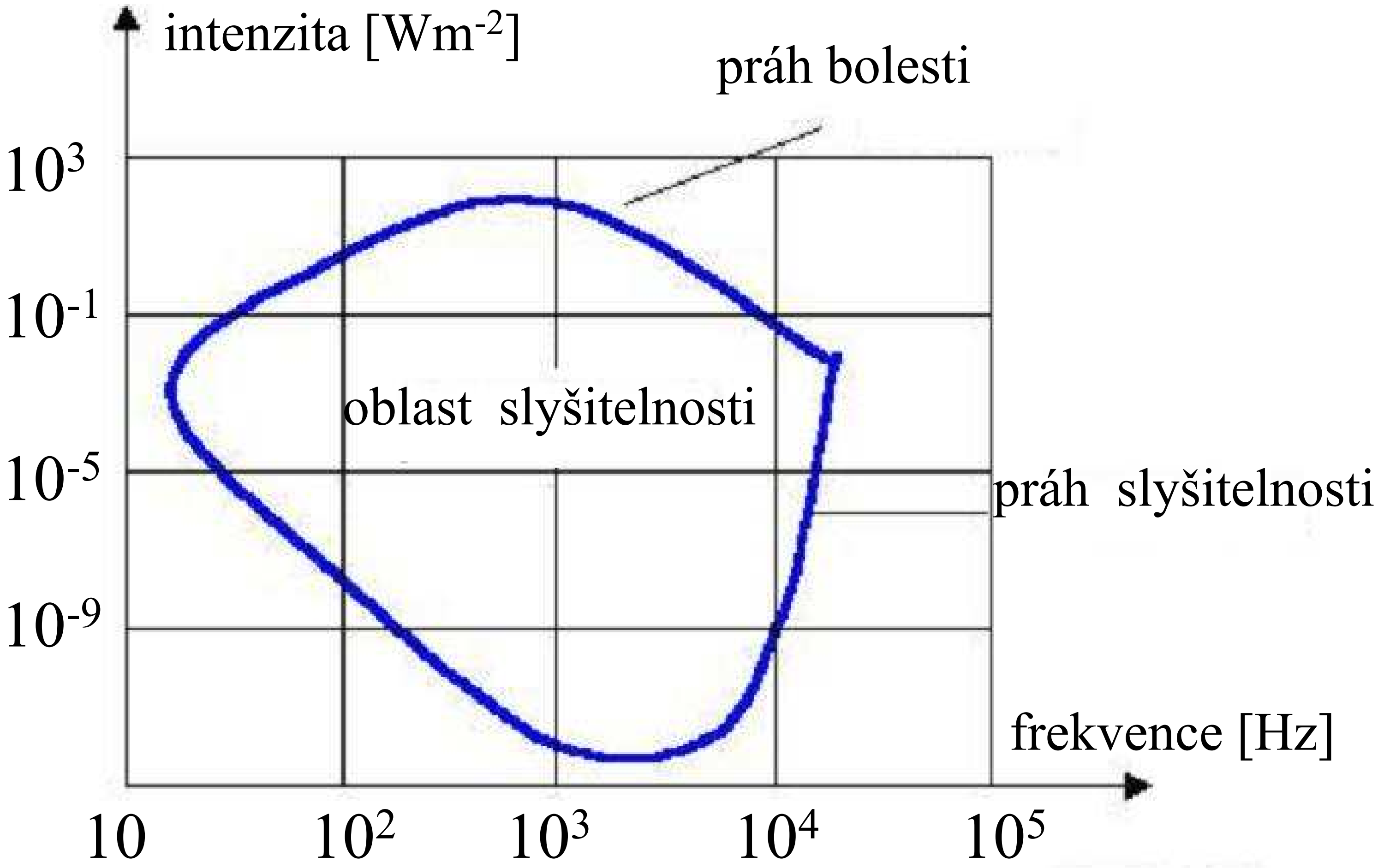
Ultrazvuková diagnostika

podzim 2011, osmá přednáška

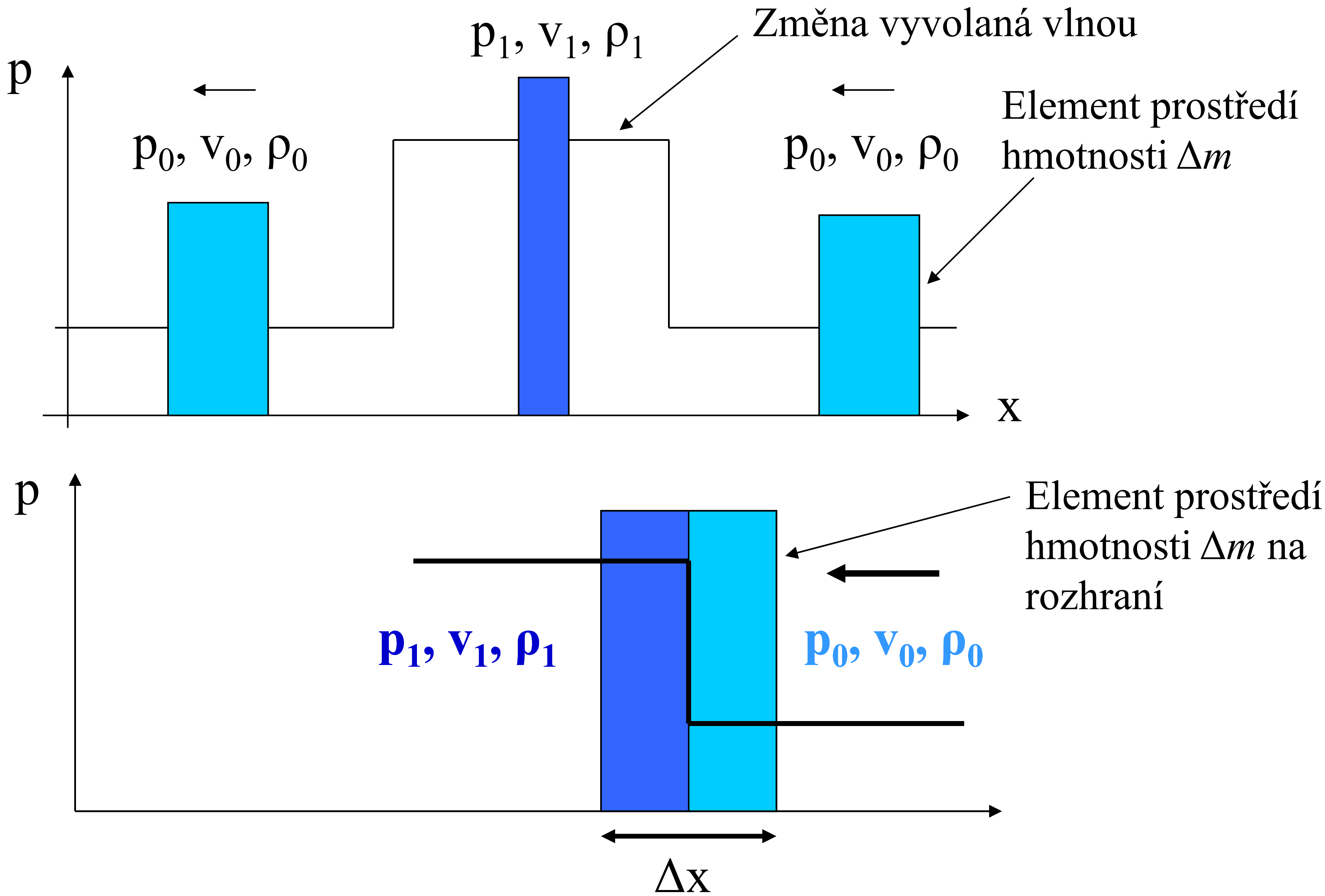
Ultrazvuk

Ultrazvuk je zvukové vlnění s frekvencí vyšší jak 20 kHz. Tato hranice je dána hranicí slyšitelnosti zvuku u průměrného lidského ucha. Pro ultrazvukovou diagnostiku v medicíně (velmi rozšířená je také ultrazvuková diagnostika v různých inženýrských aplikacích) se používají frekvence řádu jednotek až desítek MHz.

Citlivost ucha k frekvencím



Šíření zvukové vlny



Newtonův druhý zákon

Známý tvar Newtonova zákona přepíšeme na

$$\underbrace{\frac{\rho_0+\rho_1}{2}\Delta x\, S}_{m}\,\underbrace{\frac{v_0-v_1}{\Delta t}}_{a}=\underbrace{p_1 S-p_0 S}_{F}$$

Dosadíme

$$\Delta x=\frac{v_0+v_1}{2}\Delta t$$

a dostáváme

$$p_1-p_0=\frac{\rho_0+\rho_1}{2}\frac{v_0+v_1}{2}\left(v_0-v_1\right)$$

Zákon zachování hmoty

$$\rho_0 v_0=\rho_1 v_1$$

umožní úpravou vyjádřit rozdíl rychlostí

$$\rho_0 v_0-\frac{1}{2}\rho_1 v_0-\frac{1}{2}\rho_0 v_1=\rho_1 v_1-\frac{1}{2}\rho_1 v_0-\frac{1}{2}\rho_0 v_1 \quad\Rightarrow$$

$$\left(\rho_0+\rho_1\right)\left(v_0-v_1\right)=\left(\rho_1-\rho_0\right)\left(v_1+v_0\right)$$

Rychlost zvuku

Předchozími úpravami dostáváme

$$\left(\frac{v_0 + v_1}{2}\right)^2 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0}$$

neboli výraz pro rychlost zvuku (pro rychlost zvuku budeme v této části nadále používat c, na rozdíl od rychlosti pohybu elementu prostředí, ktero budeme značit v)

$$c = \left(\frac{\Delta p}{\Delta \rho}\right)^{1/2}$$

Označíme-li K modul pružnosti

$$K = \rho \frac{\Delta p}{\Delta \rho}$$

je konečný výraz pro rychlost zvuku

$$\boxed{c = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{1/2}}$$

Rychlost zvuku pro různá prostředí

Prostředí	$\frac{v}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	Prostředí	$\frac{v}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	Prostředí	$\frac{v}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$
Plyny[a]		*Pevné látky*[a]		*Kapaliny*[a]	
Vzduch (0 °C)	331	Hliník	6 420	Voda (0 °C)	1 402
Vzduch (20 °C)	343	Ocel	5 941	Voda (20 °C)	1 482
Helium	965	Žula	6 000	Mořská voda[b]	1 522
Vodík	1 284				

[a] 0 °C a tlak 1 atm, pokud neuvedeno jinak.
[b] Při 20 °C a salinitě 3,5 %.

Hustota vody je téměř tisíckrát větší než hustota vzduchu. Kdyby o rychlosti zvuku rozhodovala pouze hustota, dalo by se očekávat, že se ve vodě bude zvuk šířit asi třicetkrát pomaleji než ve vzduchu. Z tabulky ale vyplývá, že je ve vodě zvuk naopak čtyřikrát rychlejší než ve vzduchu. Proto by měl být modul pružnosti vody více než desetitisíckrát větší než u vzduchu. Tak tomu skutečně je, protože voda je v porovnání se vzduchem mnohem hůř stlačitelná.

Rovinná vlna

Později zvolíme pro teorii vhodnější popis zvukové vlny. Pro tyto elementární úvahy mějme jako $s(x,t)$ okamžitou výchylku malého elementu prostředí z rovnovážné polohy (rozměr [s]=m)

$$s = s_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - f\,t\right)\right] = s_m \sin[k\,x - \omega t]$$

Protože

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad , \quad k = \frac{\omega}{c}$$

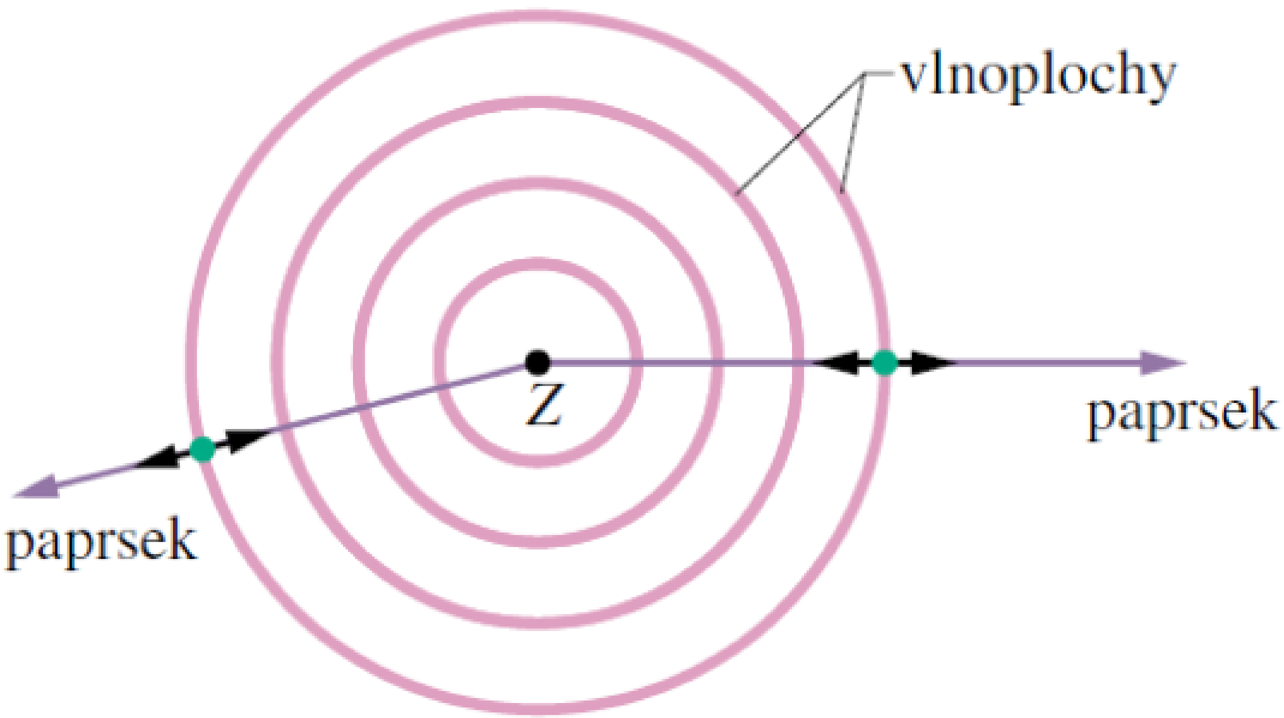
můžeme také psát

$$s = s_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - c\,t)\right] = s_m \sin\left[\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right]$$

Kulová vlna

Popis

$$s = s_m \frac{r_0}{r} \sin\left[2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - f\,t\right)\right]$$



Energie zvukové vlny

Kmitající element prostředí (objemu $\Delta V = S\Delta x$) má energii jak kinetickou, tak potenciální. V okamžiku, kdy je rychlost kmitání elementu prostředí maximální (to není rychlost zvukové vlny!) je celá energie obsažena v kinetické části. Je tedy

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \cos[kx - \omega t] \quad \Rightarrow \quad v_m = \omega s_m$$

a dále

$$\Delta E = \frac{1}{2} \underbrace{\rho S \Delta x}_{\Delta m} \underbrace{(\omega s_m)^2}_{v_m^2}$$

Výkon zvukové vlny pak bude ($\Delta x = c\Delta t$) – tady už přirozeně c je rychlost zvuku

$$W = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 s_m^2 S$$

Intenzita zvukové vlny

Intenzita je energie zvukové vlny, která projde jednotkovou plochou za jednotku času

$$I = \frac{W}{S} = \frac{\Delta E}{S\,\Delta t} \quad , \quad [I] = \mathrm{W\,m^{-2}}$$

neboli

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\rho\, c\, \omega^2\, s_m^2}$$

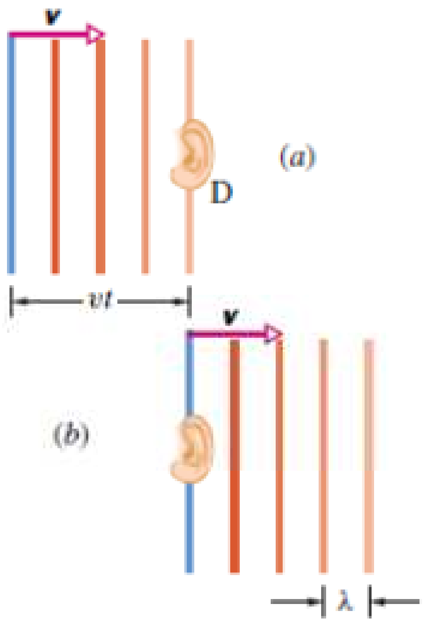
Hladina intenzity zvuku

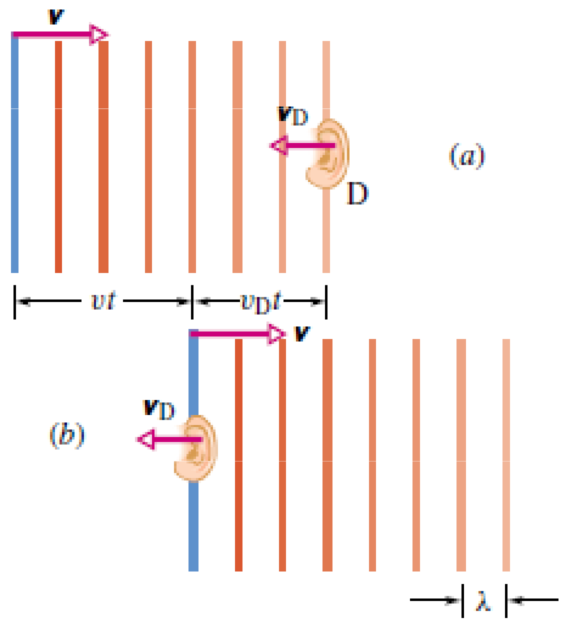
$$\beta = (10\,\mathrm{dB})\log\frac{I}{I_0} \quad , \quad I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

V amplitudách, kdy $I^{1/2}=s_\mathrm{m}$ a $\log(a^n)=n\log(a)$

$$\beta = (10\,\mathrm{dB})\log\left(\frac{I^{1/2}}{I_0^{1/2}}\right)^2 = (20\,\mathrm{dB})\log\frac{s_m}{s_{m0}}$$

Pohyb detektoru ke zdroji





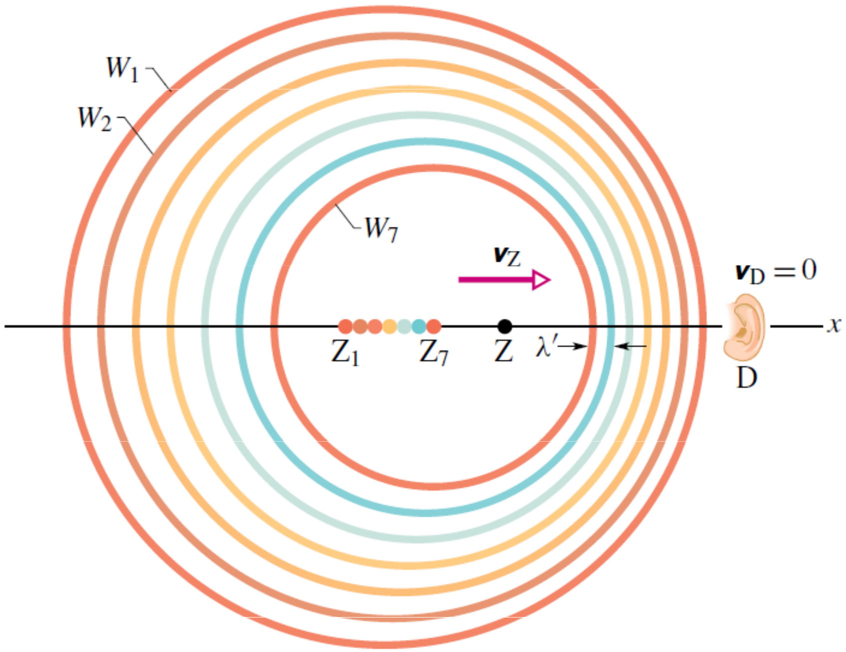
Zdroj i detektor v klidu

Zdroj v klidu, detektor se pohybuje ke zdroji

$$f' = \frac{\frac{c' t}{\lambda}}{t} = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c + v_D}{\frac{c}{f}} = f\,\frac{c + v_D}{c}$$

Počítáme takto: dráha $c' t$, o kterou se za dobu t posunuly vlnoplochy dělena vlnovou délkou λ je rovna počtu vlnových délek. Tento počet vydělíme dobou t a dostáváme frekvenci f.

Pohyb zdroje k detektoru



Detektor je v klidu, zdroj se přibližuje k detektoru. Vlnoplochy vycházejí ze zdroje v intervalu $T=1/f$, takže jejich vzdálenost je vlnová délka λ. Detektor ovšem zaznamená vzhledem k pohybu zdroje (vlnoplochy nejsou vysílány ze stejného bodu) vzdálenost vlnoploch λ'.

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{cT - v_Z T} = \frac{c}{\frac{c}{f} - \frac{v_Z}{f}} = f\frac{c}{c - v_Z}$$

Dopplerův jev

Zdroj je v klidu, detektor se pohybuje ke zdroji

$$f^{/} = f\,\frac{c + v_D}{c}$$

Detektor je v klidu, zdroj se pohybuje k detektoru:

$$f^{/} = f\,\frac{c}{c - v_Z}$$

Při sbližování

$$f^{/} > f$$

Zdroj je v klidu, detektor se pohybuje od zdroje

$$f^{/} = f\,\frac{c - v_D}{c}$$

Detektor je v klidu, zdroj se pohybuje od detektoru:

$$f^{/} = f\,\frac{c}{c + v_Z}$$

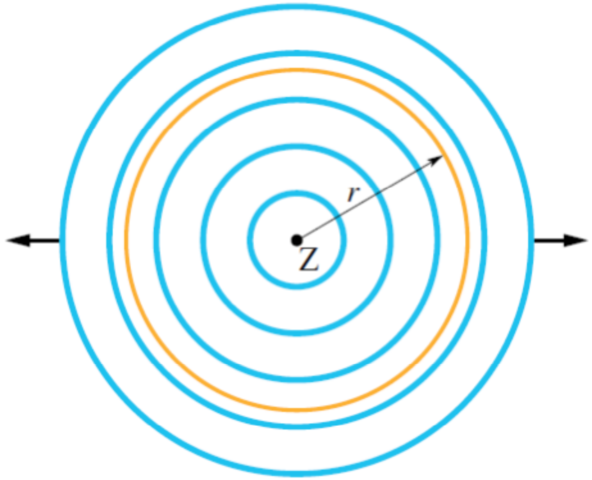
Při vzdalování

$$f^{/} < f$$

Pokles intenzity

Výkon zdroje označme P_Z , intenzita kulové vlny vycházející z počátku

$$I = \frac{P_Z}{4\pi r^2}$$



Máme-li několik (nekoherentních) zdrojů, je intenzita součtem

$$I = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i}{\left| \vec{r} - \vec{r}_i \right|^2}$$

Potřebné vztahy

Polohový vektor v kartézských souřadnicích, funkce souřadnic a její gradient

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad , \quad f = f(x,y,z) \quad , \quad \mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Vektorové pole a jeho divergence

$$\vec{u} = u_x(x,y,z)\vec{i} + u_y(x,y,z)\vec{j} + u_z(x,y,z)\vec{k} \quad ,$$

$$\mathbf{div}\,\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Skalární součin

$$\vec{u} \cdot \mathbf{grad} = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

skalární součin	**dva vektory**	$\rightarrow$	**skalární veličina**
gradient	**funkce**	$\rightarrow$	**vektorová veličina**
divergence	**vektorové pole**	$\rightarrow$	**skalární veličina**

Rychlost zvuku I

Základními rovnicemi jsou rovnice kontinuity a Eulerova rovnice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \mathbf{grad}\right) \vec{v} = -\frac{\mathbf{grad}\, p}{\rho}$$

Pro malé kmity (položíme $\rho=\rho_0+\delta\rho$, $p=p_0+\delta p$) ponecháme v rovnicích jen členy prvního řádu v $\delta\rho$, δp a v, takže máme

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0\, \mathbf{div} \vec{v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\mathbf{grad}\, \delta p}{\rho_0} = 0$$

Stejně jako každý pohyb v ideální tekutině je i šíření zvuku děj adiabatický. Proto můžeme psát

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_S \delta\rho$$

Rychlost zvuku II

Máme teď z rovnice kontinuity (v dalším už budeme vynechávat index 0)

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \mathrm{div}\vec{v} = 0$$

Zapíšeme ještě vektor rychlosti jako gradient nějaké potenciálové funkce φ

$$\vec{v} = \mathrm{grad}\varphi$$

a linearizovaná Eulerova rovnice je pak

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Máme pak již vlnovou rovnici s výrazem pro rychlost zvuku

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0} \qquad \boxed{c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}}$$

Rychlost zvuku a rychlost kmitání

V jednorozměrném případě je jedním z řešení φ=*f*(*x*-*vt*). Potom máme

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f^{/}\left(x - c\,t\right) \quad , \quad \delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho\, c\, f^{/}\left(x - c\,t\right)$$

odkud porovnáním

$$\left.\begin{aligned} \delta p &= \rho\, c\, v \\ \delta p &= c^2\, \delta \rho \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = c \frac{\delta \rho}{\rho}$$

Pro kolísání teploty musíme připomenout termodynamickou identitu

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

takže

$$\delta T = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{T}{c_p} v\, c$$

Ideální plyn

Pro 1 mol ideálního plynu platí stavová rovnice

$$pV = RT \quad , \quad R = N_A k_B$$

R=8,316 $\mathrm{Jmol^{-1}K^{-1}}$ je univerzální plynová konstanta. Při adiabatickém ději můžeme zapsat první větu termodynamickou jako

$$T\,dS = \cancel{d}Q = 0 = dU + p\,dV = C_V\,dT + p\,dV$$

nebo jako

$$T\,dS = \cancel{d}Q = 0 = dH - V\,dp = C_p\,dT - V\,dp$$

kde U je vnitřní energie a $H=U+pV$ entalpie jednoho molu ideálního plynu, C_V a C_p jsou specifická tepla

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_S = \frac{1}{T}\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_\rho \quad , \quad C_p = \left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_S = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_S + R = \frac{1}{T}\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_p$$

Plyn složený z jednoatomových molekul má pouze tři translační stupně volnosti, u dvouatomových přibudou ještě další dva na vzájemné oscilace, tedy $C_V=3R/2$ nebo $C_V=5R/2$.

Rychlost zvuku v ideálním plynu

Stavovou rovnici přepíšeme na

$$p = \frac{RT}{\mu}\rho$$

kde μ je molární hmotnost.nová konstanta. Snadno tedy spočteme derivaci tlaku podle hustoty při konstantní teplotě. Pro výpočet derivace při adiabatickém ději (tj. při konstantní entropii) musíme počítat s jakobiány

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S = \frac{\partial(p,S)}{\partial(\rho,S)} = \frac{\dfrac{\partial(p,S)}{\partial(p,T)}}{\dfrac{\partial(\rho,S)}{\partial(\rho,T)}} \cdot \frac{\partial(p,T)}{\partial(\rho,T)} = \frac{\left.\dfrac{\partial S}{\partial T}\right|_p}{\left.\dfrac{\partial S}{\partial T}\right|_\rho} \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T = \frac{C_p}{C_V}\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T$$

Rychlost zvuku v ideálním plynu je

$$\boxed{c = \left(\frac{c_p}{c_V}\frac{RT}{\mu}\right)^{1/2}}$$