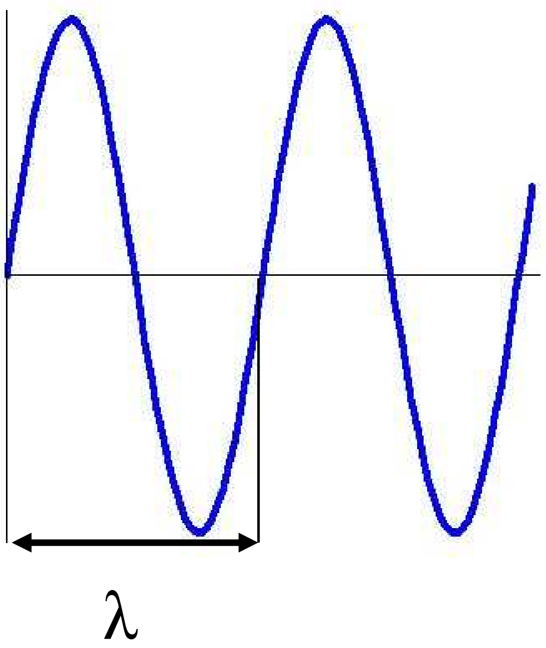
Radiologická fyzika

Ultrazvuk –
vlnové vlastnosti

podzim 2011, devátá přednáška

Ultrazvuk

Ultrazvuk je zvukové vlnění s frekvencí f > 20 kHZ. Pro ultrazvukovou diagnostiku v medicíně se používají frekvence řádu jednotek až desítek MHz.



$$s = \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - f\,t\right)\right]$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

vlastnosti zdroje

vlastnosti prostředí

Základní rovnice

Základními rovnicemi jsou rovnice kontinuity a Eulerova rovnice

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \mathbf{div}\left(\bar{\rho}\vec{v}\right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \mathbf{grad}\right)\vec{v} = -\frac{\mathbf{grad}\,\bar{p}}{\bar{\rho}}$$

Pro malé kmity ponecháme v rovnicích jen členy prvního řádu v malých veličinách δρ, δ*p* a *v*

$$\bar{\rho} = \rho + \delta\rho \quad , \quad \bar{p} = p + \delta p$$

takže dostáváme rovnici kontinuity a Eulerovu rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho\,\mathbf{div}\vec{v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\mathbf{grad}\delta p}{\rho} = 0$$

Stejně jako každý pohyb v ideální tekutině je i šíření zvuku děj adiabatický. Proto můžeme psát

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \delta\rho$$

Rychlost pohybu elementu prostředí

Elementárními úpravami dvou základních rovnic hydrodynamiky dospějeme k výrazu pro rychlost zvuku

$$\boxed{c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}}$$

(čtverec rychlosti zvuku je dán změnou tlaku v daném elementu prostředí se změnou hustoty v tomto elementu, aniž si sousední elementy vyměňují teplo). Zapíšeme-li totiž vektor rychlosti daného elementu jako gradient nějaké potenciálové funkce φ a místní změnu tlaku jako záporně vzatou derivaci podle času této funkce násobenou hustotou, je tato funkce řešením vlnové rovnice (Δ je Laplaceův operátor)

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta\varphi = 0}$$

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi \quad , \quad \delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Potenciálová funkce

Obecný tvar vlnové rovnice pro potenciálovou funkci je

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2\,\Delta\varphi = 0}$$

V kartézských souřadnicích je φ=φ(x,y,z) a gradient a laplacián mají jednoduché vyjádření

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \quad , \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Pokud jde o rozměr potenciálové funkce φ, máme

$$\left[v_x\right] = \mathrm{m\,s^{-1}} = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = \frac{[\varphi]}{[x]} = \mathrm{m^{-1}}[\varphi] \quad \Rightarrow \quad [\varphi] = \mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

nebo také

$$[\delta p] = \mathrm{N\,m^{-2}} = \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}} = \left[-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] = \frac{[\rho][\varphi]}{[t]} = \mathrm{kg\,m^{-3}\,s^{-1}}[\varphi] \quad \Rightarrow \quad [\varphi] = \mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

Rovinná vlna

Vlnová rovnice pro potenciálovou funkci, která závisí jen na čase a jedné kartézské souřadnici (třeba x) je

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Přímým derivováním se přesvědčíme, že řešením jsou libovolné funkce tvaru

$$\varphi(x,t) = F(x - c\,t) + G(x + c\,t)$$

Nejjednodušším příkladem je rovinná monochromatická vlna postupující v kladném směru osy x

$$\varphi(x,t) = \varphi_m \cos\left[2\pi f \cdot \left(\frac{x}{c} - t\right) + \alpha\right] = \varphi_m \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x - c\,t) + \alpha\right]$$

kde konstanta φ_m je amplituda a konstanta α značí fázi při $x = c.t$. Frekvence a vlnová délka spolu souvisí vztahem

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad , \quad 2\pi f = \omega = c\frac{2\pi}{\lambda} = c\,k$$

Kulová vlna

Vlnová rovnice pro potenciálovou funkci, která závisí jen na čase a radiální sférické souřadnici (značíme ji r) je

$$\frac{\partial^2 \varphi(r,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial r} \right) = 0$$

Přímým derivováním se přesvědčíme, že řešením jsou libovolné funkce tvaru

$$\varphi(r,t) = \frac{F(r-ct)}{r} + \frac{G(r+ct)}{r}$$

Nejjednodušším příkladem je kulová monochromatická vlna šířící se z počátku r=0

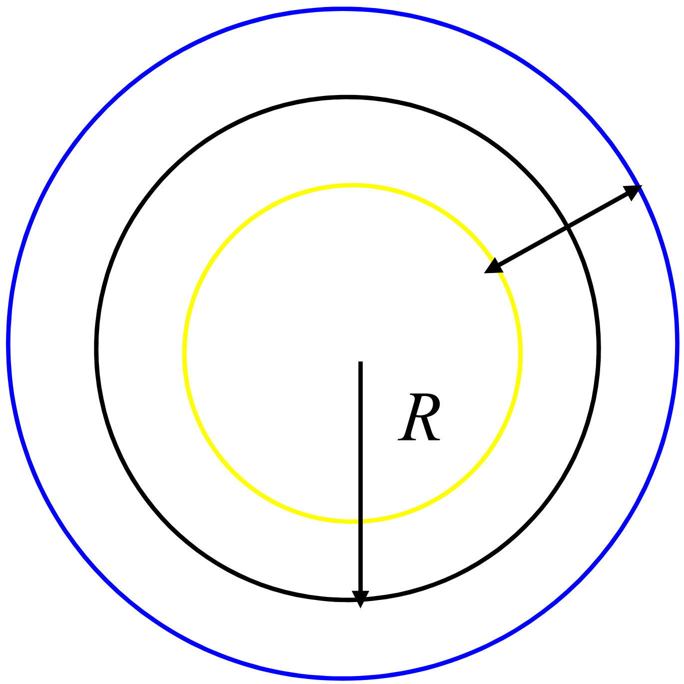
$$\varphi(r,t) = \frac{\varphi_m}{r}\cos\left[2\pi f \cdot \left(\frac{r}{c} - t \right) + \alpha \right] = \frac{\varphi_m}{r}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (r - ct) + \alpha \right]$$

kde konstanta φ_m je amplituda a konstanta α značí fázi při x=$c.t$. Frekvence a vlnová délka spolu souvisí vztahem

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad , \quad 2\pi f = \omega = c\frac{2\pi}{\lambda} = ck$$

Kmitající koule jako zdroj

Mějme kouli poloměru R vykonávající malé pulsace, tj. body na povrchu koule radiálně kmitají rychlostí $u(t)$



$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = u(t)$$

Obecná kulová vlna

Mějme kouli poloměru R vykonávající malé pulsace, tj. body na povrchu koule radiálně kmitají rychlostí $u(t)$. Řešení úlohy (tedy řešení vlnové rovnice) hledáme ve tvaru

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{r}f\left(t-\frac{r-R}{c}\right)$$

Na povrchu musí být rychlosti pohybu elementu budící koule i elementu okolního prostředí stejné

$$u(t)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R}=-\left[\frac{1}{Rc}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{f}{R^2}\right]$$

takže řešením je

$$\varphi(r,t)=-c\frac{R}{r}e^{-\frac{ct'}{R}}\int_{-\infty}^{t'}u(\tau)e^{\frac{c\tau}{R}}d\tau \quad , \quad t'=t-\frac{r-R}{c}$$

Harmonická kulová vlna

Předpokládejme teď, že $u(t)=v_m.\sin(\omega t)$. Potom je výraz pro potenciálovou funkci v obecném bodě tvořen relativně jednoduchým vztahem

$$\boxed{\varphi(r,t)=\frac{\varphi_m}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r-R}{c}\right)+\alpha\right]}$$

$$\varphi_m=\frac{c\,v_m\,R^2}{\left(\omega^2 R^2+c^2\right)^{1/2}} \quad , \quad \alpha=\mathrm{arctg}\frac{c}{R\,\omega}$$

Při ultrazvukové diagnostice máme vždy $\omega R>>c$ (jinak zapsáno $R>>\lambda$), takže se vztah pro potenciálovou funkci zjednoduší na

$$\boxed{\varphi(r,t)=\frac{1}{r}\frac{c\,R\,v_m}{\omega}\cos\omega\left(t-\frac{r-R}{c}\right)}$$

Časová střední hodnota

Z různých důvodů není zajímavá a mnohdy ani dobře měřitelná okamžitá hodnota fyzikální veličiny $F(t)$, ale její střední hodnota za dobu T , tj.

$$\langle F \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T F(t)\,dt$$

Tato doba bývá někdy velmi dlouhá (čekáme, až se nějaký jev ustálí a nezajímá nás přechodový jev). Pro veličinu s periodou $\omega=2\pi f$ je touto dobou přirozeně perioda $T=1/f$

$$\boxed{F\left(t+\frac{1}{f}\right) = F(t) \quad , \quad \langle F \rangle = f \int_0^{1/f} F(t)\,dt}$$

Zejména

$$\langle \sin(2\pi f t) \rangle = f \int_0^{1/f} \sin(2\pi f t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

$$\left\langle \left[\sin(2\pi f t)\right]^2 \right\rangle = f \int_0^{1/f} \left[\sin(2\pi f t)\right]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin x)^2\,dx = \frac{1}{2}$$

Intenzita harmonické kulové vlny

Pro rychlost pohybu elementu prostředí máme

$$\boxed{v(r,t) = v_m \frac{R}{r} \sin\omega\left(t - \frac{r-R}{c}\right)}$$

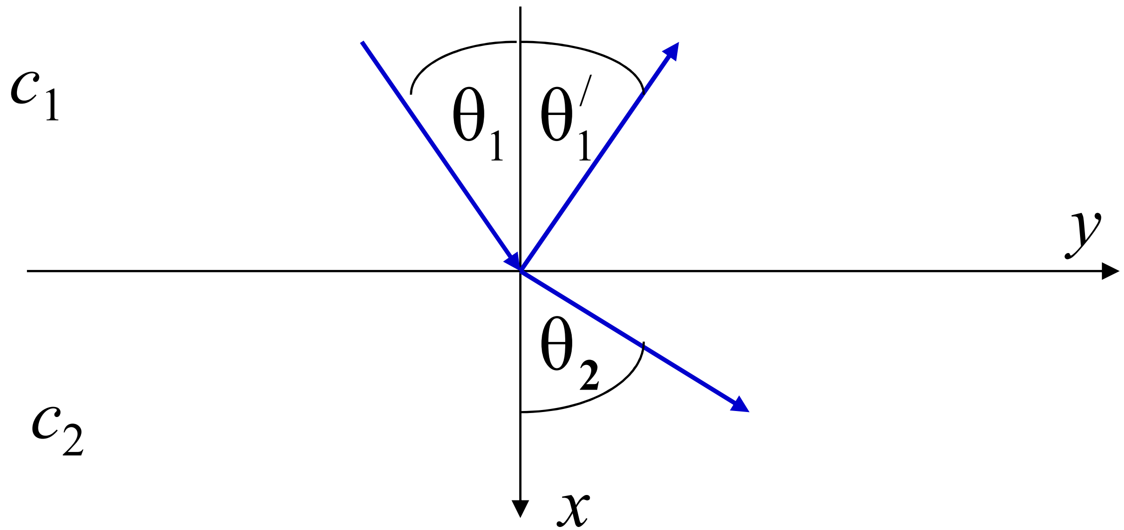
a pro místní změnu tlaku

$$\boxed{\delta p(r,t) = \rho v_m \frac{Rc}{r} \sin\omega\left(t - \frac{r-R}{c}\right)}$$

Pro intenzitu zvukové vlny (tok energie jednotkovou ploškou za jednotku času) dostáváme ve střední hodnotě

$$\boxed{I(r) = \left\langle v(r,t)\,\delta p(r,t)\right\rangle = \frac{1}{2}\rho c v_m^2 \frac{R^2}{r^2}}$$

Odraz a lom na rozhraní



Pro dopadající, odraženou a prošlou vlnu máme

$$\varphi_1 = s_1 \sin\left[\omega\left(\frac{x\cos\theta_1}{c_1}+\frac{y\sin\theta_1}{c_1}-t\right)\right]$$

$$\varphi_1' = s_1' \sin\left[\omega\left(-\frac{x\cos\theta_1'}{c_1}+\frac{y\sin\theta_1'}{c_1}-t\right)\right]$$

$$\varphi_2 = s_2 \sin\left[\omega\left(\frac{x\cos\theta_2}{c_2}+\frac{y\sin\theta_2}{c_2}-t\right)\right]$$

Podmínky spojitosti

Na rozhraní (x=0) musí být u všech vln stejná závislost na souřadnici y (vlastnosti prostředí se v tomto směru nemění), což vede k tomu, že úhel odrazu je roven úhlu dopadu a poměr sinů úhlů dopadu a lomu (úhel se měří od kolmice k rozhraní) je roven poměru rychlostí

$$\theta_1' = \theta_1 \quad , \quad \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Dále se musí rovnat tlak a kolmá složka rychlosti na obou stranách rozhraní

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad , \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

odkud

$$\rho_1 \left(s_1 + s_1' \right) = \rho_2 \, s_2 \quad , \quad \frac{\cos\theta_1}{c_1} \left(s_1 - s_1' \right) = \frac{\cos\theta_2}{c_2} s_2$$

Intenzita odražené a lomené vlny

Řešení rovnic popisujících podmínky na rozhraní dává

$$s_1^{/} = \frac{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 - \rho_1 c_1 \cos\theta_2}{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 + \rho_1 c_1 \cos\theta_2} s_1 \quad , \quad s_2 = \frac{2\rho_1 c_2 \cos\theta_1}{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 + \rho_1 c_1 \cos\theta_2} s_1$$

Energie dopadající na jednotkovou plošku rozhraní resp. energie odražená jednotkovou ploškou nebo propuštěná jednotkovou ploškou je

$$E_1 = \rho_1 c_1 \left\langle v_1^2 \right\rangle \cos\theta_1 \quad , \quad E_1^{/} = \rho_1 c_1 \left\langle v_1^{/2} \right\rangle \cos\theta_1 \quad , \quad E_2 = \rho_2 c_2 \left\langle v_2^2 \right\rangle \cos\theta_2$$

Koeficienty propustnosti a odrazivosti jsou definovány jako

$$R = \frac{E_1^{/}}{E_1} \quad , \quad T = \frac{E_2}{E_1} \quad , \quad R + T = 1$$

Akustická impedance je definována jako součin hustoty prostředí a rychlosti zvuku v tomto prostředí

$$\boxed{Z = \rho c}$$

Pro kolmý dopad na rozhraní dvou prostředí

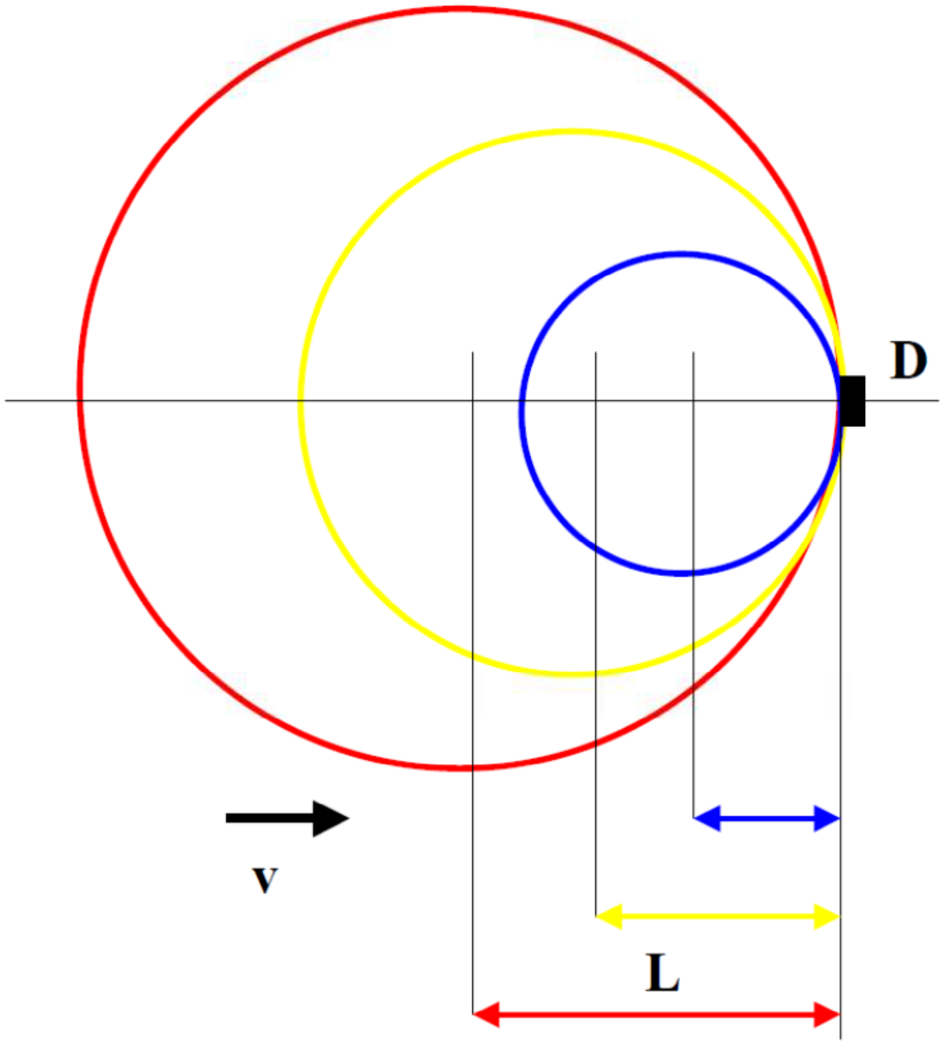
$$R = \frac{\left(Z_2 - Z_1\right)^2}{\left(Z_2 + Z_1\right)^2} \quad , \quad T = \frac{4 Z_1 Z_2}{\left(Z_2 + Z_1\right)^2}$$

Akustická impedance

Jednotkou akustické impedance je rayleigh: 1 Rayl = 1 kg m^{-2} s^{-1} .Tabulka uvádí potřebné hodnoty pro některá prostředí.

prostředí	$10^3 \rho$ [kg m^{-3}]	c [m s^{-1}]	Z [Rayl]
vzduch	0,0012	330	0,0004
voda	1	1430	1,43
měkká tkáň	1,1	1540	1,69
játra	1,05	1570	1,65
tuk	0,95	1450	1,38
kost	1,91	4080	7,8

Dopplerův jev I



Do detektoru přicházejí vlny v časech

$$t_1 = \frac{L}{c} \quad , \quad t_2 = \frac{1}{f} + \frac{L - v\dfrac{1}{f}}{c}$$

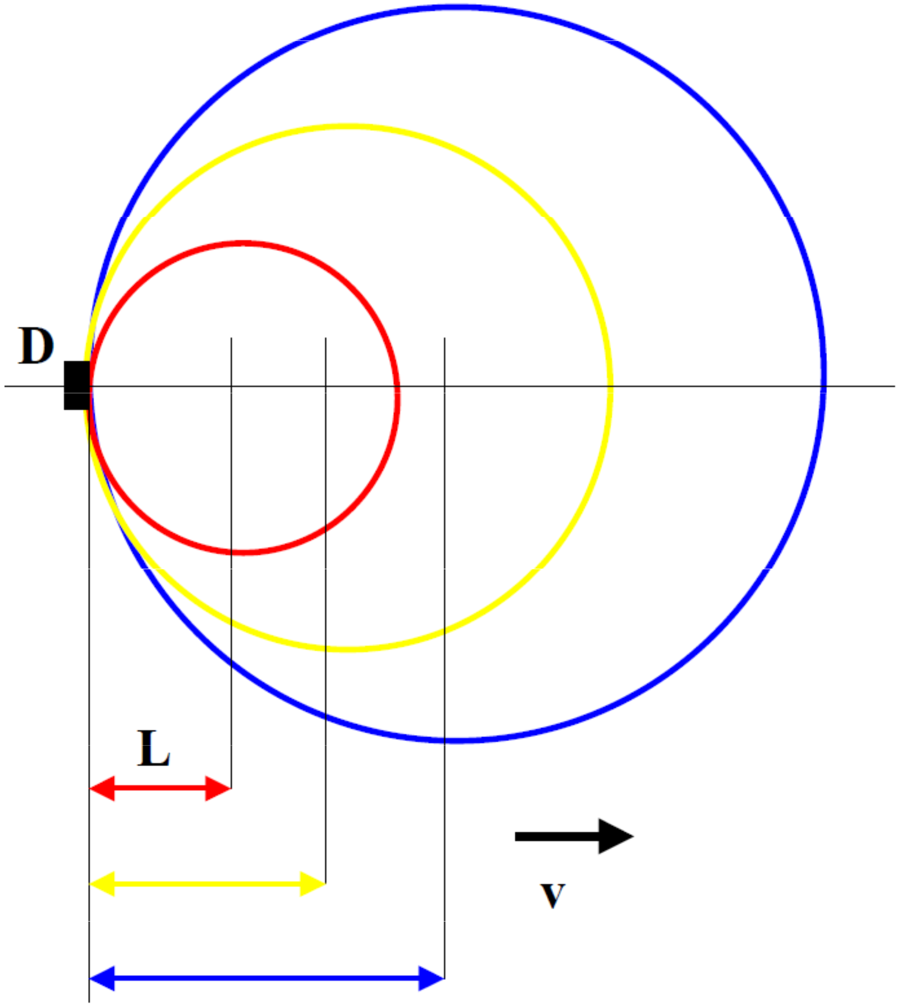
$$t_3 = \frac{2}{f} + \frac{L - v\dfrac{2}{f}}{c} \quad , \quad \ldots$$

Frekvence je tedy

$$\frac{1}{f'} = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \ldots = \frac{1}{f} - \frac{v}{f\,c}$$

$$\boxed{f' = f\frac{c}{c - v} > f}$$

Dopplerův jev II



Do detektoru přicházejí vlny v časech

$$t_1 = \frac{L}{c} \quad , \quad t_2 = \frac{1}{f} + \frac{L + v\frac{1}{f}}{c}$$

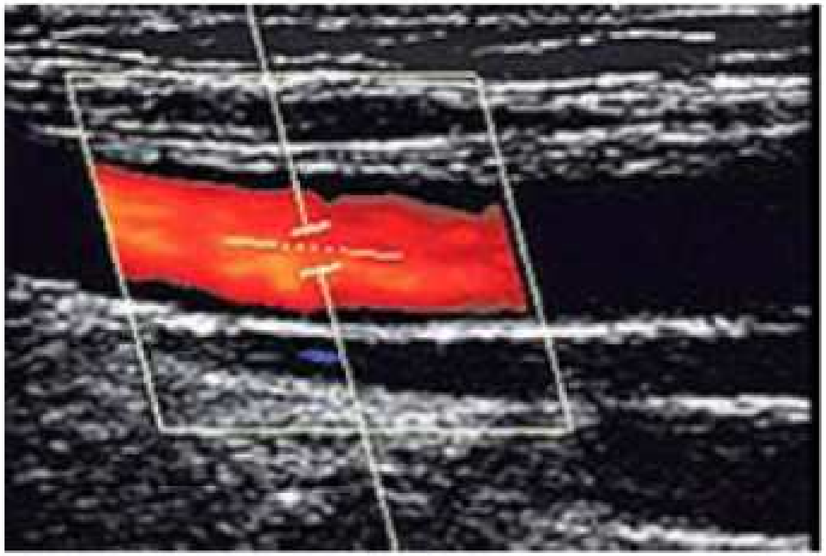
$$t_3 = \frac{2}{f} + \frac{L + v\frac{2}{f}}{c} \quad , \quad \dots$$

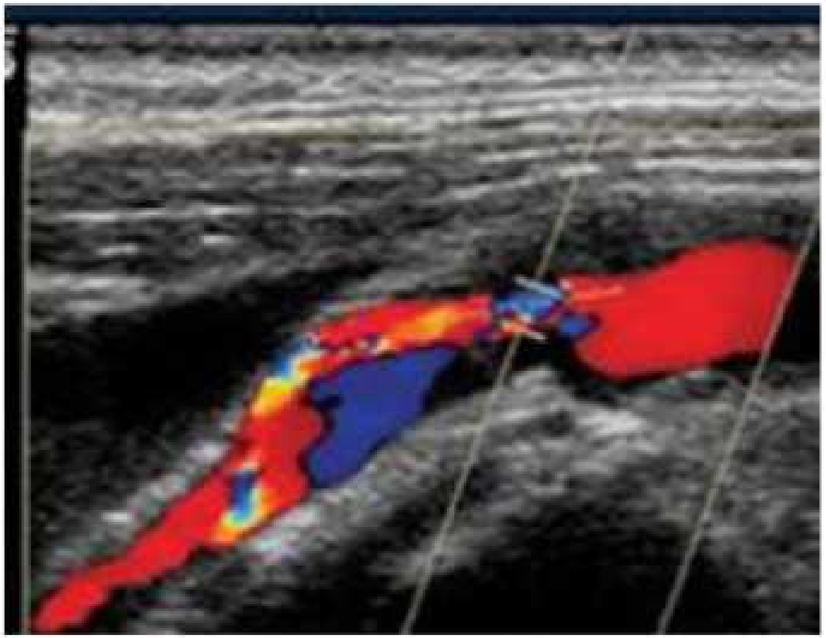
Frekvence je tedy

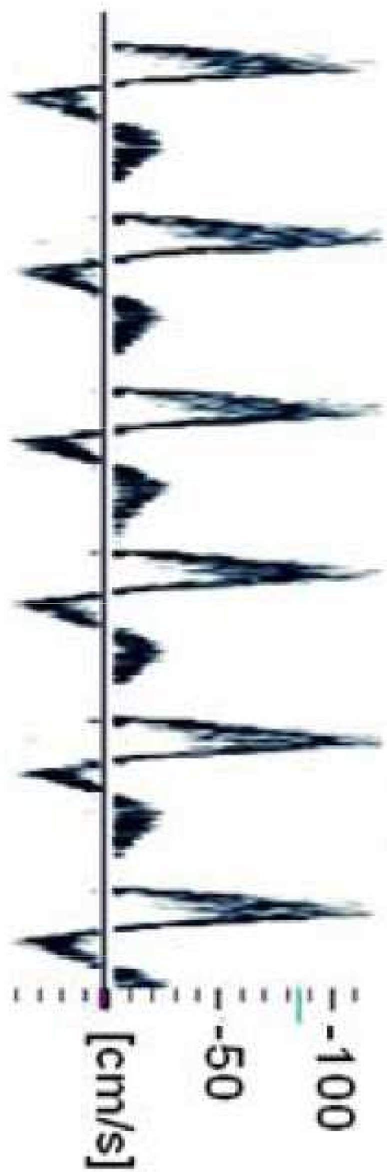
$$\frac{1}{f'} = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = \frac{1}{f} + \frac{v}{f\,c}$$

$$\boxed{f' = f\frac{c}{c+v} < f}$$

Dopplerův jev III







Absorpce

Ultrazvukové vlnění je při šíření prostředím částečně absorbováno. Jako u jiných druhů vlnění, můžeme pro pokles intenzity psát exponenciální zákon – pokles intenzity je úměrný dráze, kterou paprsek vlnění prochází

$$dI(x) = -\mu\, dx \quad \Rightarrow \quad I(x) = I(0)\, e^{-\mu x}$$

U zvuku je obvyklé charakterizovat útlum nikoliv lineárním koeficientem útlumu s rozměrem [m^{-1}], ale koeficientem s rozměrem [dB.m^{-1}]. Logaritmováním zákona absorpce dostáváme

$$10 \cdot \log_{10} \frac{I(x)}{I(0)} = -10\,\mu x \log_{10} e = -\frac{10}{\ln 10}\mu x$$

takže

$$\mu\left[\mathrm{dB\,m^{-1}}\right] = -\frac{10}{x[\mathrm{m}]} \cdot \log_{10} \frac{I(x)}{I(0)} = -\frac{10}{\ln 10}\mu\left[\mathrm{m^{-1}}\right]$$

Koeficient útlumu

prostředí	μ [dB cm^{-1}] pro f=1 Mhz
vzduch	1,61
voda	0,0025
měkká tkáň	0,5 – 1,0
játra	1,1
tuk	0,6
kost	10,0

Zápis vln pomocí komplexních čísel

Tento zápis přináší velké zjednodušení, Platí totiž

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad , \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x}$$

Můžeme si ověřit například triviální příklad

$$1 = e^{0} = e^{ix}e^{-ix} = (\cos x + i\sin x)(\cos x - i\sin x) = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 + i\,0 = 1$$

Pro zjednodušení zápisu vln je důležité, že nedochází při derivování (a integrování) k „přecházení“ od sinu ke kosinu

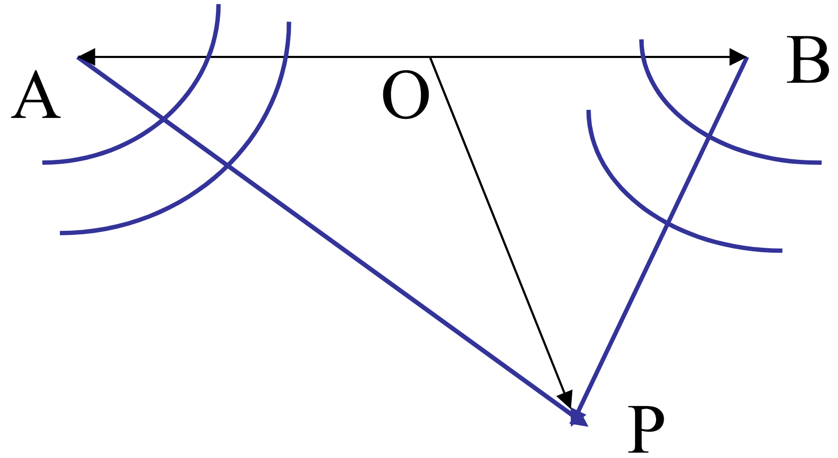
$$\boxed{\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \quad , \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \quad , \quad \frac{de^{ix}}{dx} = i\,e^{ix}}$$

Monochromatickou kulovou vlnu s frekvencí ω, která vychází z bodu $\vec{r}_0$ zapisujeme jako

$$\boxed{\varphi(\vec{r},t) = \frac{a}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\exp\left[i\,k\,|\vec{r}-\vec{r}_0| - \omega t\right]}$$

Skládání vln – geometrie

Dva zdroje v různých bodech kmitající ve fázi



$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \vec{r}_B \quad , \quad \overrightarrow{OP} = \vec{r} \quad , \quad AP = \left|\vec{r} - \vec{r}_A\right| \quad , \quad BP = \left|\vec{r} - \vec{r}_B\right|$$

Vhodnou volbou souřadnicového systému (body A a B leží na ose x, počátek půlí jejich vzdálenost) můžeme psát

$$\left|\vec{r} - \vec{r}_A\right| = \left[\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2} \quad , \quad \left|\vec{r} - \vec{r}_B\right| = \left[\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}$$

Skládání vln – aproximace

Pole φ v bodě P je součtem polí φ_A a φ_B

$$\varphi(\vec{r}) = a\left\{\frac{\exp\left[i\,k\left|\vec{r}-\vec{r}_A\right|\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_A\right|}+\frac{\exp\left[i\,k\left|\vec{r}-\vec{r}_B\right|\right]}{\left|\vec{r}-\vec{r}_B\right|}\right\}\exp\left[-i\,\omega t\right]$$

Závislost na d v čitateli zanedbáme, jde o pomalou změnu amplitudy, takže

$$\left|\vec{r}-\vec{r}_A\right| \approx \left|\vec{r}-\vec{r}_B\right| \approx r$$

Totéž zanedbání nemůžeme ale provést v exponentu, protože

$$\psi_A = k\left[\left|\vec{r}-\vec{r}_A\right|-r\right] \quad , \quad \psi_B = k\left[\left|\vec{r}-\vec{r}_B\right|-r\right]$$

jako součin velkého (k=2π/λ) a malého čísla nemusí být malé (ve srovnání s π, kdy při změně o tuto hodnotu se obrátí znaménko celého výrazu pro vlnu). Máme tedy

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{a\exp\left[i\,k\,r\right]}{r}\left\{\exp\left[i\psi_A\right]+\exp\left[i\psi_B\right]\right\}\exp\left[-i\,\omega t\right]$$

Skládání vln – rovinný problém

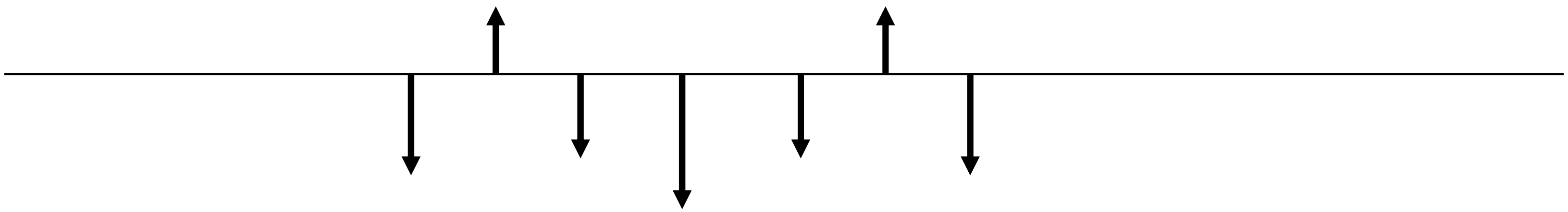
Pole φ je součtem polí od 2.n+1 zdrojů vzájemně fázově posunutých a v poloze (x=$n.d$,z=0)

$$\varphi(x,z) \propto \sum_{k=-n}^{n} e^{i\left[\Phi_k(x,z)-\Phi_k(X,z)\right]}$$

Fáze je

$$\Phi_k(x,z)=\frac{2\pi}{\lambda}\left[(x-k\,d)^2+z^2\right]^{1/2}$$

Pro x=X dostáváme maximum součtu, takže volbou fázového posunutí jednotlivých zdrojů posouváme toto maximum.



Skládání vln – rovinný problém

Celkem 21 zdrojů s d=2, λ=2 a L=100 pro X=0, 2 a 4 (všechno v mm).