

# Radiologická fyzika

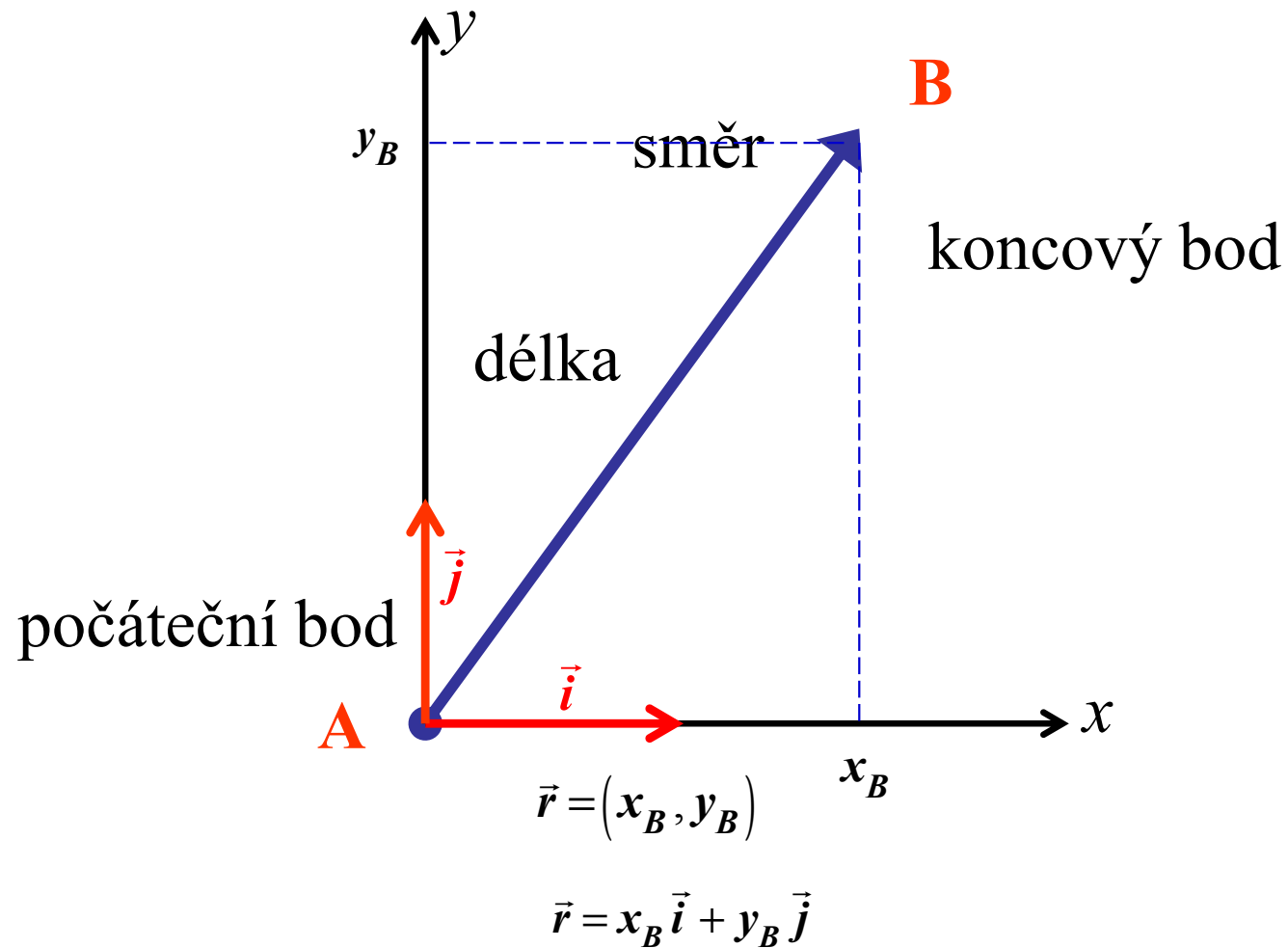
Jaderná magnetická rezonance

29. října 2012

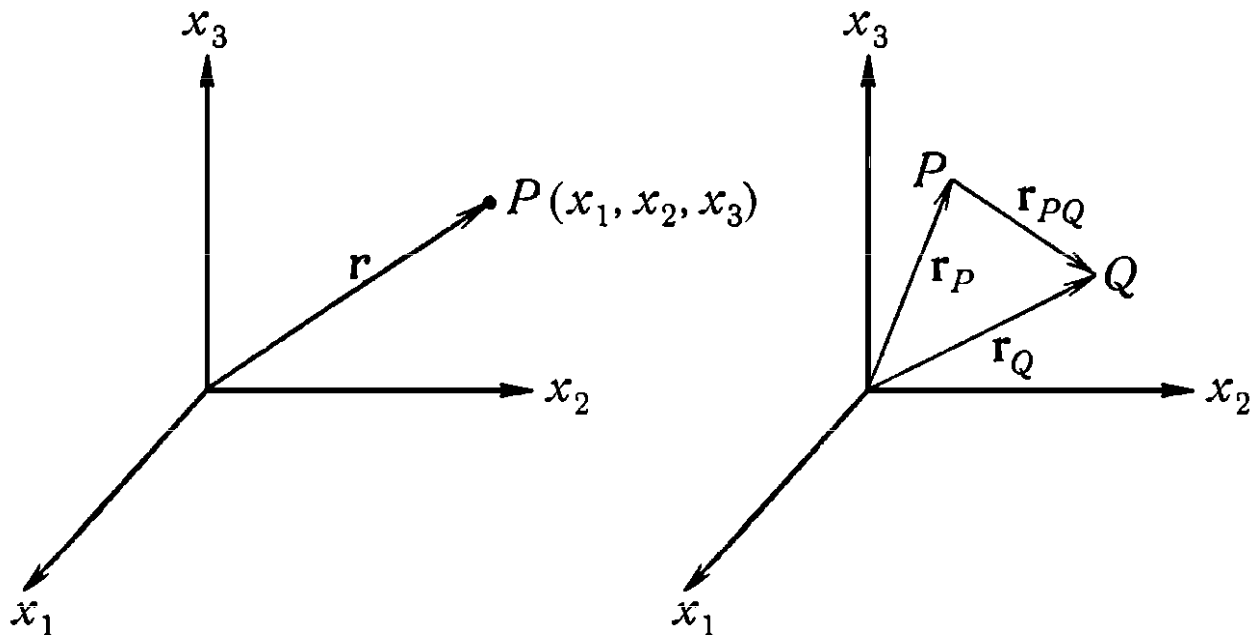
# NMR nebo MRI?

Základním fyzikálním procesem je jaderná magnetická rezonance (nuclear magnetic resonance – NMR). Protože řada lidí má obavy ze slov jádro, jaderný, jaderná, používá se v lékařských aplikacích názvu zobrazení magnetickou rezonancí (magnetic resonance imaging - MRI). Nakonec je to i přesnější – rozdíl v intenzitě určitého fyzikálního jevu se používá k získání kontrastu ve výsledném obraze.

# Nutná připomínka – počítání s vektory



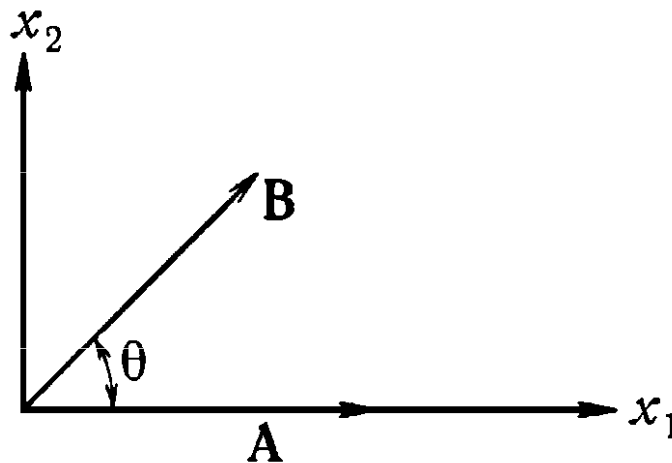
# Počítání s vektory – sečítání



$$\vec{r}_P = (x_P, y_P, z_P) \quad , \quad \vec{r}_Q = (x_Q, y_Q, z_Q) \quad , \quad \vec{r}_P + \vec{r}_{PQ} = \vec{r}_Q$$

$$\vec{r}_{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P)$$

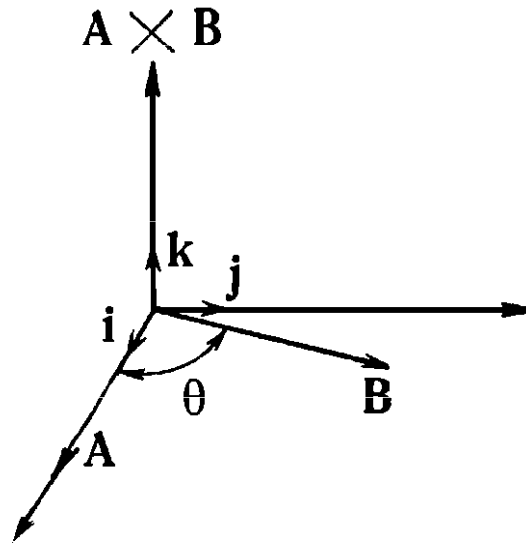
# Počítání s vektory – skalární součin



$$\vec{A} = (A_1 = A, A_2 = 0, A_3 = 0) \quad , \quad \vec{B} = (B_1 = B \cos \theta, B_2 = B \sin \theta, B_3 = 0)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad , \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos \theta$$

# Počítání s vektory – vektorový součin



$$\vec{A} = (A_1 = A, A_2 = 0, A_3 = 0) \quad , \quad \vec{B} = (B_1 = B \cos \theta, B_2 = B \sin \theta, B_3 = 0)$$

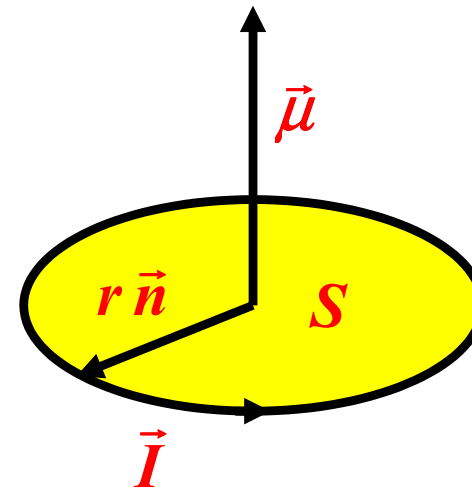
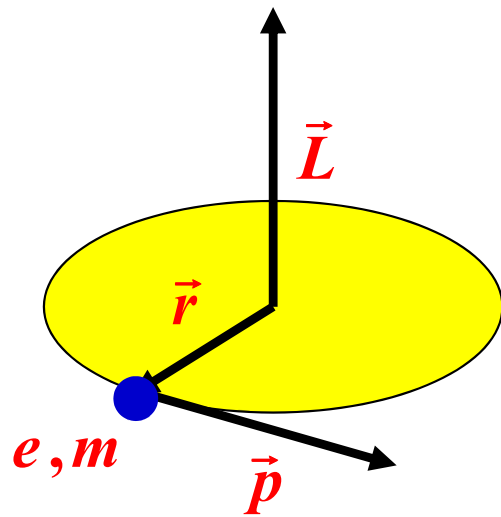
$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (0, 0, A B \sin \theta)$$

# Orbitální a magnetický moment

Částice o hmotnosti  $m$  a s nábojem  $e$  na kruhové trajektorii poloměru  $r$  má **moment hybnosti**

Proudová smyčka poloměru  $r$  s proudem velikosti  $I$  má **magnetický moment**



$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{L}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

$$L = m r v$$

$$\vec{\mu} = S \vec{n} \times \vec{I} = \pi r^2 \frac{e}{2\pi r} \vec{n} \times \vec{v}$$

$$\mu = \frac{1}{2} e r v$$

$$[\mu] = \text{Am}^2 = \text{JT}^{-1}$$

# Larmorova precese I

Podle druhé impulsové věty je časová změna momentu hybnosti rovna momentu působící síly. V případě magnetického momentu v homogenním magnetickém poli ve směru osy z

$$\vec{B} = B \vec{e}_z \quad , \quad |\vec{e}_z|^2 = 1$$

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \vec{\mu}(t) \times \vec{B} = \frac{eB}{2m} \vec{L}(t) \times \vec{e}_z = \omega_L \vec{L}(t) \times \vec{e}_z$$

Larmorovu frekvenci jsme označili jako  $\omega_L$ . Vektor momentu hybnosti rozložíme do složky rovnoběžné s vektorem indukce magnetického pole a složek kolmých

$$\vec{L}(t) = L_z(t) \vec{e}_z + L_x(t) \vec{e}_x + L_y(t) \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y \quad , \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \quad , \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \mathbf{0}$$



## Larmorova precese II

Rozeepsáním do složek dostáváme tři rovnice

$$\frac{dL_x(t)}{dt} = \omega_L L_y(t), \quad \frac{dL_y(t)}{dt} = -\omega_L L_x(t), \quad \frac{dL_z(t)}{dt} = 0$$

Podle třetí z rovnic je složka vektoru momentu hybnosti  $L_z$  rovnoběžná s magnetickým polem konstantní. Také velikost vektoru momentu hybnosti  $L$  je konstantní – to vidíme hned, vynásobíme-li první rovnici  $L_x$ , druhou  $L_y$ , třetí  $L_z$  a vzniklé rovnice sečteme

$$L_x \frac{dL_x}{dt} + L_y \frac{dL_y}{dt} + L_z \frac{dL_z(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) =$$

$$\frac{1}{2} \frac{dL^2}{dt} = L \frac{dL}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = 0$$

# Larmorova precese III

U prvních dvou rovnic si vzpomeneme na vztahy pro goniometrické funkce

$$\frac{d\sin(\omega t + \varphi)}{dt} = \omega \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad \frac{d\cos(\omega t + \varphi)}{dt} = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

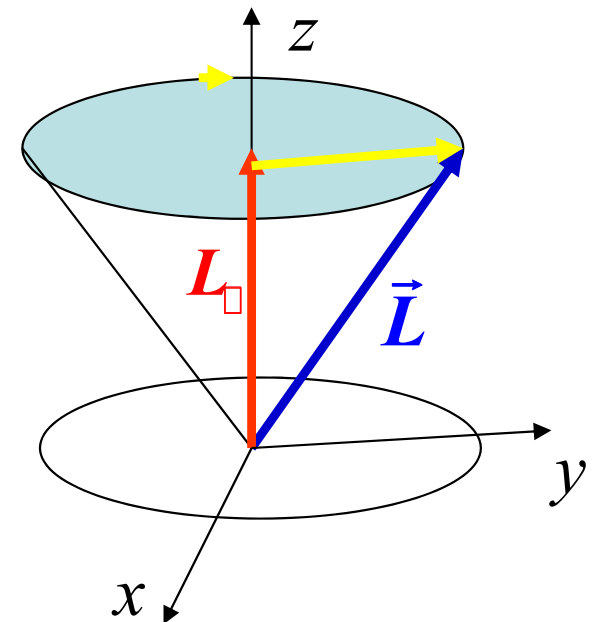
Výsledné vztahy pro složky momentu hybnosti jsou tedy

$$L_x = [L^2 - L_z^2]^{1/2} \sin(\omega_L t + \varphi)$$

$$L_y = [L^2 - L_z^2]^{1/2} \cos(\omega_L t + \varphi)$$

$$L_z = L_z$$

Vektor momentu hybnosti vykonává precesní pohyb s Larmorovou frekvencí – tvoří površky kužele s osou danou magnetickým polem.

















# Spin jádra

Jádro je složeno z nukleonů (protonů a neutronů). Každý nukleon má vlastní moment hybnosti – **vektor spinu**. Velikosti vektoru spinu měřené v jednotkách Planckovy konstanty  $\hbar$  říkáme **spin** a pro nukleony je

$$I = \frac{|\vec{I}|}{\hbar} = \frac{1}{2}$$

Spiny nukleonů se vektorově sčítají, takže se při počtu protonů 2, 8, 20, 28, 50, 82 a 126 spiny vyruší, totéž platí pro neutrony. Je to podobné existenci uzavřených slupek u elektronů v atomu. Pro jádra izotopů nejlehčích prvků je předpověď spinu jádra snadná.

# Spin jader s malým počtem nukleonů

${}^1_0\text{n}$			$I = \frac{1}{2}$
${}^1_1\text{H}$			$I = \frac{1}{2}$
${}^2_1\text{H}$			$I = 1$
${}^3_1\text{H}$		 	$I = \frac{1}{2}$
${}^3_2\text{He}$	 		$I = \frac{1}{2}$
${}^4_2\text{He}$	 	 	$I = 0$

## Spiny a výskyt jader pro MRI

Prvek	Symbol	Spin I	Výskyt [%]
vodík	$^1\text{H}$	1/2	99,985
	$^2\text{H}$	1	0,015
uhlík	$^{13}\text{C}$	1/2	1,11
	$^{14}\text{C}$	0	98,89
dusík	$^{14}\text{N}$	1	99,63
	$^{15}\text{N}$	1/2	0,37
sodík	$^{23}\text{Na}$	3/2	100
fosfor	$^{31}\text{P}$	1/2	100
draslík	$^{39}\text{K}$	3/2	93,1

# Jaderný magnetický moment

Jaderný magnetický moment  $M$  je podobně spojen se spinem  $I$ , jako byl magnetický moment  $\mu$  spojen s orbitálním  $L$ . Rozdíl je jen v konstantě úměrnosti

$$\vec{M} = \gamma \vec{I}$$

Gyromagnetický faktor  $\gamma$  má rozměr

$$[\gamma] = \frac{[M]}{[I]} = \frac{\text{J T}^{-1}}{\text{J s}} = \text{s}^{-1} \text{ T}^{-1}$$

Gyromagnetický faktor protonu a neutronu je

$$\frac{\gamma_p}{2\pi} = 42,576\,3881(12) \text{ MHz T}^{-1}$$

$$\frac{\gamma_n}{2\pi} = -29,164\,6954(69) \text{ MHz T}^{-1}$$

# Kvantování jaderného magnetického momentu

Protože je spin kvantován, je kvantován i jaderný magnetický moment. Pravidla kvantové mechaniky dovolují, aby velikost magnetického momentu byla

$$M = \gamma [I(I+1)]^{1/2} \hbar$$

a průmět do nějakého směru (např. do osy  $z$ )

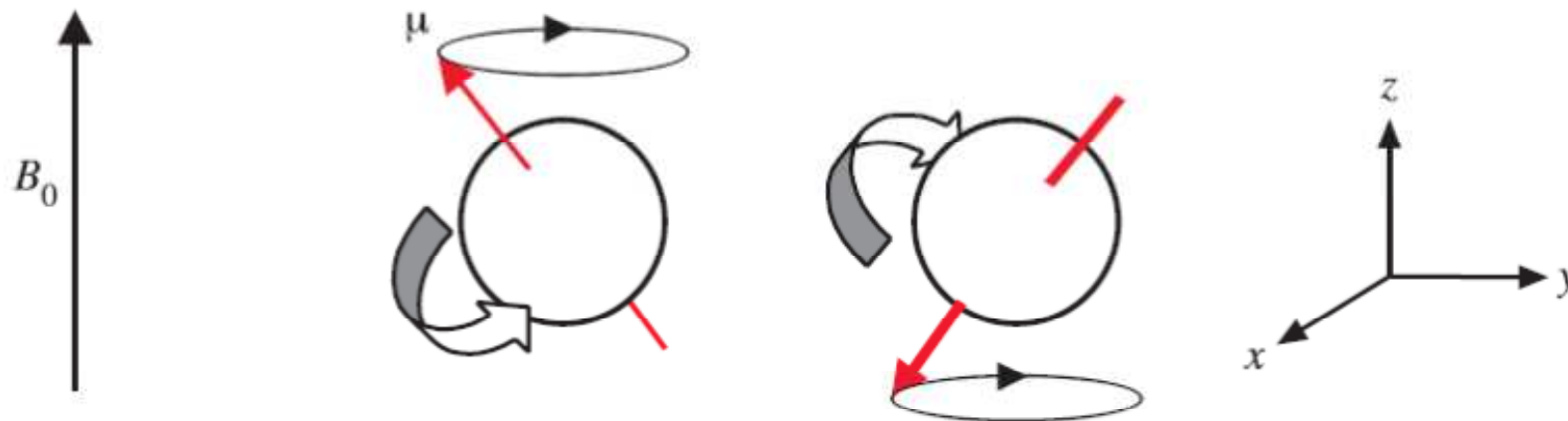
$$M_z = \gamma m \hbar \quad m = -I, -I+1, \dots, I-1, I$$

Energie magnetického momentu v homogenním poli indukce  $B$  mířícím podél osy  $z$  je

$$U(m) = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -M_z B = -m \gamma \hbar B$$

$$m = -I, -I+1, \dots, I-1, I$$

# Jaderný magnetický moment pro $I=1/2$



Už jsme viděli, že spin  $1/2$  má např. také izotop  $^{13}\text{C}$  se šesti protony a sedmi neutrony – jedním nepárováním.

protony



nepárováný  
neutron

neutrony



# Kvantové přechody

Při přechodu jádra ze stavu s  $m=m_1$  do stavu s  $m=m_2$  (přechody mohou probíhat jen mezi sousedními hladinami) dojde ke změně energie

$$\Delta E = U(m_2) - U(m_1) = (m_1 - m_2) \gamma \hbar B = \pm \gamma \hbar B$$

Tato energie je buď vyzářena (je-li záporná) jako kvantum elektromagnetického záření nebo je získána (je-li kladná) absorpcí takového kvanta.

$$\hbar \omega_B = \pm \gamma \hbar B$$

S uvážením vztahu mezi kruhovou frekvencí a frekvencí  $\omega=2\pi\nu$  dostáváme jednu ze základních rovnic NMR

$$\nu_B = \frac{\gamma}{2\pi} B$$

## Vyvolání přechodu

Aby k přechodu došlo, musíme kromě homogenního na čase nezávislého magnetického pole orientovaného podél osy  $z$  počítat s dalším přidaným elektromagnetickým polem – monochromatickou v rovině  $x - y$  kruhově polarizovanou vlnou s úhlovou frekvencí  $\omega$  a amplitudou  $B_1 \ll B$

$$\vec{B} = \left( \operatorname{tg}\theta \cos\omega t \vec{e}_x - \operatorname{tg}\theta \sin\omega t \vec{e}_y + \vec{e}_z \right) B \quad , \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{B_1}{B}$$

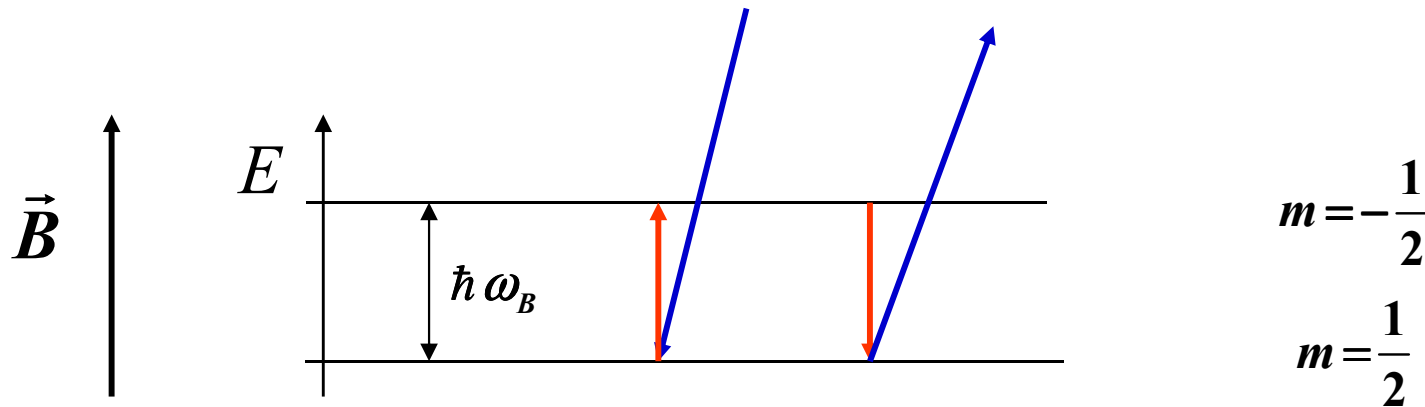
Při zápisu jsme zanedbali prostorovou závislost fáze vlny,

$$\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} [\omega t - k z] = \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left[ 2\pi \left( \nu t - \frac{z}{\lambda} \right) \right] \square \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} [\omega t]$$

protože i pro velmi vysokou frekvenci  $\nu = 10^8$  MHz je vlnová délka  $\lambda = 3$  m.

# Pravděpodobnost přechodu I

Pravděpodobnost přechodu je třeba počítat s užitím rovnic kvantové mechaniky. Uvedeme si jen výsledek pro jádro se spinem jedna polovina a kladným gyromagnetickým faktorem



$$P\left(\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}\right) = P\left(-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\right) = \frac{\omega_B^2 (\operatorname{tg}\theta)^2}{\Omega^2} \left(\sin\frac{\Omega}{2}t\right)^2$$

$$\Omega = \left[ (\omega_B - \omega)^2 + \omega_B^2 (\operatorname{tg}\theta)^2 \right]^{1/2}$$

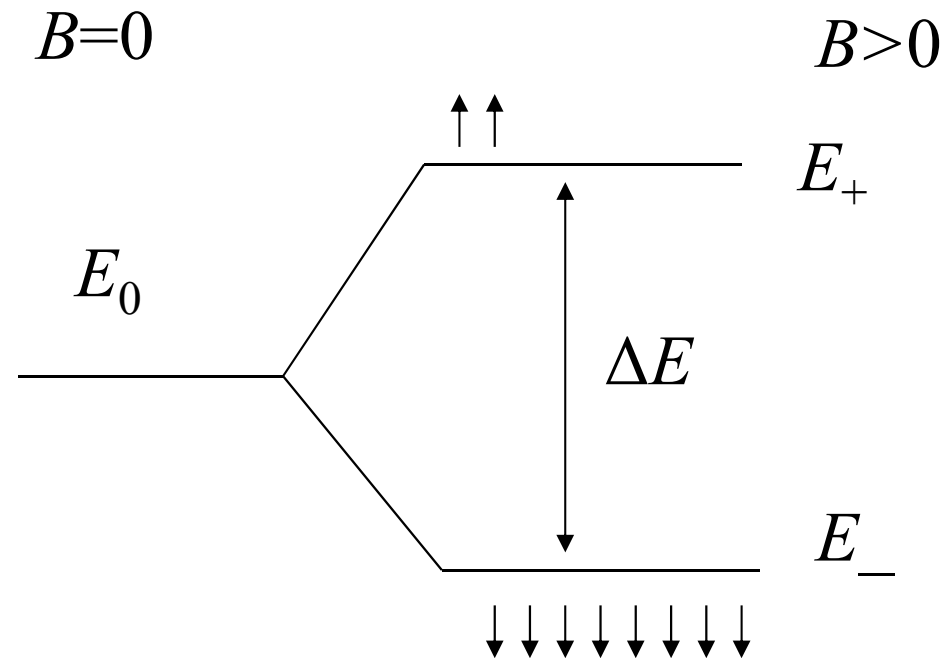
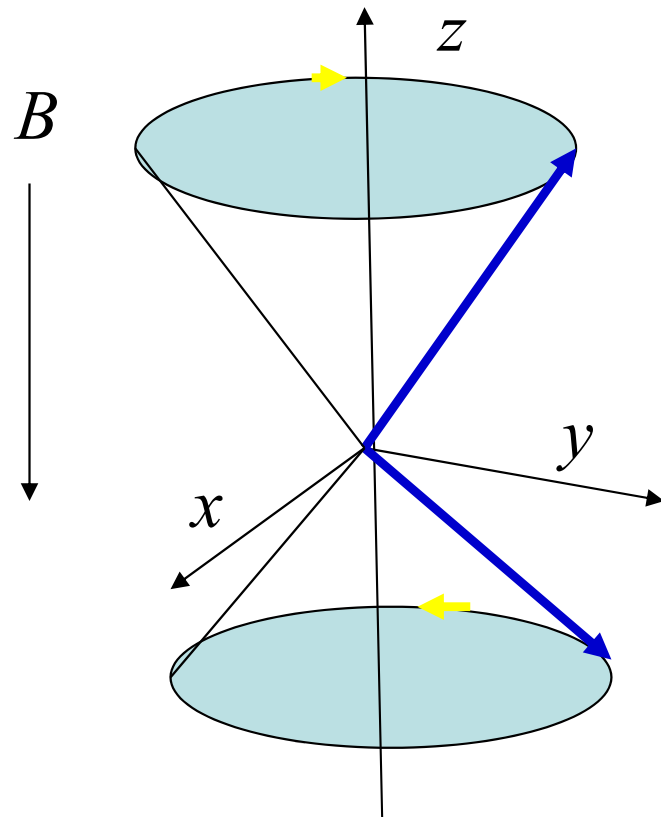
## Pravděpodobnost přechodu II

Ze vztahu pro pravděpodobnost přechodu vidíme, že při resonanci, tj. pro  $\omega = \omega_B$  může tato pravděpodobnost dosáhnout v jistém čase jedničky

$$P\left(\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}\right)\Big|_{\omega = \omega_B} = P\left(-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}\right)\Big|_{\omega = \omega_B} = \left(\sin \frac{\omega_B \operatorname{tg} \theta}{2} t\right)^2$$

Je třeba si uvědomit, že až dosud jsme uvažovali o izolovaných jádrech. V látce je přiložené vnější magnetické pole v místě daného jádra mírně ovlivněno okolím, což vede k tzv. chemickému posuvu rezonanční frekvence. V lékařských aplikacích jsou vodíkové atomy vázány především ve skupinách  $-\text{CH}_2-$  a  $\text{H}_2\text{O}$ . Pro proton s frekvencí 42 576 388 Hz při poli 1 T je chemický posuv těchto skupin 220 Hz.

# Teplotní rovnováha pro jaderné spiny v látce



Při rovnováze

$$\frac{n_{\downarrow}}{n_{\uparrow}} = \exp\left[-\frac{\Delta E}{k_B T}\right]$$

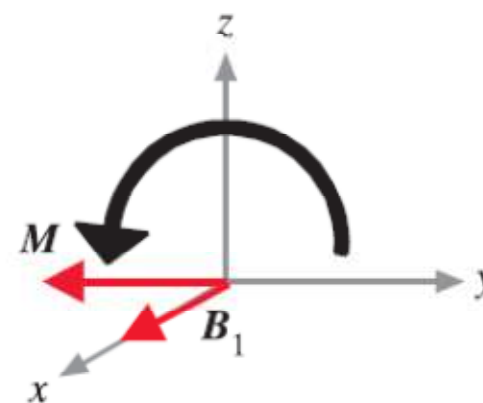
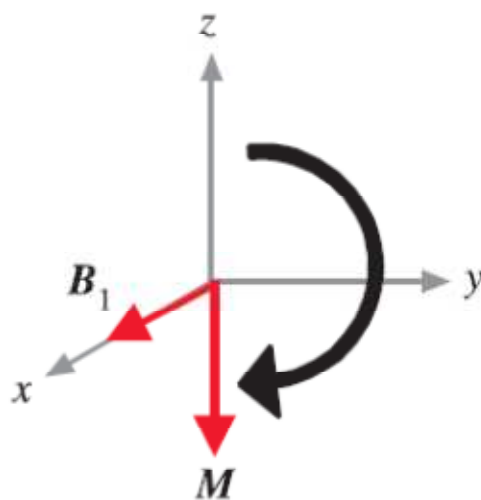
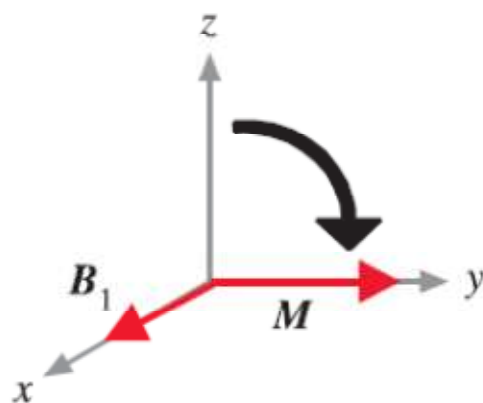
# Narušení rovnováhy

I tak velmi malý rozdíl v koncentraci vytváří při obrovské hustotě protonů v látce makroskopickou magnetizaci  $M_0$  ve směru osy  $z$ . Tu můžeme ovlivnit vhodně trvajícím pulsem radiofrekvenční (rf) vlny s rezonanční frekvencí. Na obrázcích je účinek jednoho  $90^\circ$  a dvou  $180^\circ$  rf pulsů.

$$B = 1 \text{ T}$$

$$T = 300 \text{ K}$$

$$\frac{n_{\downarrow}}{n_{\uparrow}} \approx 0,999994$$



# Návrat k rovnováze

Předpokládejme, že jsme v čase  $t=\tau$  dosáhli rf pulsem nulové magnetizace ve směru osy  $z$ . Interakcí s okolím ale dochází ke zpětnému přechodu do rovnovážného stavu s tzv. konstantou spinově – mřížkové interakce  $T_1$ . Při volné precesi nejsou složky magnetických momentů v rovině  $x - y$  u jednotlivých jader ve fázi, takže celková magnetizace ve směru  $x$  a  $y$  je nulová. Za působení rf pole se sfázují a tak i celková magnetizace rotuje obdobně jako jednotlivé momenty. Po vypnutí rf pole se interakcí mezi spiny opět sfázování poruší, to se děje s časovou konstantou  $T_2$ :

$$M_z = M_0 \left( 1 - \exp \left[ -\frac{t-\tau}{T_1} \right] \right)$$

$$M_x = M_x(\tau) \exp \left[ -\frac{t-\tau}{T_2} \right]$$

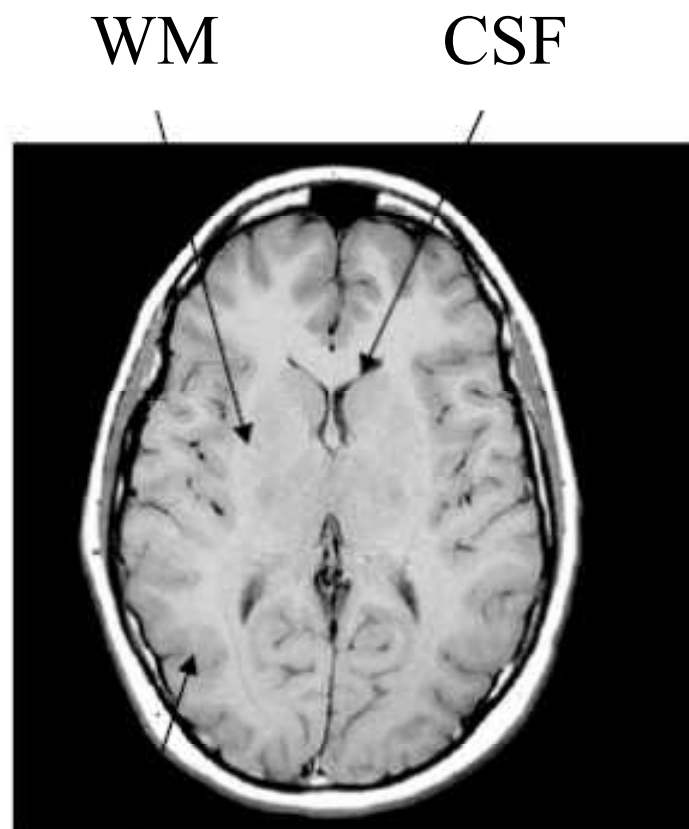
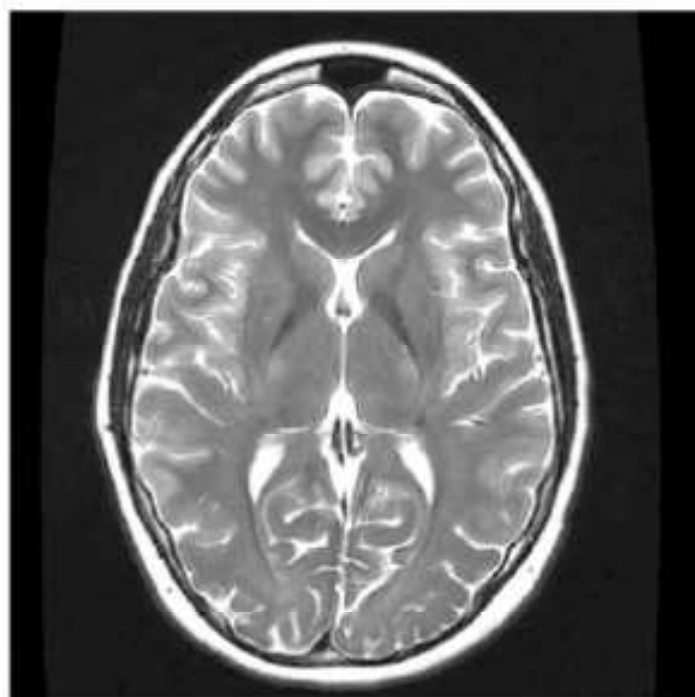
$$M_y = M_y(\tau) \exp \left[ -\frac{t-\tau}{T_2} \right]$$

## Časové konstanty $T_1$ a $T_2$

Typ látky	$T_1$ [ms]	$T_2$ [ms]
tuk	250	60
sval	900	50
krev	1400	100-200
mozek		
šedá hmota (GM)	950	100
bílá hmota (WM)	600	80
cerebrospinální tekutina (CSF)	2000	250



# Kontrast v $T_1$ a $T_2$



GM

# Blochovy rovnice

Blochovy rovnice zahrnují všechny vlivy, které působí na vektor magnetizace (makroskopický, tj. střední hodnota z velkého počtu jader): precesi v základním homogenním poli, vliv rf pole a relaxační jevy.

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma \left[ M_y B + M_z B_1 \sin\omega t \right] - \frac{M_x}{T_2}$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma \left[ -M_x B + M_z B_1 \cos\omega t \right] - \frac{M_y}{T_2}$$

$$\frac{dM_z}{dt} = -\gamma \left[ M_x B_1 \sin\omega t + M_y B_1 \cos\omega t \right] + \frac{M_0 - M_z}{T_1}$$

# Řešení Blochových rovnic

Blochovy rovnice jdou řešit za zjednodušujícího předpokladu ustáleného stavu magnetizace podél osy z analyticky. Potom dostaneme pro dvě zcela odlišně se chovající složky magnetizace vztahy

$$M_x \approx \omega_B T_2 B_1 \frac{T_2 (\omega_B - \omega) \cos \omega t + \sin \omega t}{1 + (\omega_B - \omega)^2 T_2^2 + \gamma^2 B_1^2 T_1 T_2}$$
$$M_z \approx B \frac{1 + (\omega_B - \omega)^2 T_2^2}{1 + (\omega_B - \omega)^2 T_2^2 + \gamma^2 B_1^2 T_1 T_2}$$

Blochovy rovnice vzniknou z kvantově-mechanických rovnic pro operátory jako rovnice pro jejich střední hodnoty.

# Jak získat obraz při MRI?

Vytvoření obrazu vyžaduje splnit dvě základní podmínky:

- ✓ najít způsob, jak získat informaci jen z dané malé oblasti a
- ✓ najít způsob, jak vytvářet kontrast.

**Jev NMR:** Felix Bloch a Edward Purcell 1946 (Nobelova cena 1952)

**Rozdíly v signálu** od normálních a od rakovinných oblastí:  
Raymond Damadian 1971

**Zobrazení malých oblastí** pomocí gradientu pole: Paul Lauterbur 1973 a Peter Mansfield 1974 (Nobelova cena 2003)

# Gradientní cívky dělají hluk

MRI Scanner Gradient Magnets

