

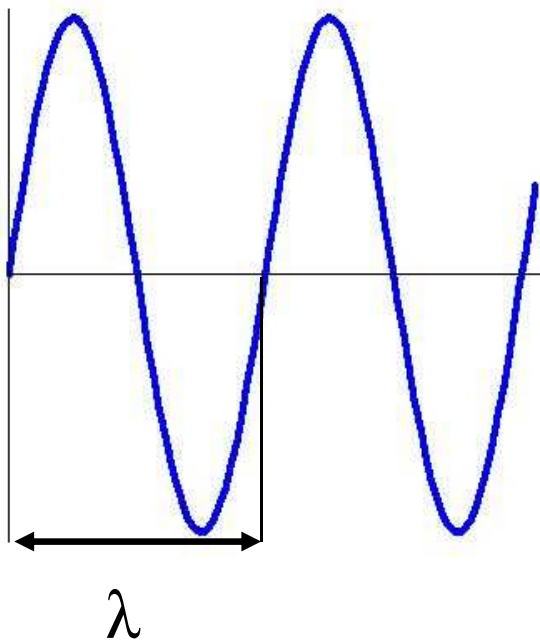
# Radiologická fyzika

Ultrazvuk –  
vlnové vlastnosti

19. listopadu 2012

# Ultrazvuk

Ultrazvuk je zvukové vlnění s frekvencí  $f > 20$  kHz. Pro ultrazvukovou diagnostiku v medicíně se používají frekvence řádu jednotek až desítek MHz.



$$s = \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - f t \right) \right]$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

vlastnosti  
zdroje

vlastnosti  
prostředí

# Základní rovnice

Základními rovnicemi jsou rovnice kontinuity a Eulerova rovnice

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \mathbf{div}(\bar{\rho} \vec{v}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \mathbf{grad}) \vec{v} = -\frac{\mathbf{grad} \bar{p}}{\bar{\rho}}$$

Pro malé kmity ponecháme v rovnicích jen členy prvního řádu v malých veličinách  $\delta\rho$ ,  $\delta p$  a  $v$

$$\bar{\rho} = \rho + \delta\rho \quad , \quad \bar{p} = p + \delta p$$

takže dostáváme rovnici kontinuity a Eulerovu rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho \mathbf{div} \vec{v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\mathbf{grad} \delta p}{\rho} = 0$$

Stejně jako každý pohyb v ideální tekutině je i šíření zvuku děj adiabatický. Proto můžeme psát

$$\delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \delta \rho$$

# Rychlost pohybu elementu prostředí

Elementárními úpravami dvou základních rovnic hydrodynamiky dospějeme k výrazu pro rychlost zvuku

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

(čtverec rychlosti zvuku je dán změnou tlaku v daném elementu prostředí se změnou hustoty v tomto elementu, aniž si sousední elementy vyměňují teplo). Zapišeme-li totiž vektor rychlosti daného elementu jako gradient nějaké potenciálové funkce  $\varphi$  a místní změnu tlaku jako záporně vzatou derivaci podle času této funkce násobenou hustotou, je tato funkce řešením vlnové rovnice ( $\Delta$  je Laplaceův operátor)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0$$

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi \quad , \quad \delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

# Potenciálová funkce

Obecný tvar vlnové rovnice pro potenciálovou funkci je

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0}$$

V kartézských souřadnicích je  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  a gradient a laplacián mají jednoduché vyjádření

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \quad , \quad \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Pokud jde o rozměr potenciálové funkce  $\varphi$ , máme

$$[v_x] = \text{m s}^{-1} = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = \frac{[\varphi]}{[x]} = \text{m}^{-1} [\varphi] \Rightarrow [\varphi] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$$

nebo také

$$[\delta p] = \text{N m}^{-2} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2} = \left[ -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = \frac{[\rho][\varphi]}{[t]} = \text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1} [\varphi] \Rightarrow [\varphi] = \text{m}^2 \text{s}^{-1}$$

# Rovinná vlna

Vlnová rovnice pro potenciálovou funkci, která závisí jen na čase a jedné kartézské souřadnici (třeba  $x$ ) je

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

Přímým derivováním se přesvědčíme, že řešením jsou libovolné funkce tvaru

$$\varphi(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Nejjednodušším příkladem je rovinná monochromatická vlna postupující v kladném směru osy  $x$

$$\varphi(x, t) = \varphi_m \cos \left[ 2\pi f \cdot \left( \frac{x}{c} - t \right) + \alpha \right] = \varphi_m \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x - ct) + \alpha \right]$$

kde konstanta  $\varphi_m$  je amplituda a konstanta  $\alpha$  značí fázi při  $x=ct$ . Frekvence a vlnová délka spolu souvisí vztahem

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad , \quad 2\pi f = \omega = c \frac{2\pi}{\lambda} = ck$$

# Kulová vlna

Vlnová rovnice pro potenciálovou funkci, která závisí jen na čase a radiální sférické souřadnici (značíme ji  $r$ ) je

$$\frac{\partial^2 \varphi(r, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi(r, t)}{\partial r} \right) = 0$$

Přímým derivováním se přesvědčíme, že řešením jsou libovolné funkce tvaru

$$\varphi(r, t) = \frac{F(r - ct)}{r} + \frac{G(r + ct)}{r}$$

Nejjednodušším příkladem je kulová monochromatická vlna šířící se z počátku  $r=0$

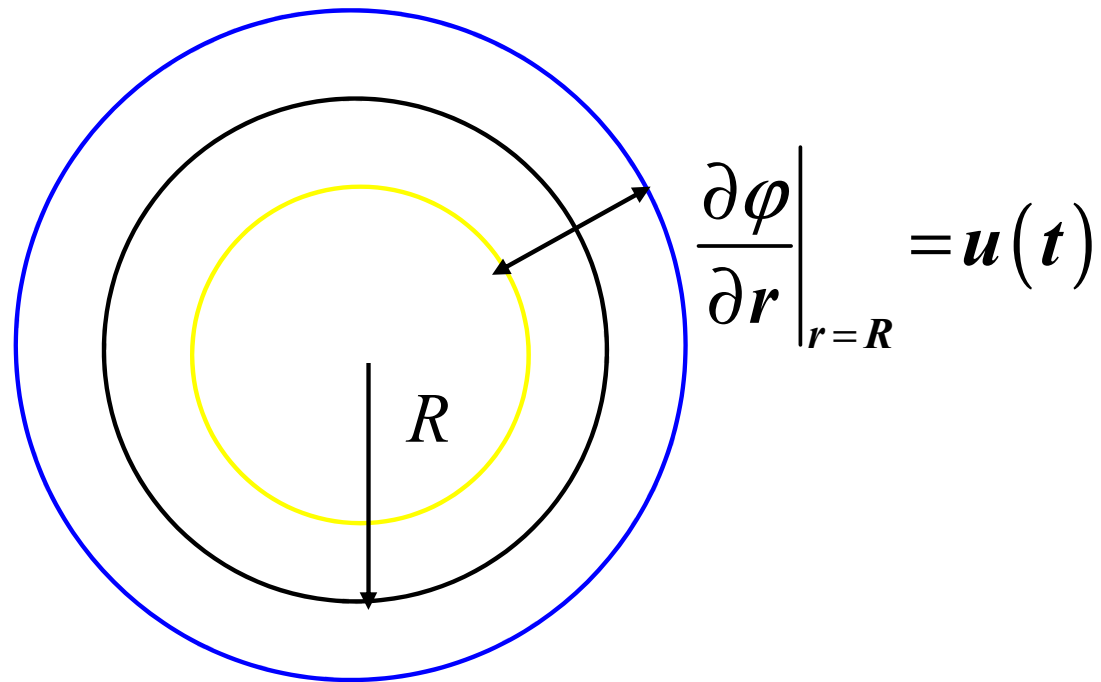
$$\varphi(r, t) = \frac{\varphi_m}{r} \cos \left[ 2\pi f \cdot \left( \frac{r}{c} - t \right) + \alpha \right] = \frac{\varphi_m}{r} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (r - ct) + \alpha \right]$$

kde konstanta  $\varphi_m$  je amplituda a konstanta  $\alpha$  značí fázi při  $x=ct$ . Frekvence a vlnová délka spolu souvisí vztahem

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad , \quad 2\pi f = \omega = c \frac{2\pi}{\lambda} = ck$$

# Kmitající koule jako zdroj

Mějme kouli poloměru  $R$  vykonávající malé pulsace, tj. body na povrchu koule radiálně kmitají rychlostí  $u(t)$





# Obecná kulová vlna

Mějme kouli poloměru  $R$  vykonávající malé pulsace, tj. body na povrchu koule radiálně kmitají rychlostí  $u(t)$ . Řešení úlohy (tedy řešení vlnové rovnice) hledáme ve tvaru

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r - R}{c}\right)$$

Na povrchu musí být rychlosti pohybu elementu budící koule i elementu okolního prostředí stejné

$$u(t) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = - \left[ \frac{1}{Rc} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{R^2} \right]$$

takže řešením je

$$\varphi(r, t) = -c \frac{R}{r} e^{-\frac{ct'}{R}} \int_{-\infty}^{t'} u(\tau) e^{\frac{c\tau}{R}} d\tau \quad , \quad t' = t - \frac{r - R}{c}$$

# Harmonická kulová vlna

Předpokládejme teď, že  $u(t)=v_m \cdot \sin(\omega t)$ . Potom je výraz pro potenciálovou funkci v obecném bodě tvořen relativně jednoduchým vztahem

$$\varphi(r, t) = \frac{\varphi_m}{r} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r-R}{c} \right) + \alpha \right]$$

$$\varphi_m = \frac{c v_m R^2}{(\omega^2 R^2 + c^2)^{1/2}}, \quad \alpha = \text{arctg} \frac{c}{R \omega}$$

Při ultrazvukové diagnostice máme vždy  $\omega R \gg c$  (jinak zapsáno  $R \gg \lambda$ ), takže se vztah pro potenciálovou funkci zjednoduší na

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \frac{c R v_m}{\omega} \cos \omega \left( t - \frac{r-R}{c} \right)$$

# Časová střední hodnota

Z různých důvodů není zajímavá a mnohdy ani dobře měřitelná okamžitá hodnota fyzikální veličiny  $F(t)$ , ale její střední hodnota za dobu  $T$ , tj.

$$\langle F \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$$

Tato doba bývá někdy velmi dlouhá (čekáme, až se nějaký jev ustálí a nezajímá nás přechodový jev). Pro veličinu s periodou  $\omega=2\pi f$  je touto dobou přirozeně perioda  $T=1/f$

$$F\left(t + \frac{1}{f}\right) = F(t) \quad , \quad \langle F \rangle = f \int_0^{1/f} F(t) dt$$

**Zejména**

$$\langle \sin(2\pi f t) \rangle = f \int_0^{1/f} \sin(2\pi f t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

$$\langle [\sin(2\pi f t)]^2 \rangle = f \int_0^{1/f} [\sin(2\pi f t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin x)^2 dx = \frac{1}{2}$$

# Intenzita harmonické kulové vlny

Pro rychlost pohybu elementu prostředí máme

$$v(r, t) = v_m \frac{R}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r - R}{c} \right)$$

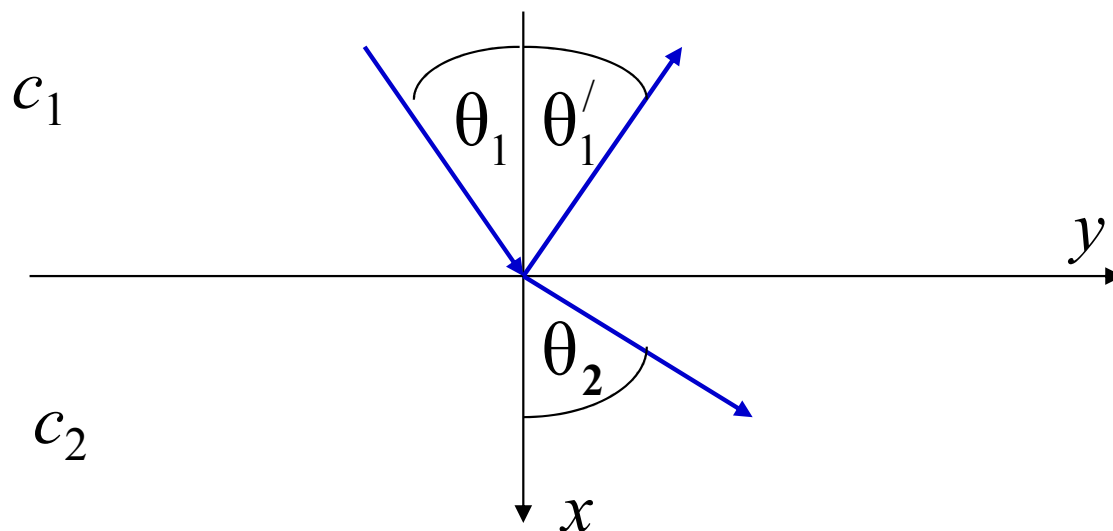
a pro místní změnu tlaku

$$\delta p(r, t) = \rho v_m \frac{R c}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r - R}{c} \right)$$

Pro intenzitu zvukové vlny (tok energie jednotkovou ploškou za jednotku času) dostáváme ve střední hodnotě

$$I(r) = \langle v(r, t) \delta p(r, t) \rangle = \frac{1}{2} \rho c v_m^2 \frac{R^2}{r^2}$$

# Odraz a lom na rozhraní



Pro dopadající, odraženou a prošlou vlnu máme

$$\varphi_1 = s_1 \sin \left[ \omega \left( \frac{x \cos \theta_1}{c_1} + \frac{y \sin \theta_1}{c_1} - t \right) \right]$$

$$\varphi_1' = s_1' \sin \left[ \omega \left( -\frac{x \cos \theta_1'}{c_1} + \frac{y \sin \theta_1'}{c_1} - t \right) \right]$$

$$\varphi_2 = s_2 \sin \left[ \omega \left( \frac{x \cos \theta_2}{c_2} + \frac{y \sin \theta_2}{c_2} - t \right) \right]$$

# Podmínky spojitosti

Na rozhraní ( $x=0$ ) musí být u všech vln stejná závislost na souřadnici  $y$  (vlastnosti prostředí se v tomto směru nemění), což vede k tomu, že úhel odrazu je roven úhlu dopadu a poměr sinů úhlů dopadu a lomu (úhel se měří od kolmice k rozhraní) je roven poměru rychlostí

$$\theta'_1 = \theta_1 \quad , \quad \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Dále se musí rovnat tlak a kolmá složka rychlosti na obou stranách rozhraní

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad , \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

odkud

$$\rho_1 (s_1 + s'_1) = \rho_2 s_2 \quad , \quad \frac{\cos\theta_1}{c_1} (s_1 - s'_1) = \frac{\cos\theta_2}{c_2} s_2$$

# Intenzita odražené a lomené vlny

Řešení rovnic popisujících podmínky na rozhraní dává

$$s_1' = \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 - \rho_1 c_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} s_1 \quad , \quad s_2 = \frac{2 \rho_1 c_2 \cos \theta_1}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} s_1$$

Energie dopadající na jednotkovou plošku rozhraní resp. energie odražená jednotkovou ploškou nebo propuštěná jednotkovou ploškou je

$$E_1 = \rho_1 c_1 \langle v_1^2 \rangle \cos \theta_1 \quad , \quad E_1' = \rho_1 c_1 \langle v_1'^2 \rangle \cos \theta_1 \quad , \quad E_2 = \rho_2 c_2 \langle v_2^2 \rangle \cos \theta_2$$

Koeficienty propustnosti a odrazivosti jsou definovány jako

$$R = \frac{E_1'}{E_1} \quad , \quad T = \frac{E_2}{E_1} \quad , \quad R + T = 1$$

Akustická impedance je definována jako součin hustoty prostředí a rychlosti zvuku v tomto prostředí

$$Z = \rho c$$

Pro kolmý dopad na rozhraní dvou prostředí

$$R = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad , \quad T = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

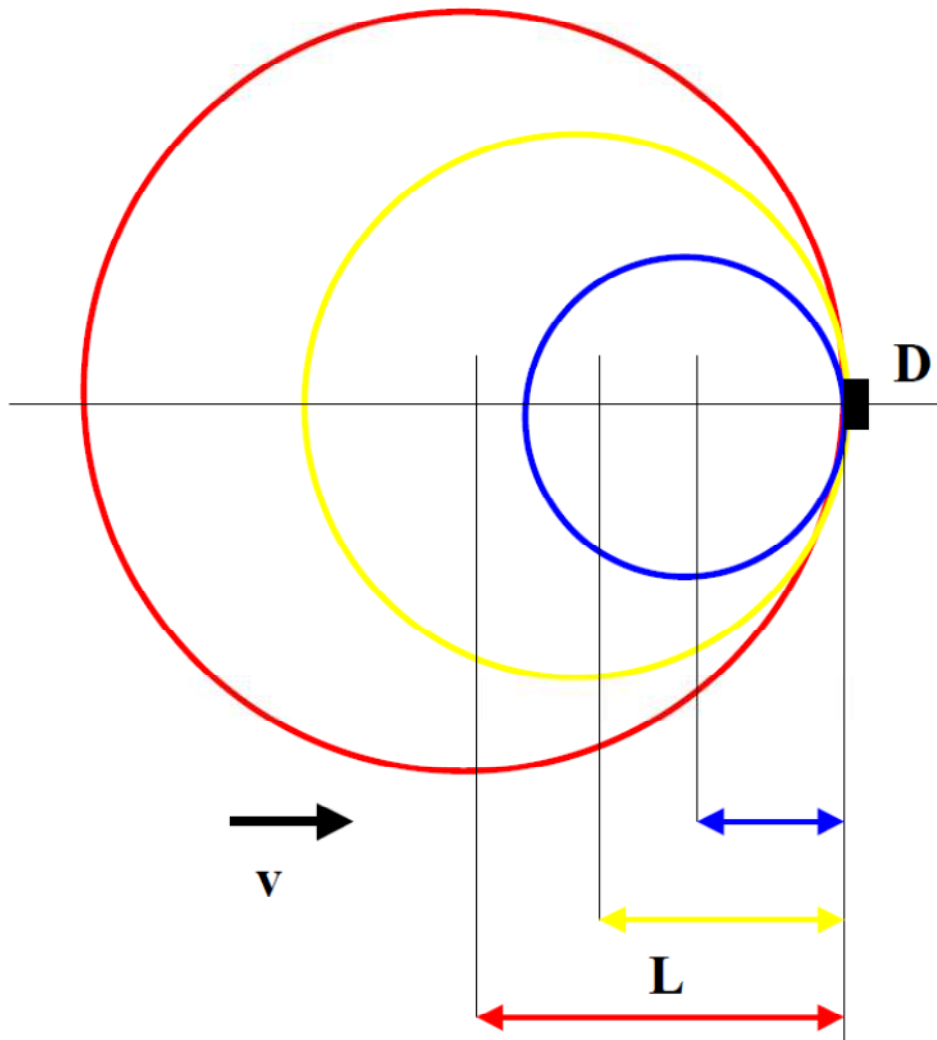
# Akustická impedance

Jednotkou akustické impedance je rayleigh:  $1 \text{ Rayl} = 1 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Tabulka uvádí potřebné hodnoty pro některá prostředí.

prostředí	$10^3 \rho \text{ [kg m}^{-3}\text{]}$	$c \text{ [m s}^{-1}\text{]}$	$Z \text{ [Rayl]}$
vzduch	0,0012	330	0,0004
voda	1	1430	1,43
měkká tkáň	1,1	1540	1,69
játra	1,05	1570	1,65
tuk	0,95	1450	1,38
kost	1,91	4080	7,8



# Dopplerův jev I



Do detektoru přicházejí vlny v časech

$$t_1 = \frac{L}{c}, \quad t_2 = \frac{1}{f} + \frac{L - v \frac{1}{f}}{c}$$

$$t_3 = \frac{2}{f} + \frac{L - v \frac{2}{f}}{c}, \quad \dots$$

Frekvence je tedy

$$\frac{1}{f'} = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = \frac{1}{f} - \frac{v}{f c}$$

$$f' = f \frac{c}{c - v} > f$$

# Dopplerův jev II

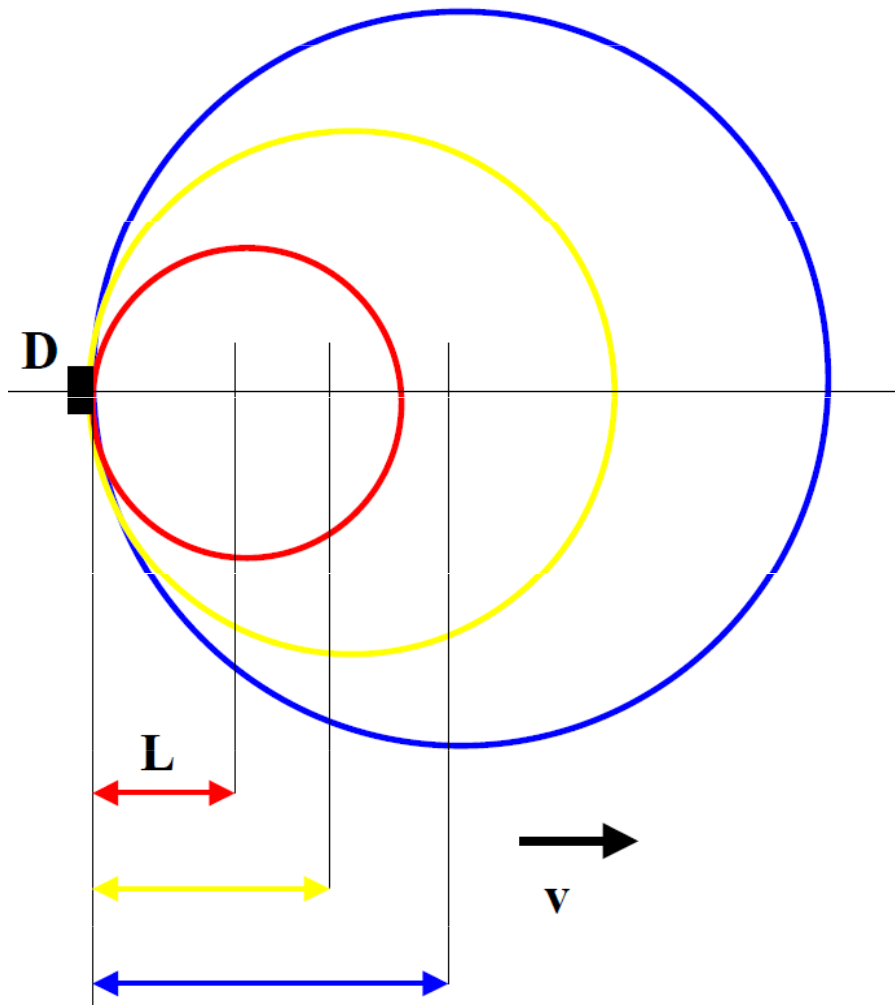
Do detektoru přicházejí vlny v časech

$$t_1 = \frac{L}{c} \quad , \quad t_2 = \frac{1}{f} + \frac{L+v}{c}$$

$$t_3 = \frac{2}{f} + \frac{L+v}{c} \quad , \quad \dots$$

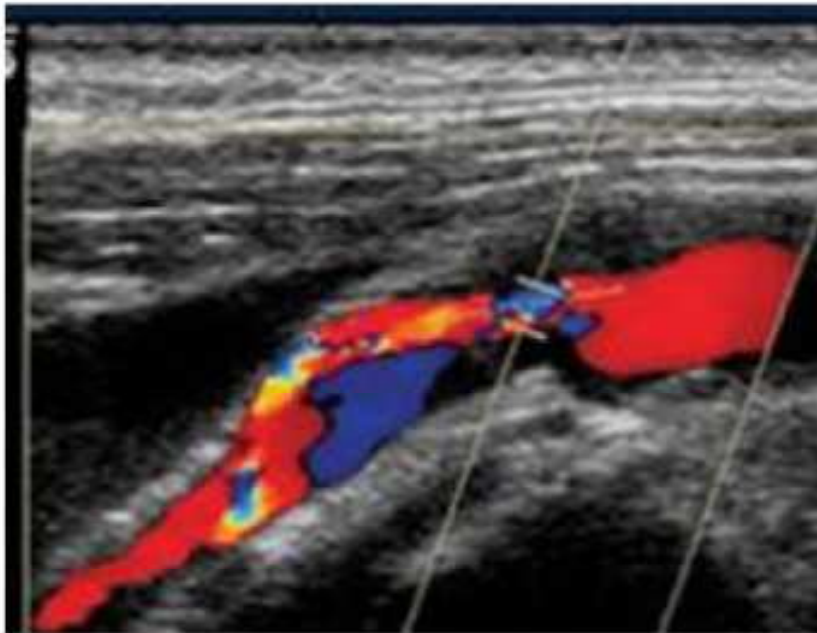
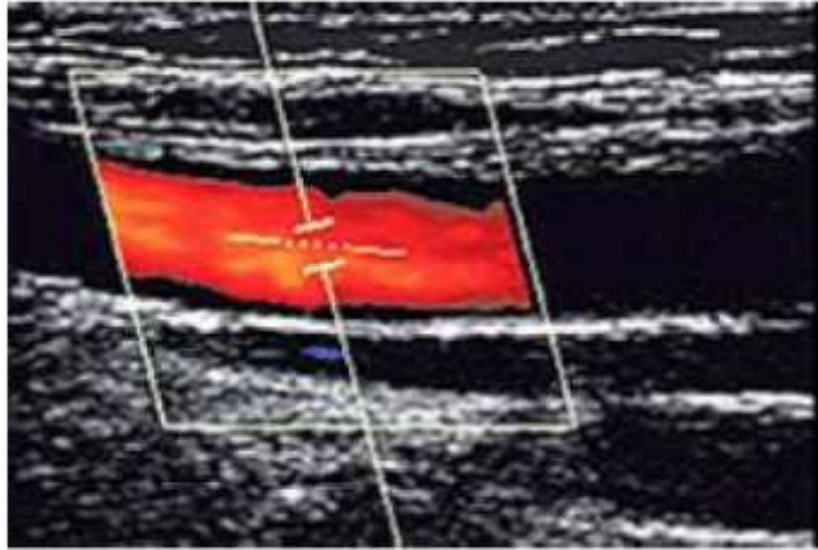
Frekvence je tedy

$$\frac{1}{f'} = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = \frac{1}{f} + \frac{v}{fc}$$



$$f' = f \frac{c}{c+v} < f$$

# Doppleruv jev III



# Absorpce

Ultrazvukové vlnění je při šíření prostředím částečně absorbováno. Jako u jiných druhů vlnění, můžeme pro pokles intenzity psát exponenciální zákon – pokles intenzity je úměrný dráze, kterou paprsek vlnění prochází

$$dI(x) = -\mu dx \Rightarrow I(x) = I(0)e^{-\mu x}$$

U zvuku je obvyklé charakterizovat útlum nikoliv lineárním koeficientem útlumu s rozměrem  $[\text{m}^{-1}]$ , ale koeficientem s rozměrem  $[\text{dB}\cdot\text{m}^{-1}]$ . Logaritmováním zákona absorpce dostáváme

$$10 \cdot \log_{10} \frac{I(x)}{I(0)} = -10 \mu x \log_{10} e = -\frac{10}{\ln 10} \mu x$$

takže

$$\mu [\text{dB m}^{-1}] = -\frac{10}{x [\text{m}]} \cdot \log_{10} \frac{I(x)}{I(0)} = -\frac{10}{\ln 10} \mu [\text{m}^{-1}]$$

# Koeficient útlumu

prostředí	$\mu$ [dB cm <sup>-1</sup> ] pro $f=1$ Mhz
vzduch	1,61
voda	0,0025
měkká tkáň	0,5 – 1,0
játra	1,1
tuk	0,6
kost	10,0

# Zápis vln pomocí komplexních čísel

Tento zápis přináší velké zjednodušení, Platí totiž

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad , \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Můžeme si ověřit například triviální příklad

$$1 = e^0 = e^{ix} e^{-ix} = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 + i0 = 1$$

Pro zjednodušení zápisu vln je důležité, že nedochází při derivování (a integrování) k „přecházení“ od sinu ke kosinu

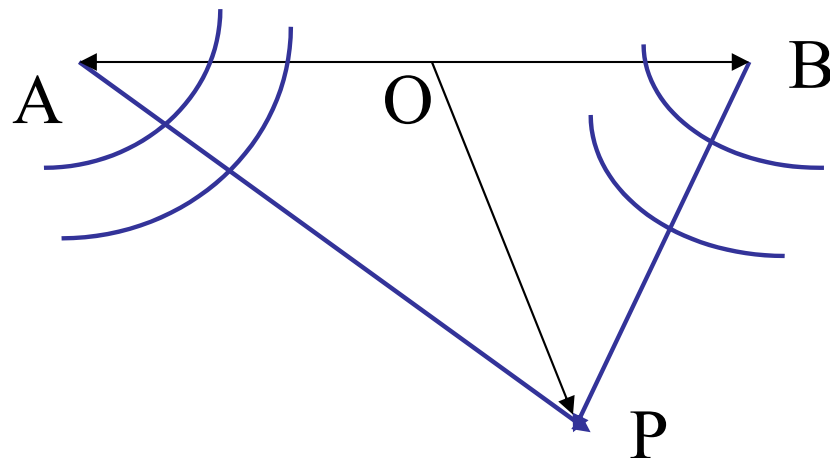
$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \quad , \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \quad , \quad \frac{d e^{ix}}{dx} = i e^{ix}$$

Monochromatickou kulovou vlnu s frekvencí  $\omega$ , která vychází z bodu  $\vec{r}_0$  zapisujeme jako

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \exp[i k |\vec{r} - \vec{r}_0| - \omega t]$$

# Skládání vln – geometrie

Dva zdroje v různých bodech kmitající ve fázi



$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \vec{r}_B \quad , \quad \overrightarrow{OP} = \vec{r} \quad , \quad AP = |\vec{r} - \vec{r}_A| \quad , \quad BP = |\vec{r} - \vec{r}_B|$$

Vhodnou volbou souřadnicového systému (body A a B leží na ose x, počátek pólí jejich vzdálenost) můžeme psát

$$|\vec{r} - \vec{r}_A| = \left[ \left( x + \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2} \quad , \quad |\vec{r} - \vec{r}_B| = \left[ \left( x - \frac{d}{2} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}$$

# Skládání vln – aproximace

Pole  $\varphi$  v bodě P je součtem polí  $\varphi_A$  a  $\varphi_B$

$$\varphi(\vec{r}) = a \left\{ \frac{\exp[i k |\vec{r} - \vec{r}_A|]}{|\vec{r} - \vec{r}_A|} + \frac{\exp[i k |\vec{r} - \vec{r}_B|]}{|\vec{r} - \vec{r}_B|} \right\} \exp[-i \omega t]$$

Závislost na  $d$  v čitateli zanedbáme, jde o pomalou změnu amplitudy, takže

$$|\vec{r} - \vec{r}_A| \approx |\vec{r} - \vec{r}_B| \approx r$$

Totéž zanedbání nemůžeme ale provést v exponentu, protože

$$\psi_A = k [|\vec{r} - \vec{r}_A| - r] \quad , \quad \psi_B = k [|\vec{r} - \vec{r}_B| - r]$$

jako součin velkého ( $k=2\pi/\lambda$ ) a malého čísla nemusí být malé (ve srovnání s  $\pi$ , kdy při změně o tuto hodnotu se obrátí znaménko celého výrazu pro vlnu). Máme tedy

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{a \exp[i k r]}{r} \{ \exp[i \psi_A] + \exp[i \psi_B] \} \exp[-i \omega t]$$



# Skládání vln – rovinný problém

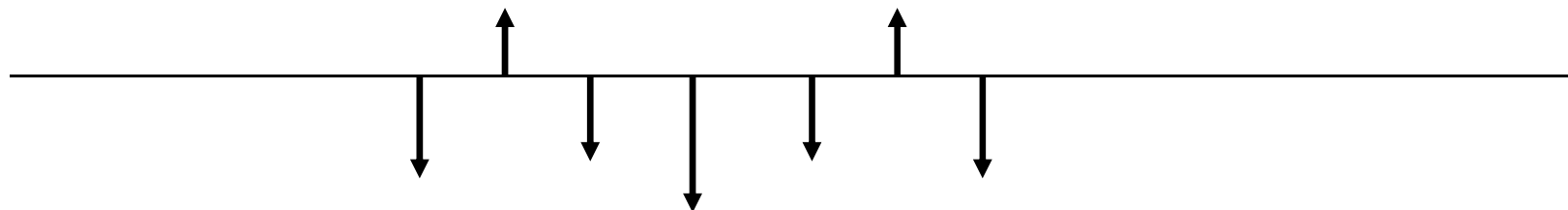
Pole  $\varphi$  je součtem polí od  $2n+1$  zdrojů vzájemně fázově posunutých a v poloze  $(x=nd, z=0)$

$$\varphi(x, z) \propto \sum_{k=-n}^n e^{i[\Phi_k(x, z) - \Phi_k(X, z)]}$$

Fáze je

$$\Phi_k(x, z) = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ (x - kd)^2 + z^2 \right]^{1/2}$$

Pro  $x=X$  dostáváme maximum součtu, takže volbou fázového posunutí jednotlivých zdrojů posouváme toto maximum.



# Skládání vln – rovinný problém

Celkem 21 zdrojů s  $d=2$ ,  $\lambda=2$  a  $L=100$  pro  $X=0, 2$  a  $4$  (všechno v mm).

