Užití komplexních čísel.

Lenka Přibylová

1. října 2010

Obsah

Pomocí Eulerova vzorce dokažte, že platí $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

Pomocí Eulerova vzorce dokažte, že platí $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}$$

$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i \sin(-x)$. Přitom funkce cos je sudá, tj. $\cos(-x) = \cos x$, a funkce sin lichá, tj. $\sin(-x) = -\sin x$.

Pomocí Eulerova vzorce dokažte, že platí $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}$$

Sečtením dostáváme

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x,$$

Pomocí Eulerova vzorce dokažte, že platí $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}$$

Sečtením dostáváme

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x,$$

tj.

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

Dokažte nejkrásnější formuli matematiky: $\quad -1 = e^{i\pi}.$

Dokažte nejkrásnější formuli matematiky: $-1 = e^{i\pi}$.

Stačí dosadit do Eulerova vzorce $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ číslo $x = \pi$.

Dokažte nejkrásnější formuli matematiky: $-1 = e^{i\pi}$.

Stačí dosadit do Eulerova vzorce $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ číslo $x = \pi$. Pak

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

Dokažte, že platí $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Dokažte, že platí $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\alpha} \\ e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\beta} \end{aligned}$$

Sečtením exponentů $\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha$,
podobně $-\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} = \beta$.

Dokažte, že platí $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\alpha}\\
e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\beta}\\
\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right) &= \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta}\right)
\end{aligned}$$

Sečtením obou rovnic dostaneme
$e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$, rovnost musí platit i pro reálnou a imaginární část.

Dokažte, že platí $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\alpha} \\
e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\beta} \\
\operatorname{Re}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right) &= \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta}\right) \\
&= \cos\alpha + \cos\beta
\end{aligned}$$

Podle Eulerova vzorce $\operatorname{Re} e^{i\heartsuit} = \cos\heartsuit$.

Dokažte, že platí $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

$$
\begin{aligned}
e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\alpha} \\
e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\beta} \\
\operatorname{Re}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right) &= \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta}\right) \\
&= \cos\alpha + \cos\beta
\end{aligned}
$$

$$
\operatorname{Re}\Big(\big(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + i\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\big)\big(\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\big) +
$$

$$
+\big(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} - i\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\big)\big(\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\big)\Big)
$$

Funkce přepíšeme podle Eulerova vzorce $e^{i\heartsuit} = \cos\heartsuit + i\sin\heartsuit$, navíc funkce cos je sudá, proto $\cos(-\frac{\alpha-\beta}{2}) = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ a funkce sin je lichá, proto $\sin(-\frac{\alpha-\beta}{2}) = -\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Dokažte, že platí $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\alpha} \\
e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} &= e^{i\beta} \\
\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right) &= \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} + e^{i\beta}\right) \\
&= \cos\alpha + \cos\beta
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\Big((\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + i\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2})(\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}) +$$

$$+(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} - i\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2})(\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2})\Big) = 2\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}$$

Složte vlnění s posunutou fází $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t - k(x-\delta))$.

Složte vlnění s posunutou fází $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t - k(x-\delta))$.

Označme $\quad \alpha = \omega t - k(x-\delta) \quad$ a $\quad \beta = \omega t - kx.$
Pak

$$\begin{aligned} \frac{\alpha-\beta}{2} &= \frac{k\delta}{2}, \\ \frac{\alpha+\beta}{2} &= \omega t - kx + \frac{k\delta}{2}. \end{aligned}$$

Složte vlnění s posunutou fází $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t - k(x-\delta))$.

Označme $\quad \alpha = \omega t - k(x-\delta) \quad$ a $\quad \beta = \omega t - kx.$
Pak

$$\begin{aligned} \frac{\alpha-\beta}{2} &= \frac{k\delta}{2}, \\ \frac{\alpha+\beta}{2} &= \omega t - kx + \frac{k\delta}{2}. \end{aligned}$$

Podle vzorce

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

tedy platí

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = \underbrace{2A\cos\frac{k\delta}{2}}_{\text{amplituda}}\underbrace{\cos\left(\omega t - kx + \frac{k\delta}{2}\right)}_{\text{harmonická vlna}}.$$

Složte vlnění s posunutou fází $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t - k(x-\delta))$.

Označme $\alpha = \omega t - k(x-\delta)$ a $\beta = \omega t - kx$.
Pak

$$\begin{aligned} \frac{\alpha-\beta}{2} &= \frac{k\delta}{2}, \\ \frac{\alpha+\beta}{2} &= \omega t - kx + \frac{k\delta}{2}. \end{aligned}$$

Podle vzorce

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

tedy platí

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = \underbrace{2A\cos\frac{k\delta}{2}}_{\text{amplituda}}\underbrace{\cos\left(\omega t - kx + \frac{k\delta}{2}\right)}_{\text{harmonická vlna}}.$$

Animace.

Složte vlnění s opačným směrem šíření $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$ a ukažte, že jde o stojaté vlnění.

Složte vlnění s opačným směrem šíření $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$ a ukažte, že jde o stojaté vlnění.

Označme $\alpha = \omega t + kx$ a $\beta = \omega t - kx$.
Pak

$$\begin{aligned} \frac{\alpha-\beta}{2} &= kx, \\ \frac{\alpha+\beta}{2} &= \omega t. \end{aligned}$$

Složte vlnění s opačným směrem šíření $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$ a ukažte, že jde o stojaté vlnění.

Označme $\quad \alpha = \omega t + kx \quad$ a $\quad \beta = \omega t - kx.$
Pak

$$\begin{aligned} \tfrac{\alpha-\beta}{2} &= kx, \\ \tfrac{\alpha+\beta}{2} &= \omega t. \end{aligned}$$

Podle vzorce

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}$$

tedy platí

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Složte vlnění s opačným směrem šíření $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$ a ukažte, že jde o stojaté vlnění.

Označme $\alpha = \omega t + kx$ a $\beta = \omega t - kx$.
Pak

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-\beta}{2} &= kx,\\ \frac{\alpha+\beta}{2} &= \omega t.\end{aligned}$$

Podle vzorce

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

tedy platí

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Funkce je tedy pro libovolné pevné t násobkem $\cos(kx)$, tedy harmonickou vlnou s nulovou počáteční fází - s časem se vlna neposouvá po ose x, jde o stojaté vlnění.

Složte vlnění s opačným směrem šíření $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$ a ukažte, že jde o stojaté vlnění.

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Složte vlnění s opačným směrem šíření $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$ a ukažte, že jde o stojaté vlnění.

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Maxima odpovídají

$$\cos(kx) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad kx = m\pi,$$

a minima

$$\cos(kx) = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = \frac{\pi}{2} + m\pi,$$

kde m je libovolné celé číslo.

Složte vlnění s opačným směrem šíření $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$ a ukažte, že jde o stojaté vlnění.

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Maxima odpovídají

$$\cos(kx) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad kx = m\pi,$$

a minima

$$\cos(kx) = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = \frac{\pi}{2} + m\pi,$$

kde m je libovolné celé číslo. Protože $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je $\psi_1 + \psi_2 = 0$ pro

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + m\pi}{k} = \frac{2m+1}{4}\lambda.$$

Složte vlnění s opačným směrem šíření $\psi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ a $\psi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$ a ukažte, že jde o stojaté vlnění.

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Maxima odpovídají

$$\cos(kx) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad kx = m\pi,$$

a minima

$$\cos(kx) = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = \frac{\pi}{2} + m\pi,$$

kde m je libovolné celé číslo. Protože $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je $\psi_1 + \psi_2 = 0$ pro

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + m\pi}{k} = \frac{2m+1}{4}\lambda.$$

Animace.

KONEC