Průběh funkce

Lenka Přibylová

28. července 2006

Obsah

$$y = x^3 + 4x^2 + 5x$$

$$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$$ $D(f) = \mathbb{R};$

Definiční obor je celá množina $\mathbb{R}$.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

$$\boxed{f(-x) = (-x)^3 + 4(-x)^2 + 5(-x) = -x^3 + 4x^2 - 5x \neq \pm f(x)}$$

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0,0]$

Dosadíme $x = 0$ do předpisu funkce $f(x)$ a dostaneme průsečík s osou y.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

Řešením rovnice $y = 0$ dostaneme průsečík s osou x.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$
$$x(x^2 + 4x + 5) = 0$$

Vytkneme x. Součin je roven nule právě tehdy, když některý z činitelů je roven nule. Červený činitel dává triviální řešení, zelený činitel vede na kvadratickou rovnici.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 5x &= 0 \\ {\color{red}x}{\color{green}(x^2 + 4x + 5)} &= 0 \\ {\color{blue}x} &{\color{blue}= 0} \end{aligned}$$

Kvadrativká rovnice ${\color{green}x^2 + 4x + 5 = 0}$ nemá reálné rešení, protože diskriminant je záporný: $D = 16 - 20$.

$y = x^3 + 4x^2 + 5x$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

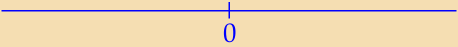
$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 5x &= 0 \\ x(x^2 + 4x + 5) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Průsečík s osou x je jediný: $x = 0$.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 5x &= 0 \\ x(x^2 + 4x + 5) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

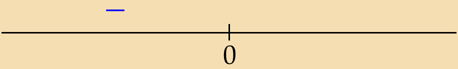


Na osu x zaneseme průsečík. Nemáme žádné body nespojitosti.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 5x &= 0 \\ x(x^2 + 4x + 5) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$



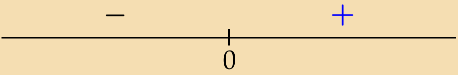
$f(-1) = -1 + 4 - 5 = -2 < 0$

Funkční hodnota $f(-1)$ je záporná a protože se znaménko na intervalu $(-\infty, 0)$ nemůže změnit, je funkce záporná na celém tomto intervalu.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 5x &= 0 \\ x(x^2 + 4x + 5) &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$



$f(-1) = -1 + 4 - 5 = -2 < 0$
$f(1) = 10 > 0$

Funkce je kladná v $x = 1$, tedy také na $(0, \infty)$.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

Vypočteme limity v $\pm\infty$. Začneme limitou v $+\infty$. Protože platí $\infty + \infty = \infty$, je výsledek zřejmý.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 + 4x^2 + 5x$$

Pro $-\infty$ není výsledek na první pohled vidět, protože dostáváme neurčitý výraz $\infty - \infty$.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \lim_{x\to-\infty} x^3$$

Vytkneme-li nejvyšší mocninu x^3, dostáváme

$$x^3 + 4x^2 + 5x = x^3\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right),$$

kde druhý činitel konverguje k jedné. Obecně platí pravidlo, že u polynomu (i racionální lomené funkce) se chování v nevlastních bodech nemění, jestliže zanedbáme členy s nižšími mocninami.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\lim_{x \to \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$$\lim_{x \to \infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + 4x^2 + 5x = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

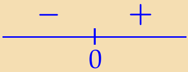
Asymptota bez směrnice neexistuje, protože je funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$. Asymptota se směrnicí také neexistuje, protože

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 + 4x + 5 = \infty.$$

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

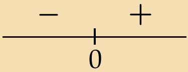
$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;



$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;



$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)'$$

Vyšetříme chování derivace.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

$$\begin{array}{cc} - & + \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}$$

$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

Derivujeme každý člen zvlášť.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

Hledáme stacionární body, proto položíme derivaci rovnu nule.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

$$\begin{array}{ccc} & - & + \\ \hline & & 0 \end{array}$$

$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{-8 \pm 2}{6}$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$y' = (x^3 + 4x^2 + 5x)' = 3x^2 + 8x + 5$$

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{6} = \frac{-8 \pm 2}{6}$$

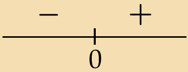
$$x_1 = -\frac{5}{3},\ x_2 = -1$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;



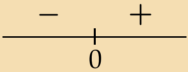
$y' = 3x^2 + 8x + 5$;

Na reálnou osu zaneseme stacionární body. Nemáme žádné body nespojitosti.

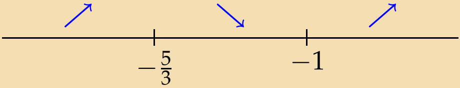
$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

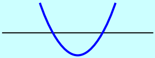
$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;



$y' = 3x^2 + 8x + 5$;



Graf derivace je parabola:

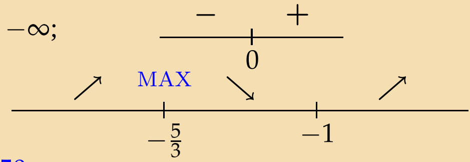


$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0,0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

$y' = 3x^2 + 8x + 5$;



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27}$$

Ve stacionárním bodě $x = -\dfrac{5}{3}$ nastává lokální maximum. Dopočteme v tomto bodě funkční hodnotu.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

$-$ $\quad$ $+$

0

$y' = 3x^2 + 8x + 5$;

$\nearrow$ MAX $\searrow$ min $\nearrow$

$-\frac{5}{3}$ $\quad$ -1

$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \qquad f(-1) = -2$$

Ve stacionárním bodě $x = -1$ nastává lokální minimum. Dopočteme v tomto bodě funkční hodnotu.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$y' = 3x^2 + 8x + 5$;

$$\begin{array}{ccccc} \nearrow & \text{MAX} & \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -\frac{5}{3} & & -1 & \end{array}$$

$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \qquad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8$$

Spočteme druhou derivaci a vyšetříme její chování.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

$-$ $+$

0

$y' = 3x^2 + 8x + 5$;

$\nearrow$ MAX $\searrow$ min $\nearrow$

$-\frac{5}{3}$ -1

$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \qquad f(-1) = -2$$

$$y'' = 6x + 8$$

$$6x + 8 = 0$$

Položíme druhou derivaci nule.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$y' = 3x^2 + 8x + 5$;

$$\begin{array}{ccccc} \nearrow & \text{MAX} & \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -\frac{5}{3} & & -1 & \end{array}$$

$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \qquad f(-1) = -2$$

$y'' = 6x + 8$;

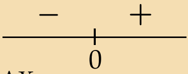
$$\begin{array}{ccc} & & \\ \hline & -\frac{4}{3} & \end{array}$$

Nakreslíme reálnou osu s kritickým bodem. Nemáme žádný bod nespojitosti, proto se druhá derivace může měnit pouze v inflexním bodě.

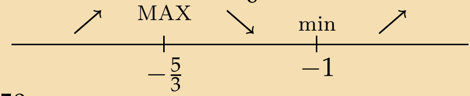
$$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

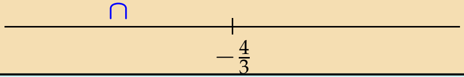


$y' = 3x^2 + 8x + 5$;



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \qquad f(-1) = -2$$

$y'' = 6x + 8$;



Funkce ke na intervalu $\left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right)$ konkávní, protože

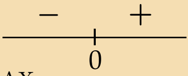
$-2 \in \left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right)$ a $y''(-2) = 6 \cdot (-2) + 8 = -4 < 0.$

$$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$$

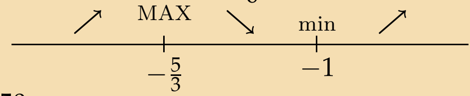
$D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

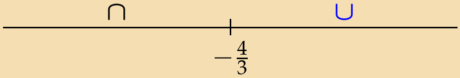


$y' = 3x^2 + 8x + 5$;



$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \qquad f(-1) = -2$$

$y'' = 6x + 8$;



Funkce je konvexní na intervalu $\left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$, protože $0 \in \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$ a $y''(0) = 8 > 0$.

$\boxed{y = x^3 + 4x^2 + 5x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; ani sudá ani lichá, není periodická

průsečík s osou y je $[0, 0]$

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$;

$-$ $+$

0

$y' = 3x^2 + 8x + 5$;

$\nearrow$ MAX $\searrow$ min $\nearrow$

$-\frac{5}{3}$ -1

$$f(-5/3) = -\frac{50}{27} \qquad f(-1) = -2$$

$y'' = 6x + 8$;

$\cap$ in. $\cup$

$-\frac{4}{3}$

$$f(-4/3) = -\frac{52}{27}$$

Bod $x = -\dfrac{4}{3}$ je tedy inflexní. Spočteme jeho funkční hodnotu.

$-$	$+$
	0

$\nearrow$ MAX $\searrow$	min $\nearrow$
$-\frac{5}{3}$	-1

$\cap$ in. $\cup$
$-\frac{4}{3}$

$$f(0) = 0$$
$$f(+\infty) = \infty$$
$$f(-\infty) = -\infty$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$
$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Shrneme dosažené výpočty.

$-$	$+$
	0

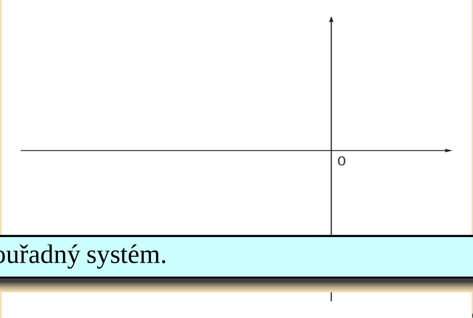
$\nearrow$ MAX $\searrow$	min $\nearrow$
$-\frac{5}{3}$	-1

$\cap$	in.	$\cup$
	$-\frac{4}{3}$	

$$f(0) = 0$$
$$f(+\infty) = \infty$$
$$f(-\infty) = -\infty$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$
$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$



Nakreslíme souřadný systém.

$-$ $+$

0

$\nearrow$ MAX $\searrow$ min $\nearrow$

$-\frac{5}{3}$ -1

$\cap$ in. $\cup$

$-\frac{4}{3}$

$f(0) = 0$

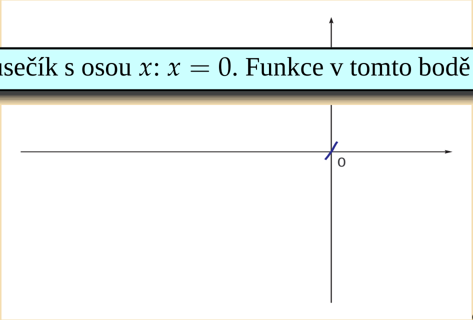
$f(+\infty) = \infty$

$f(-\infty) = -\infty$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$f(-1) = -2$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$



Označíme průsečík s osou x: $x = 0$. Funkce v tomto bodě roste.

$-$ $+$

0

$\nearrow$ MAX $\searrow$ min $\nearrow$

$-\frac{5}{3}$ -1

$\cap$ in. $\cup$

$-\frac{4}{3}$

$f(0) = 0$

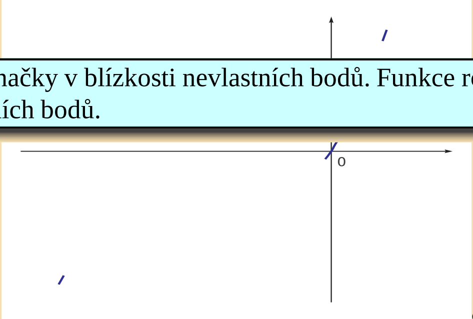
$f(+\infty) = \infty$

$f(-\infty) = -\infty$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$f(-1) = -2$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$



Nakreslíme značky v blízkosti nevlastních bodů. Funkce roste v okolí obou nevlastních bodů.

$-$ $+$

0

$\nearrow$ MAX $\searrow$ min $\nearrow$

$-\frac{5}{3}$ -1

$\cap$ in. $\cup$

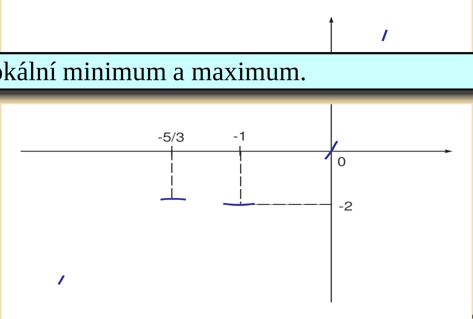
$-\frac{4}{3}$

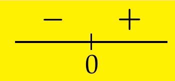
$f(0) = 0$
$f(+\infty) = \infty$
$f(-\infty) = -\infty$

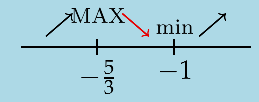
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$
$$f(-1) = -2$$

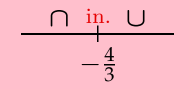
$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

Nakreslíme lokální minimum a maximum.





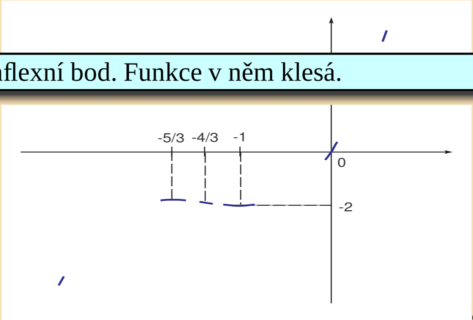




$$f(0) = 0$$
$$f(+\infty) = \infty$$
$$f(-\infty) = -\infty$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$
$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$



Nakreslíme inflexní bod. Funkce v něm klesá.

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \nearrow & \text{MAX} \searrow & & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -\frac{5}{3} & & -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \cap & \text{in.} & \cup \\ \hline & -\frac{4}{3} & \end{array}$$

$f(0) = 0$

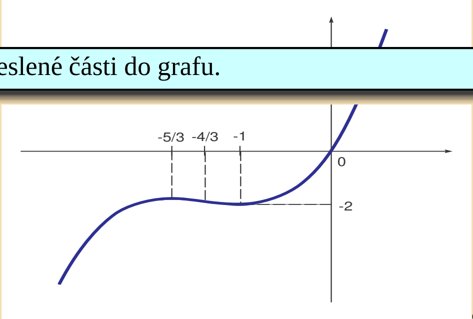
$f(+\infty) = \infty$

$f(-\infty) = -\infty$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$

$f(-1) = -2$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$



Spojíme nakreslené části do grafu.

$-$ $+$

0

$\nearrow$ MAX $\searrow$ min $\nearrow$

$-\frac{5}{3}$ -1

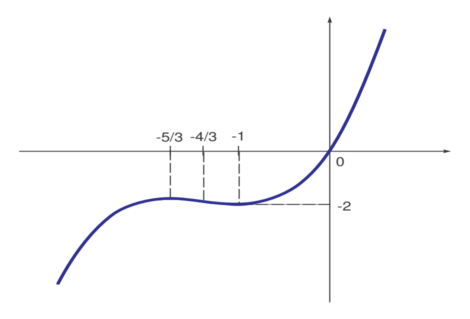
$\cap$ in. $\cup$

$-\frac{4}{3}$

$$f(0) = 0$$
$$f(+\infty) = \infty$$
$$f(-\infty) = -\infty$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{50}{27}$$
$$f(-1) = -2$$

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$



$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\},$

Určíme definiční obor z podmínky

$$x - 1 \neq 0.$$

Platí

$$x \neq 1.$$

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

$$y(0) = \frac{2(0 - 0 + 1)}{(0-1)^2} = 2$$

- Určíme průsečík s osou y.
- Dosadíme $x = 0$ a hledáme $y(0)$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$,

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = 0$$

- Určíme průsečík s osou x.
- Dosadíme $y = 0$ a řešíme rovnici

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2,$$

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

Čitatel musí být nula.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

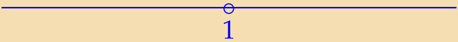
$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = 0$$
$$x^2 - x + 1 = 0$$

Tato kvadratická rovnice nemá řešení, protože má záporný diskriminant.

$$D = b^2 - 4ac = 2 - 4.1.1 = -2 < 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

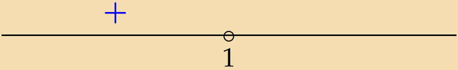
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x



Nakreslíme osu x a bod nespojitosti $x = 1$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

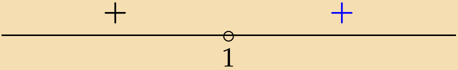
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x



Víme, že $y(0) = 2 > 0$. Funkce je kladná na $(-\infty, 1)$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

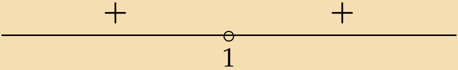
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x



Vypočteme $y(2) = \dfrac{2(4-2+1)}{(2-1)^2} > 0$. Funkce je kladná na $(1, \infty)$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x



$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

Určíme jednostranné limity v bodě nespojitosti

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$\begin{array}{ccc} + & & + \\ \hline & \circ & \\ & 1 & \end{array}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0} \right\|$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{0} \right\|$$

Dosadíme $x = 1$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$\begin{array}{ccc} & + & & + & \\ \hline & & 1 & & \end{array}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

Jmenovatel je v obou případech kladné číslo.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$+$ $\quad$ 1 $\quad$ $+$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

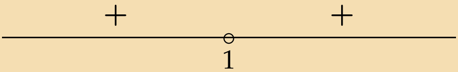
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

Určíme limity v $\pm\infty$.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x



$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} =$$

Uvažujeme jenom vedoucí členy.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$\begin{array}{ccc} + & & + \\ \hline & \circ & \\ & 1 & \end{array}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \left\| \frac{2}{+0} \right\| = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1} = 2$$

Funkce má limitu v $\pm\infty$. Přímka $y = 2$ je asymptotou ke grafu v $\pm\infty$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$y' = 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}\right)'$$

Vypočteme derivaci.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$y' = 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}\right)'$$
$$= 2\frac{(2x-1)(x-1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x-1)(1-0)}{((x-1)^2)^2}$$

- Užijeme vzorec pro derivaci podílu. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
- Užijeme vzorec pro derivaci složené funkce při derivování výrazu $(x-1)^2$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$y' = 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}\right)'$$
$$= 2\frac{(2x-1)(x-1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x-1)(1-0)}{((x-1)^2)^2}$$
$$= 2(x-1)\frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)2}{(x-1)^4}$$

Vytkneme $(x-1)$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$\begin{aligned}
y' &= 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}\right)' \\
&= 2\frac{(2x-1)(x-1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x-1)(1-0)}{((x-1)^2)^2} \\
&= 2(x-1)\frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)2}{(x-1)^4} \\
&= 2\frac{2x^2 - 2x - x + 1 - (2x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

Roznásobíme závorky a zkrátíme $(x-1)$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$\begin{aligned}
y' &= 2\left(\frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}\right)' \\
&= 2\,\frac{(2x-1)(x-1)^2 - (x^2 - x + 1)2(x-1)(1-0)}{((x-1)^2)^2} \\
&= 2(x-1)\,\frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)2}{(x-1)^4} \\
&= 2\,\frac{2x^2 - 2x - x + 1 - (2x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^3} \\
&= 2\,\frac{-x-1}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{y=\frac{2(x^2-x+1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $y(0)=2$, není průs. s osou x

$$\begin{aligned}
y' &= 2\left(\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}\right)'\\
&= 2\,\frac{(2x-1)(x-1)^2-(x^2-x+1)2(x-1)(1-0)}{((x-1)^2)^2}\\
&= 2(x-1)\,\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)2}{(x-1)^4}\\
&= 2\,\frac{2x^2-2x-x+1-(2x^2-2x+2)}{(x-1)^3}\\
&= 2\,\frac{-x-1}{(x-1)^3} = -2\,\frac{x+1}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3},$$

$$-2\frac{x+1}{(x-1)^3} = 0$$

Řešíme rovnici $y' = 0$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3},$$

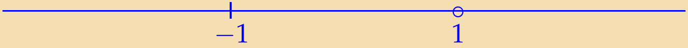
$$-2\frac{x+1}{(x-1)^3} = 0$$
$$x + 1 = 0$$
$$x = -1$$

Čitatel musí být nula. Stacionárním bodem je tedy $x = -1$.

$$y = \boxed{\frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

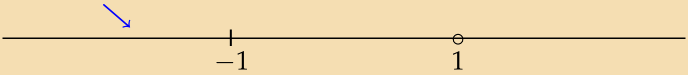
$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, $x_1 = -1$



Zakreslíme stacionární bod a bod nespojitosti.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3},\ x_1 = -1$$



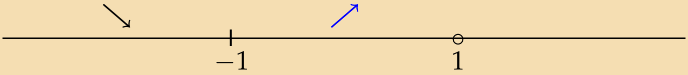
Určíme $y'(-2)$.

$$y'(-2) = -2\frac{-2+1}{(-2-1)^3} = -2\frac{\text{záporná hodnota}}{\text{záporná hodnota}} < 0$$

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3},\ x_1 = -1$$



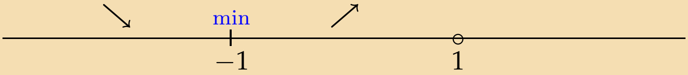
Určíme $y'(0)$.

$$y'(0) = -2\frac{0+1}{(0-1)^3} = -2\frac{\text{kladná hodnota}}{\text{záporná hodnota}} > 0$$

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, $x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$



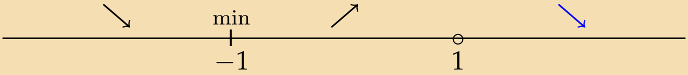
Lokální minimum pro $x = -1$. Funkční hodnota je

$$y(-1) = \frac{2((-1)^2 - (-1) + 1)}{(-1-1)^2} = \frac{2.3}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3},\ x_1 = -1 \ldots \text{lok. minimum},\ y(-1) = \frac{3}{2}$$



$$\boxed{y'(2) = -2\frac{2+1}{(2-1)^3} = -2\frac{3}{1} < 0}$$

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, $x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$$y'' = -2\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)'$$

Vypočteme druhou derivaci.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3}$, $x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \frac{3}{2}$

$$y'' = -2\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)'$$
$$= -2\frac{1(x-1)^3 - (x+1)3(x-1)^2(1-0)}{((x-1)^3)^2}$$

- Použijeme pravidlo pro derivaci podílu.
- Jmenovatel budeme derivovat jako složenou funkci.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, $x_1 = -1 \dots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned} y'' &= -2\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)' \\ &= -2\frac{1(x-1)^3 - (x+1)3(x-1)^2(1-0)}{((x-1)^3)^2} \\ &= -2(x-1)^2\frac{(x-1)-(x+1)3}{(x-1)^6} \end{aligned}$$

Vytkneme $(x-1)^2$ v čitateli.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, $x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned} y'' &= -2\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)' \\ &= -2\frac{1(x-1)^3 - (x+1)3(x-1)^2(1-0)}{((x-1)^3)^2} \\ &= -2(x-1)^2\frac{(x-1) - (x+1)3}{(x-1)^6} \\ &= -2\frac{-2x-4}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

Upravíme.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, $x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$$\begin{aligned} y'' &= -2\left(\frac{x+1}{(x-1)^3}\right)' \\ &= -2\frac{1(x-1)^3 - (x+1)3(x-1)^2(1-0)}{((x-1)^3)^2} \\ &= -2(x-1)^2\frac{(x-1)-(x+1)3}{(x-1)^6} \\ &= -2\frac{-2x-4}{(x-1)^4} = 4\frac{x+2}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

Obdrželi jsme druhou derivaci.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, $x_1 = -1 \dots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$y'' = 4\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$,

$$4\frac{x+2}{(x-1)^4} = 0$$

Řešíme $y'' = 0$.

$$\boxed{y=\frac{2(x^2-x+1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $y(0)=2$, není průs. s osou x

$y'=-2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, $x_1=-1\ldots$ lok. minimum, $y(-1)=\dfrac{3}{2}$

$y''=4\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$, $x_2=-2$

$$4\frac{x+2}{(x-1)^4}=0$$

$$x+2=0$$

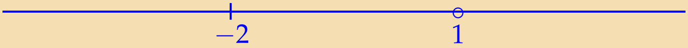
$$x=-2$$

Jediné řešení je $x=-2$.

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, $x_1 = -1 \ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$y'' = 4\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$, $x_2 = -2$



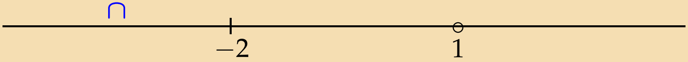
Určíme intervaly konvexnosti a konkavity.

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není průs. s osou x

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3},\ x_1 = -1 \ldots \text{lok. minimum},\ y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4\frac{x+2}{(x-1)^4},\ x_2 = -2$$



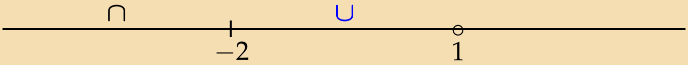
$$y''(-3) = 4\frac{-3+2}{\text{kladná hodnota}} < 0$$

$$y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y(0) = 2$, není prûs. s osou x

$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3},\ x_1 = -1 \ldots \text{lok. minimum},\ y(-1) = \frac{3}{2}$$

$$y'' = 4\frac{x+2}{(x-1)^4},\ x_2 = -2$$

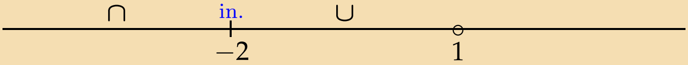


$$y''(0) = 4\frac{0+2}{\text{kladná hodnota}} > 0$$

$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}}$$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y(0) = 2$, není průs. s osou x

$y' = -2\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, $x_1 = -1\ldots$ lok. minimum, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$

$y'' = 4\dfrac{x+2}{(x-1)^4}$, $x_2 = -2$



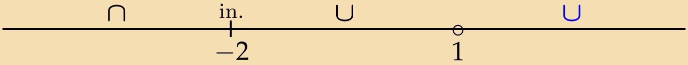
Inflexní bod v bodě $x = -2$. Funkční hodnota je

$$y(-2) = \frac{14}{9}.$$

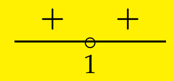
$$\boxed{y = \frac{2(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\},\ y(0) = 2, \text{ není průs. s osou } x$$

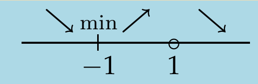
$$y' = -2\frac{x+1}{(x-1)^3},\ x_1 = -1 \ldots \text{lok. minimum},\ y(-1) = \frac{3}{2}$$

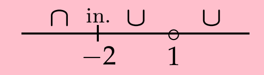
$$y'' = 4\frac{x+2}{(x-1)^4},\ x_2 = -2$$



$$y''(2) = 4\frac{2+1}{\text{kladná hodnota}} > 0$$







$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

$$f(1\pm) = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = \frac{14}{9}$$

Shrneme dosavadní znalosti.

$+ \quad + $

1

$\searrow$ min $\nearrow \quad \searrow$

$-1 \quad 1$

$\cap$ in. $\cup \quad \cup$

$-2 \quad 1$

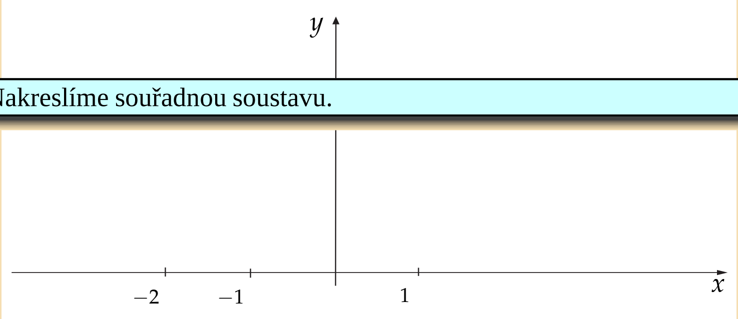
$$f(0) = 2$$

$$f(\pm\infty) = 2$$

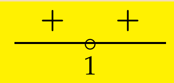
$$f(1\pm) = +\infty$$

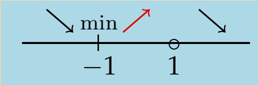
$$f(-1) = \frac{3}{2}$$

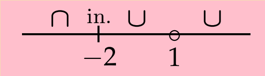
$$f(-2) = \frac{14}{9}$$



Nakreslíme souřadnou soustavu.







$f(0) = 2$

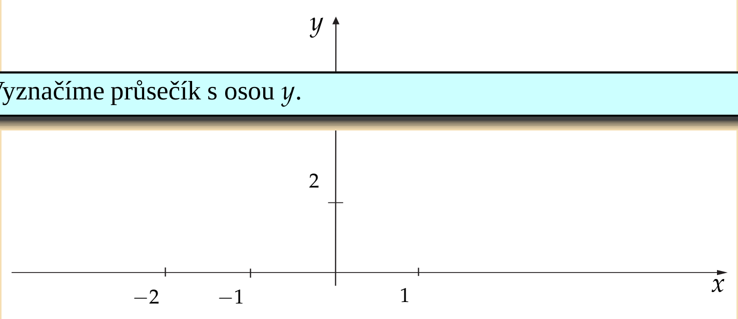
$f(\pm\infty) = 2$

$f(1\pm) = +\infty$

$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

$f(-2) = \dfrac{14}{9}$

Vyznačíme průsečík s osou y.



$+ \quad +$

1

$\searrow$ min $\nearrow \quad \searrow$

$-1 \quad 1$

$\cap$ in. $\cup \quad \cup$

$-2 \quad 1$

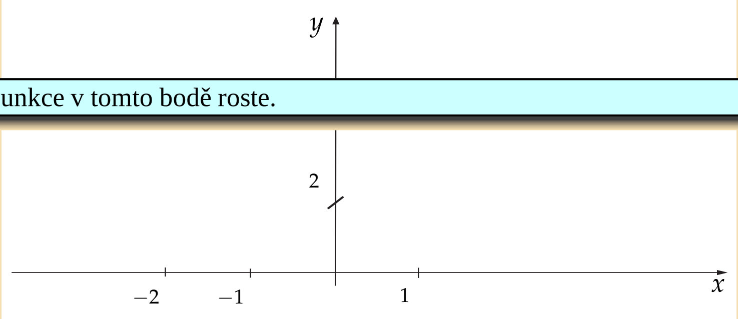
$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

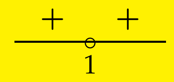
$f(1\pm) = +\infty$

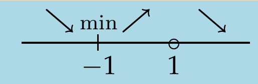
$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

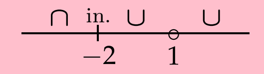
$f(-2) = \dfrac{14}{9}$



Funkce v tomto bodě roste.







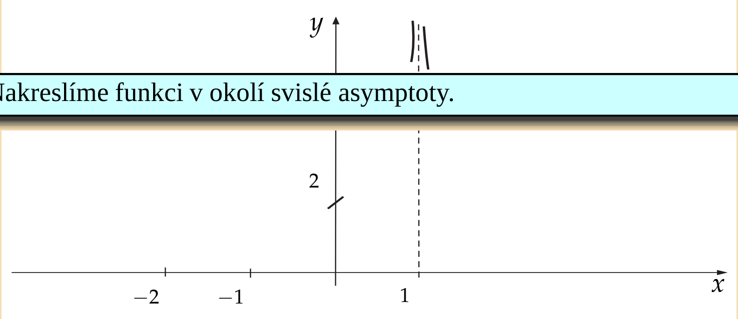
$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

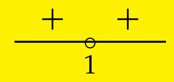
$f(1\pm) = +\infty$

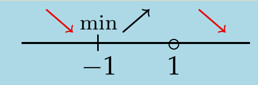
$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

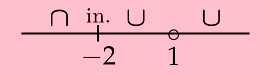
$f(-2) = \dfrac{14}{9}$



Nakreslíme funkci v okolí svislé asymptoty.







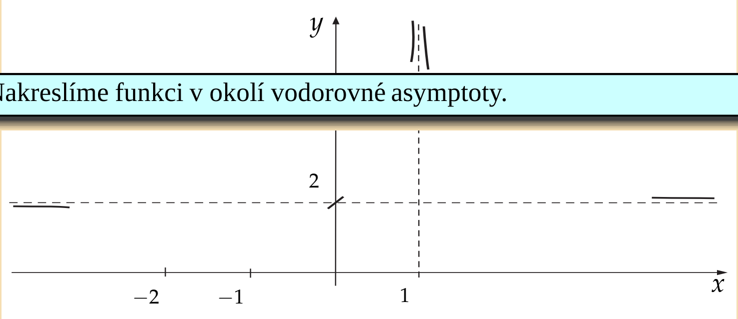
$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

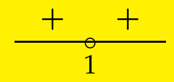
$f(1\pm) = +\infty$

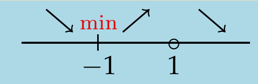
$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

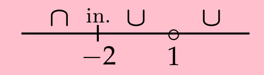
$f(-2) = \dfrac{14}{9}$



Nakreslíme funkci v okolí vodorovné asymptoty.







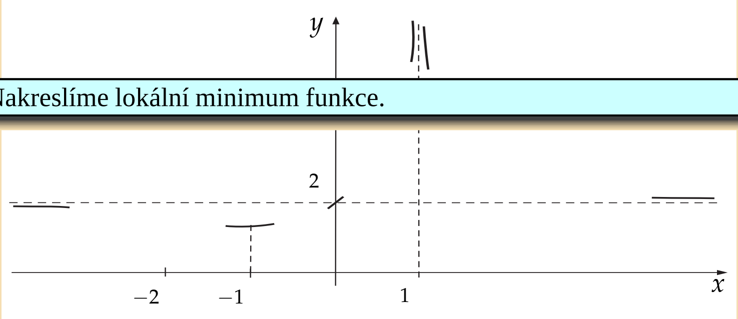
$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

$f(1\pm) = +\infty$

$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

$f(-2) = \dfrac{14}{9}$



Nakreslíme lokální minimum funkce.

$+ \quad + $

1

$\searrow \text{min} \nearrow \quad \searrow$

$-1 \quad 1$

$\cap \ \text{in.} \ \cup \quad \cup$

$-2 \quad 1$

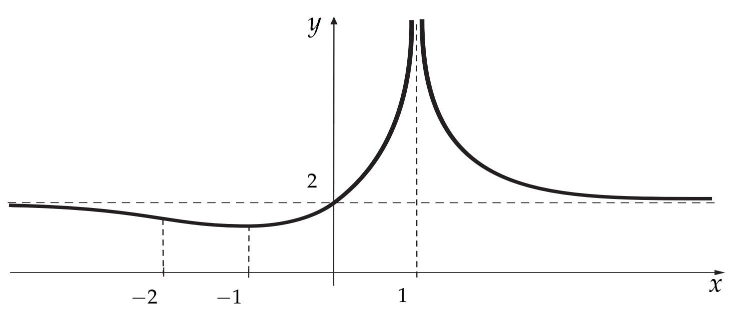
$f(0) = 2$

$f(\pm\infty) = 2$

$f(1\pm) = +\infty$

$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

$f(-2) = \dfrac{14}{9}$



$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty);$

Funkce $y(x)$ je definována pro $x + 2 \neq 0$ a $\dfrac{x^2}{x+2} > 0.$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

Plyne z nesymetričnosti definičního oboru.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$y = 0$

Hledáme průsečíky s osou x.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0$$

Položíme funkci $y(x)$ rovnu 0 .

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

Odlogaritmováním dostaneme kvadratickou rovnici.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

Vynásobíme jmenovatelem $x + 2$

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

a převedeme na levou stranu.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

Podle vzorce vypočítáme kořeny.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$\begin{aligned} x^2 &= x + 2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\ x_1 &= 2 \in D(f) \end{aligned}$$

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1$$

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

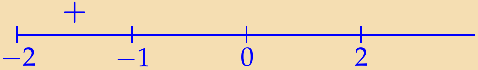
$$x_1 = 2 \in D(f)$$

$$x_2 = -1 \in D(f)$$

Oba leží v definičním oboru funkce.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

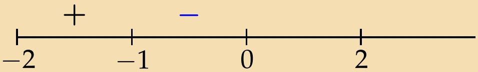
$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;



Na reálnou osu naneseme nulové body a body, kde funkce není definována

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

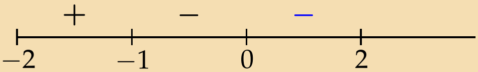
$D(f) = (-2,0) \cup (0,\infty)$; není ani sudá ani lichá;



a dosazením bodů z jednotlivých intervalů zjistíme znaménko funkce.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

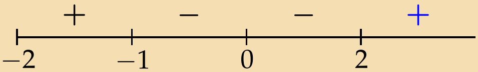
$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;



a dosazením bodů z jednotlivých intervalů zjistíme znaménko funkce.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;



a dosazením bodů z jednotlivých intervalů zjistíme znaménko funkce.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Vypočteme limitu funkce v $+\infty$

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Podle věty o limitě složené funkce zaměníme pořadí limity a logaritmu.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1}$$

Pro řešení limity použijeme např. L'Hospitalovo pravidlo.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2,0) \cup (0,\infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} = \infty$$

Funkce $\ln x$ pro $x \longrightarrow \infty$ diverguje.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Chování funkce na levém okraji definičního oboru určíme výpočtem limity funkce v bodě -2 zprava.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to-2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Zaměníme pořadí limity a logaritmu,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+} \frac{4}{x+2}$$

částečně dosadíme a

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to-2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \left\| \frac{4}{0_+} \right\|$$

dostáváme limitu typu $\left\| \dfrac{4}{0_+} \right\|$,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to-2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \infty$$

což je nekonečno.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to-2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \infty$$

$$\lim_{x\to0_\pm} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Chování funkce v okolí dalšího nedefinovaného bodu 0 určíme výpočtem limity funkce v bodě 0 zprava a zleva.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to-2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+}\frac{4}{x+2}$$

$$= \left\|\frac{4}{0_+}\right\| = \infty$$

$$\lim_{x\to0_\pm} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to0_\pm}\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

Zaměníme pořadí limity a logaritmu,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2,0) \cup (0,\infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \infty$$

$$\lim_{x\to 0_\pm} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to 0_\pm} \left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to 0_\pm} \frac{x^2}{2}$$

částečně dosadíme a

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to -2_+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \infty$$

$$\lim_{x\to 0_\pm} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to 0_\pm}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to 0_\pm} \frac{x^2}{2} = \ln\left\| \frac{0_+}{2} \right\|$$

v obou případech dostáváme typ $\left\| \dfrac{0_+}{2} \right\|$,

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to-2_+} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to-2_+} \frac{4}{x+2}$$

$$= \left\| \frac{4}{0_+} \right\| = \infty$$

$$\lim_{x\to 0_\pm} \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to 0_\pm}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = \ln \lim_{x\to 0_\pm} \frac{x^2}{2} = \ln \left\| \frac{0_+}{2} \right\| = -\infty$$

proto lze dosadit do logaritmu, který je definován pouze pro pravé okolí nuly.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2}$$

Funkce $y(x)$ je složená, proto nejdříve derivujeme vnější složku

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+2}{x^2}\,\frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2}$$

a násobíme derivací vnitřní složky. Tu derivujeme jako podíl.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+2}{x^2}\,\frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{1}{x^2}\,\frac{x^2+4x}{x+2}$$

Zelené části se zkrátí,

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+2}{x^2} \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \frac{x^2 + 4x}{x+2} \\ &= \frac{x(x+4)}{x^2(x+2)} \end{aligned}$$

v čitateli vytkneme x

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x+2}{x^2}\,\frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\,\frac{x^2+4x}{x+2} \\ &= \frac{x(x+4)}{x^2(x+2)} \\ &= \frac{x+4}{x(x+2)} \end{aligned}$$

a zkrátíme.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y' = 0$$

Hledáme stacionární body.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y' = 0$$

$$\frac{x+4}{x(x+2)} = 0$$

Dosadíme vypočtenou derivaci funkce.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ \frac{x+4}{x(x+2)} &= 0 \\ x+4 &= 0 \end{aligned}$$

Zlomek je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeho čitatel.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

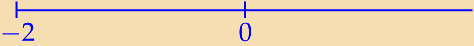
$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ \frac{x+4}{x(x+2)} &= 0 \\ x+4 &= 0 \\ x &= -4 \notin D(f) \end{aligned}$$

Vypočtená hodnota neleží v definičním oboru funkce, proto funkce nemá žádný stacionární bod.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

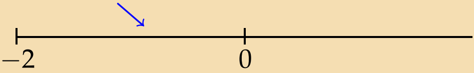


Znaménko derivace se tedy může měnit jen v bodech, kde není definována.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

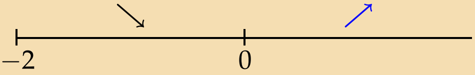
$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$



Do červeně označené derivace dosadíme body z jednotlivých intervalů. Kladné znaménko znamená, že zde funkce roste, záporné, že klesá.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$



Do červeně označené derivace dosadíme body z jednotlivých intervalů. Kladné znaménko znamená, že zde funkce roste, záporné, že klesá.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y'' = \left(\frac{x+4}{x(x+2)}\right)'$$

Druhou derivaci dostaneme derivací první,

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y'' = \left(\frac{x+4}{x(x+2)}\right)' = \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2}$$

kterou derivujeme jako podíl.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$y'' = \left(\frac{x+4}{x(x+2)}\right)'$$

$$= \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 2x^2 - 8x - 2x - 8}{x^2(x+2)^2}$$

V čitateli nelze nic vytknout, proto jej roznásobíme

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{x+4}{x(x+2)}\right)' \\ &= \frac{x(x+2) - (x+4)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 2x^2 - 8x - 2x - 8}{x^2(x+2)^2} \\ &= -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

a příslušné mocniny sečteme.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2,0) \cup (0,\infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$y'' = 0$$

Hledáme inflexní body.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

Dosadíme vypočtenou druhou derivaci funkce.

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$\begin{aligned} y'' &= 0 \\ -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} &= 0 \\ x^2+8x+8 &= 0 \end{aligned}$$

Zlomek je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeho čitatel.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

$$x^2+8x+8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-32}}{2}$$

Podle vzorce vypočítáme kořeny kvadratické rovnice.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$y'' = 0$$

$$-\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2} = 0$$

$$x^2+8x+8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-32}}{2}$$

$$x_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{2}$$

Upravíme.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

x_1 není inflexní bod, protože neleží v definičním oboru funkce,

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \quad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$

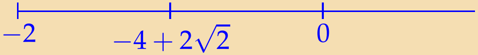
x_2 leží v definičním oboru funkce.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}\qquad D(f) = (-2,0) \cup (0,\infty);\ \text{není ani sudá ani lichá;}$$

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \qquad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4-2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4+2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



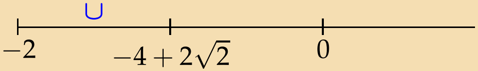
Znaménko druhé derivace se tedy může měnit jen v bodech, kde není definována a v bodě x_2.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}\quad D(f) = (-2,0) \cup (0,\infty); \text{ není ani sudá ani lichá;}$$

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \qquad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



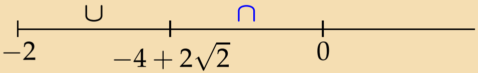
Do červeně označené druhé derivace dosadíme body z jednotlivých intervalů. Kladné znaménko znamená, že je zde funkce konvexní, záporné, že je konkávní.

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \qquad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



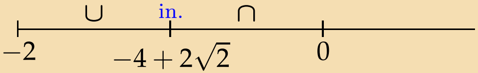
funkce se v x_2 mění z konvexní na konkávní,

$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$ $D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \qquad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$



x_2 je proto inflexním bodem,

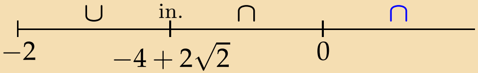
$$\boxed{y = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}$$

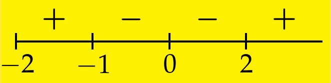
$D(f) = (-2, 0) \cup (0, \infty)$; není ani sudá ani lichá;

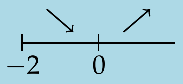
$$y' = \frac{x+4}{x(x+2)}, \qquad y'' = -\frac{x^2+8x+8}{x^2(x+2)^2},$$

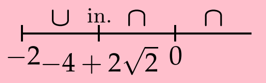
$$x_1 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D(f)$$

$$x_2 = -4 + 2\sqrt{2} \doteq -1.17 \in D(f)$$









$f(-1) = 0$

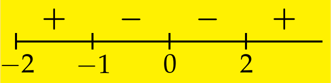
$f(2) = 0$

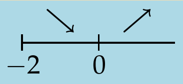
$f(\infty) = \infty$

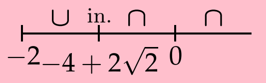
$f(0\pm) = -\infty$

$f(-4+2\sqrt{2}) \doteq 0.505$

Vypíšeme nejdůležitější výsledky.



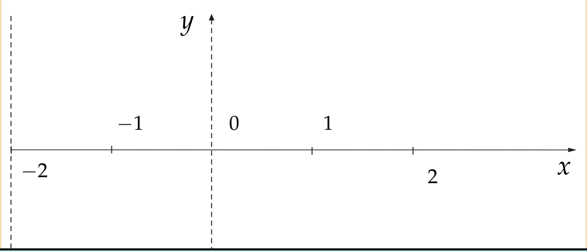




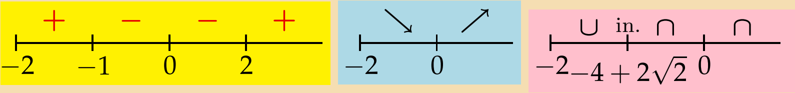
$f(-1) = 0$
$f(2) = 0$

$f(\infty) = \infty$
$f(0\pm) = -\infty$

$f(-4+2\sqrt{2}) \doteq$
0.505



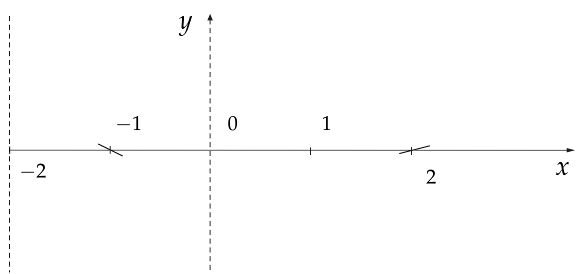
Zakreslíme souřadný systém. Pro hodnoty menší nebo rovny -2 a v 0 funkce není definována.



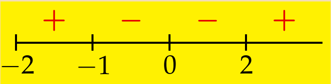
$f(-1) = 0$
$f(2) = 0$

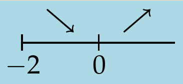
$f(\infty) = \infty$
$f(0\pm) = -\infty$

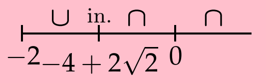
$f(-4+2\sqrt{2}) \doteq 0.505$



Vyznačíme průsečíky s osou x. Funkce klesá v bodě -1 a roste v bodě 2.







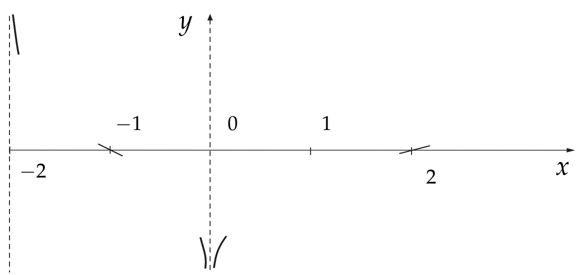
$f(-1) = 0$

$f(2) = 0$

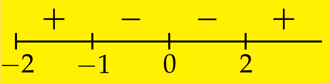
$f(\infty) = \infty$

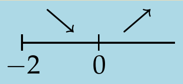
$f(0\pm) = -\infty$

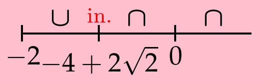
$f(-4+2\sqrt{2}) \doteq 0.505$



Nakreslíme funkci v okolí svislých asymptot.







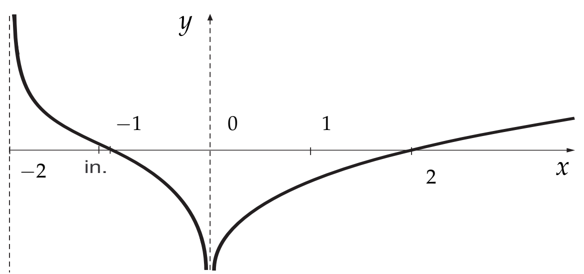
$f(-1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(\infty) = \infty$

$f(0\pm) = -\infty$

$f(-4+2\sqrt{2}) \doteq 0.505$



Vyznačíme inflexní bod a spojíme graf.

$$y = (x+1)e^x$$

$y = (x+1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R};$

Definiční obor je celá množina $\mathbb{R}$.

$y = (x+1)e^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$,

Dosadíme $x = 0$ do předpisu funkce $f(x)$ a dostaneme průsečík s osou y.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$,

$$(x+1)e^x = 0$$

Řešením rovnice $y = 0$ dostaneme průsečík s osou x.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$,

$$(x+1)e^x = 0$$
$$x + 1 = 0$$

- Součin je roven nule právě tehdy, když je roven nule jeden z činitelů.
- Činitel e^x je vždy kladné číslo.

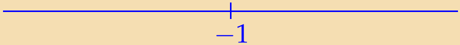
$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$$\begin{aligned} (x+1)e^x &= 0 \\ x+1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Průsečík s osou x je $x = -1$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

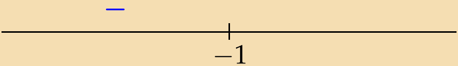
$$
\begin{aligned}
(x+1)e^x &= 0 \\
x+1 &= 0 \\
x &= -1
\end{aligned}
$$



- Na osu x zaneseme průsečík.
- Nemáme žádné body nespojitosti.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$$\begin{aligned}(x+1)e^x &= 0\\ x+1 &= 0\\ x &= -1\end{aligned}$$

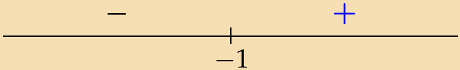


$f(-2) = (-2+1)\cdot e^{-2} = -e^{-2} < 0$

Funkční hodnota $f(-2)$ je záporná a protože se znaménko na intervalu $(-\infty, -1)$ nemůže změnit, je funkce záporná na celém tomto intervalu.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$$
\begin{aligned}
(x+1)e^x &= 0\\
x+1 &= 0\\
x &= -1
\end{aligned}
$$



$f(-2) = (-2+1)\cdot e^{-2} = -e^{-2} < 0$
$f(0) = 1 > 0$

Funkce je kladná v $x = 0$, tedy také na $(-1, \infty)$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

- Vypočteme limity v $\pm\infty$. Začneme limitou v $+\infty$.
- Platí $\infty + 1 = \infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x+1)e^x = (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0$$

Vypočteme limitu v $-\infty$. "Dosadíme" $x = -\infty$ a dostaneme $-\infty + 1 = -\infty$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Dostáváme neurčitý výraz $0 \times \infty$. K výpočtu tedy musíme použít jinou metodu.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)e^x = \infty\cdot\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x = (-\infty)\cdot e^{-\infty} = (-\infty)\cdot 0$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

- Přepíšeme výraz na zlomek $\boxed{e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}}$. Limita je ve tvaru, kdy je možno použít L'Hospitalovo pravidlo.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} (x+1)e^x &= (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0 \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}}\end{aligned}$$

Použijeme L'Hospitalovo pravidlo (derivujeme zvlášť čitatel a jmenovatel). Funkci e^{-x} derivujeme jako složenou: $(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = e^{-x} \cdot (-1)$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty} (x+1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} (x+1)e^x &= (-\infty) \cdot e^{-\infty} = (-\infty) \cdot 0 \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -e^x\end{aligned}$$

Zjednodušíme.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)e^x = \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x &= (-\infty)\cdot e^{-\infty} = (-\infty)\cdot 0 \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -e^x = -e^{-\infty} = 0
\end{aligned}$$

Dosadíme. Z grafu funkce vidíme, že $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

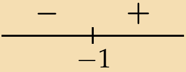
$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

Vyšetříme chování derivace.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;



$$y' = (x+1)' \cdot e^x + (x+1) \cdot (e^x)'$$

Funkci $y = (x+1) \cdot e^x$ derivujeme jako součin:
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} y' &= {\color{red}(x+1)'} \cdot e^x + (x+1) \cdot {\color{green}(e^x)'} \\ &{\color{blue}=} {\color{red}1} {\color{blue}\cdot e^x + (x+1)} \cdot {\color{green}e^x} \end{aligned}$$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

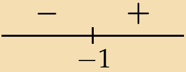
$$\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline & \\[-1.5ex] \multicolumn{2}{c}{-1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} y' &= (x+1)' \cdot e^x + (x+1) \cdot (e^x)' \\ &= 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x \\ &= e^x(1 + x + 1) \end{aligned}$$

Vytkneme e^x.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

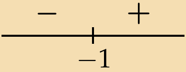


$$\begin{aligned}
y' &= (x+1)' \cdot e^x + (x+1) \cdot (e^x)' \\
&= 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x \\
&= e^x(1+x+1) \\
&= e^x(x+2)
\end{aligned}$$

Zjednodušíme.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;



$y' = e^x(x+2)$;

Dostáváme derivaci.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

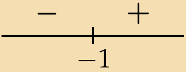
$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

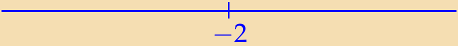
- Derivace je rovna nule právě tehdy, když $\boxed{(x+2) = 0}$, jelikož $e^x \neq 0$. Dostáváme stacionární bod $x = -2$.
- Dosadíme $f(-2) = (-2+1)e^{-2} = -e^{-2}$ a s pomocí kalkulátoru dostaneme $f(-2) \doteq -0.14$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;



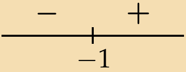
$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$



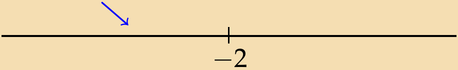
Na reálnou osu zaneseme stacionární bod. Nemáme žádné body nespojitosti.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou y je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;



$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$



Zvolíme např. $x = -3$ a dosadíme do první derivace:
$y'(-3) = e^{-3}(-3+2) = -e^{-3} < 0$. Funkce v bodě $x = -3$ klesá a totéž platí na celém intervalu $(-\infty, -2)$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

Dosazením $x = 0$ do první derivace máme $y'(0) = e^0(0+2) = 2 > 0$. Funkce v bodě roste $x = 0$ a to také platí na celém intervalu $(-2, \infty)$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou y je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

V bodě $x = -2$ má funkce lokální minimum.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

$$y'' = e^x \cdot (x+2) + e^x \cdot 1$$

Spočteme y''. Derivujeme $y' = e^x \cdot (x+2)$ jako součin $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou y je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} y'' &= e^x \cdot (x+2) + e^x \cdot 1 \\ &= e^x(x+2+1) \\ &= e^x(x+3) \end{aligned}$$

Zjednodušíme.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$-$ $+$

-1

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$\searrow$ min $\nearrow$

-2

$y'' = e^x(x+3)$;

Máme druhou derivaci.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

$y'' = e^x(x+3)$; $y'' = 0$ pro $x = -3$, $f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$

Hledáme bod, ve kterém platí $y'' = 0$. Protože e^x je vždy různá od nuly, musí platit $(x+3) = 0$, proto $x = -3$.
$f(-3) = (-3+1)e^{-3} = -2e^{-3} \doteq -0.01$

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0, 1]$, průsečík s osou y je $[-1, 0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} & - & + \\ \hline & & -1 \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

$y'' = e^x(x+3)$; $y'' = 0$ pro $x = -3$, $f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$

$$\begin{array}{c} \hline -3 \end{array}$$

Nakreslíme reálnou osu s kritickým bodem. Nemáme žádný bod nespojitosti, proto se druhá derivace může měnit pouze v bodě $x = -3$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$$\begin{array}{ccc} \searrow & \text{min} & \nearrow \\ \hline & -2 & \end{array}$$

$y'' = e^x(x+3)$; $y'' = 0$ pro $x = -3$, $f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$

$$\begin{array}{ccc} \cap & & \\ \hline & -3 & \end{array}$$

Funkce ke na intervalu $(-\infty, -3)$ konkávní, protože $-4 \in (-\infty, -3)$ a $y''(-4) = e^{-4}(-4+3) = -e^{-4} < 0$.

$\boxed{y=(x+1)e^x}$ $D(f)=\mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty)=\infty$, $f(-\infty)=0$;

$-$ $+$

-1

$y'=e^x(x+2)$; stac. bod je $x=-2$; $f(-2)=-e^{-2}\doteq -0.14$

$\searrow$ min $\nearrow$

-2

$y''=e^x(x+3)$; $y''=0$ pro $x=-3$, $f(-3)=-2e^{-3}\doteq -0.01$

$\cap$ $\cup$

-3

Funkce je konvexní na intervalu $(-3,\infty)$, protože $-2\in(-3,\infty)$ a v bodě $x=-2$ je lok. minimum a $y''(-2)=e^{-2}(-2+3)=e^{-2}>0$.

$\boxed{y = (x+1)e^x}$ $D(f) = \mathbb{R}$; průsečík s osou y je $[0,1]$, průsečík s osou y je $[-1,0]$,

$f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = 0$;

$-$ $+$

-1

$y' = e^x(x+2)$; stac. bod je $x = -2$; $f(-2) = -e^{-2} \doteq -0.14$

$\searrow$ min $\nearrow$

-2

$y'' = e^x(x+3)$; $y'' = 0$ pro $x = -3$, $f(-3) = -2e^{-3} \doteq -0.01$

$\cap$ in. $\cup$

-3

Bod $x = -3$ je tedy inflexní.

$-\quad +$

-1

$\searrow$ min $\nearrow$

-2

$\cap$ in. $\cup$

-3

$$f(0) = 1$$
$$f(-1) = 0$$

$$f(-2) \doteq -0.14$$
$$f(-3) \doteq -0.01$$

$$f(+\infty) = \infty$$
$$f(-\infty) = 0$$

Shrneme dosažené výpočty.

$-\quad +$
-1

$\searrow \text{min} \nearrow$
-2

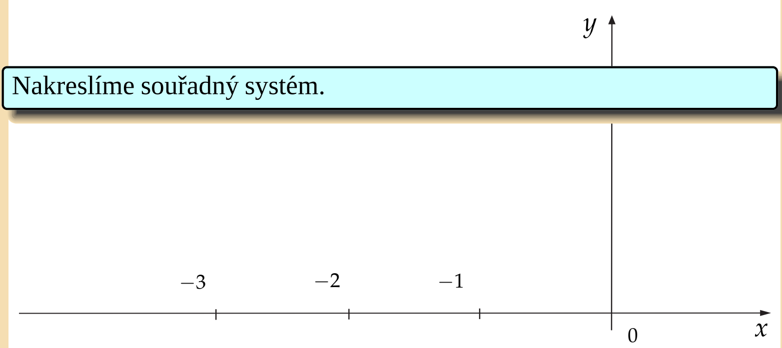
$\cap \text{ in. } \cup$
-3

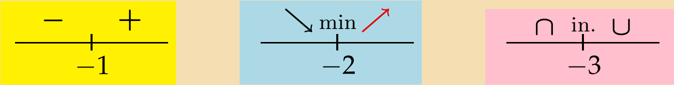
$f(0) = 1$
$f(-1) = 0$

$f(-2) \doteq -0.14$
$f(-3) \doteq -0.01$

$f(+\infty) = \infty$
$f(-\infty) = 0$

Nakreslíme souřadný systém.





$f(0) = 1$

$f(-1) = 0$

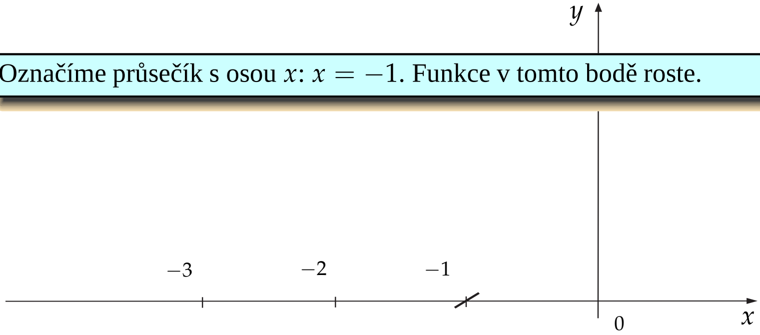
$f(-2) \doteq -0.14$

$f(-3) \doteq -0.01$

$f(+\infty) = \infty$

$f(-\infty) = 0$

Označíme průsečík s osou x: $x = -1$. Funkce v tomto bodě roste.



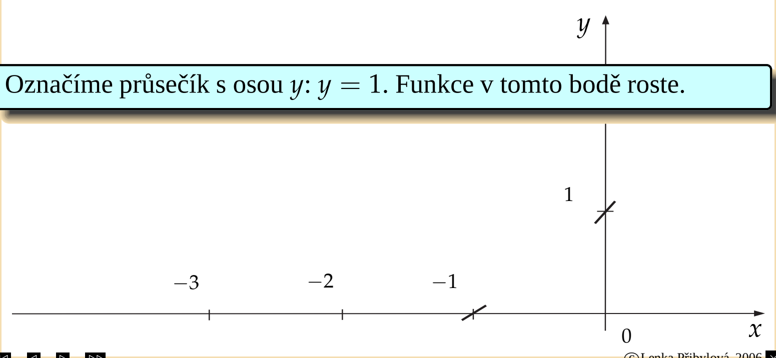
$-\quad +$ -1	$\searrow$ min $\nearrow$ -2	$\cap$ in. $\cup$ -3

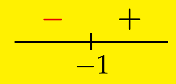
$f(0) = 1$
$f(-1) = 0$

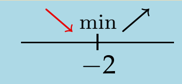
$f(-2) \doteq -0.14$
$f(-3) \doteq -0.01$

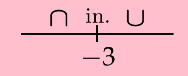
$f(+\infty) = \infty$
$f(-\infty) = 0$

Označíme průsečík s osou y: $y = 1$. Funkce v tomto bodě roste.





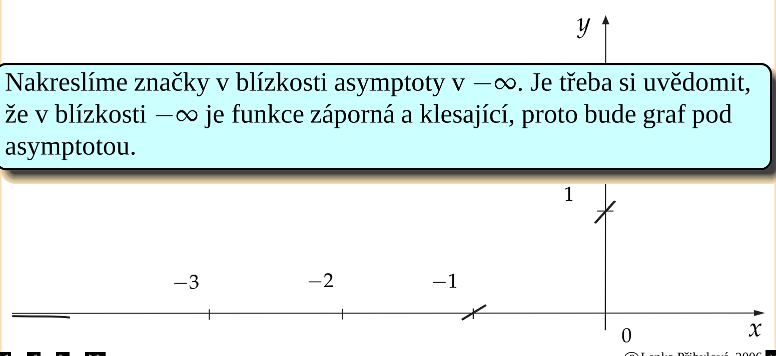




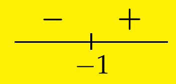
$f(0) = 1$
$f(-1) = 0$

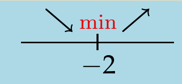
$f(-2) \doteq -0.14$
$f(-3) \doteq -0.01$

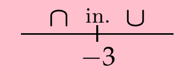
$f(+\infty) = \infty$
$f(-\infty) = 0$



Nakreslíme značky v blízkosti asymptoty v $-\infty$. Je třeba si uvědomit, že v blízkosti $-\infty$ je funkce záporná a klesající, proto bude graf pod asymptotou.



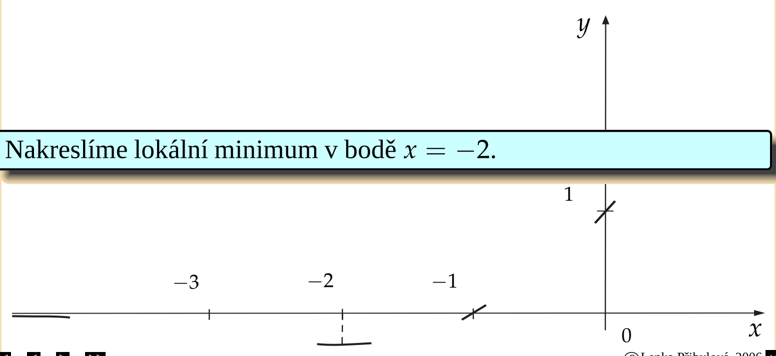




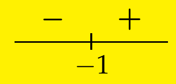
$f(0) = 1$
$f(-1) = 0$

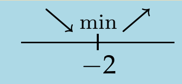
$f(-2) \doteq -0.14$
$f(-3) \doteq -0.01$

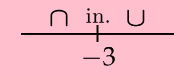
$f(+\infty) = \infty$
$f(-\infty) = 0$



Nakreslíme lokální minimum v bodě $x = -2$.

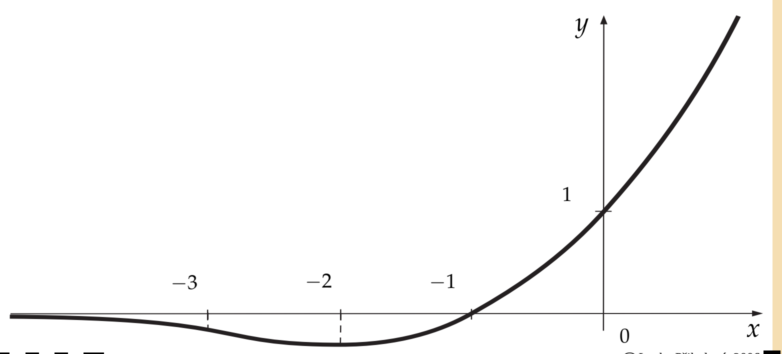






$f(0) = 1$ $f(-2) \doteq -0.14$ $f(+\infty) = \infty$

Spojíme nakreslené části do grafu.



KONEC