

Integrace rac. lomené funkce typu

$$\frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}$$

Robert Mařík a Lenka Příbylová

28. července 2006

Obsah

$\int \frac{x+5}{x^2+4} dx$	3
$\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$	7

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4} dx$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4} dx$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2+4} dx \\ &= \int \frac{x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4} dx \end{aligned}$$

- Derivace jmenovatele je $2x$, v čitateli však není násobek této funkce.
- Vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ nelze přímo použít.
- Rozdělíme zlomek na dva.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2+4} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4} dx \end{aligned}$$

- V prvním zlomku je v čitateli polovina derivace jmenovatele.
- Proto první zlomek vynásobíme a vydělíme dvěma.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2+4} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + 5 \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C$
- $\int \frac{1}{A^2+x^2} dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A}$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{(2x-4)}{x^2-4x+9} dx \end{aligned}$$

V čitateli potřebujeme derivaci jmenovatele, tj. výraz $(2x-4)$.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+9} dx \end{aligned}$$

- Musíme upravit zlomek tak, aby se zlomky v prvním a druhém integrálu rovnaly.
- K těmto úpravám použijeme jenom multiplikativní a aditivní konstanty (nenadělají “moc velkou neplechu” při integraci).
- Přidáním násobku $\frac{1}{2}$ máme ve druhém zlomku v čitateli výraz $\frac{1}{2}(2x-4) = x-2$. Koeficient u x je v pořádku.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+9} dx \end{aligned}$$

- $\frac{1}{2}(2x-4) = x-2$
- $\frac{1}{2}(2x-4)+2 = x$
- Nyní je v čitateli jenom x . Chybí číslo 5.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \end{aligned}$$

- $\frac{1}{2}(2x-4) = x-2$
- $\frac{1}{2}(2x-4)+2 = x$
- $\frac{1}{2}(2x-4)+2+5 = x+5$
- První a druhý zlomek jsou stejné, nedopustili jsme se žádné úpravy, která by změnila hodnotu zlomku.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \end{aligned}$$

Rozdělíme zlomek na dva.

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5} dx \end{aligned}$$

Doplníme na čtverec ve jmenovateli druhého zlomku.

$$x^2 - 4x + 9 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 4 + 9 = (x-2)^2 + 5$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{A^2+x^2} dx = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A}, \text{ kde v našem případě } A = \sqrt{5},$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b), \text{ v našem případě } a = 1$$

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+9| + \frac{7}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C \end{aligned}$$

Upravíme.

KONEC