

# Radiologická fyzika

Michal Lenc

30. září 2013

# Moderní diagnostické metody

**MRI** – zobrazení pomocí jaderné magnetické resonance (magnetic resonance imaging)

**CT** – zobrazení pomocí absorpce rentgenového záření (computer tomography)

**PET** – zobrazení pomocí positronů emitovaných při  $\beta^+$  rozpadu (positron emission tomography)

**USI** – zobrazení pomocí absorpce, odrazu nebo frekvenčního posuvu ultrazvukových vln (ultrasound imaging)

# Co je to za zařízení?



CT



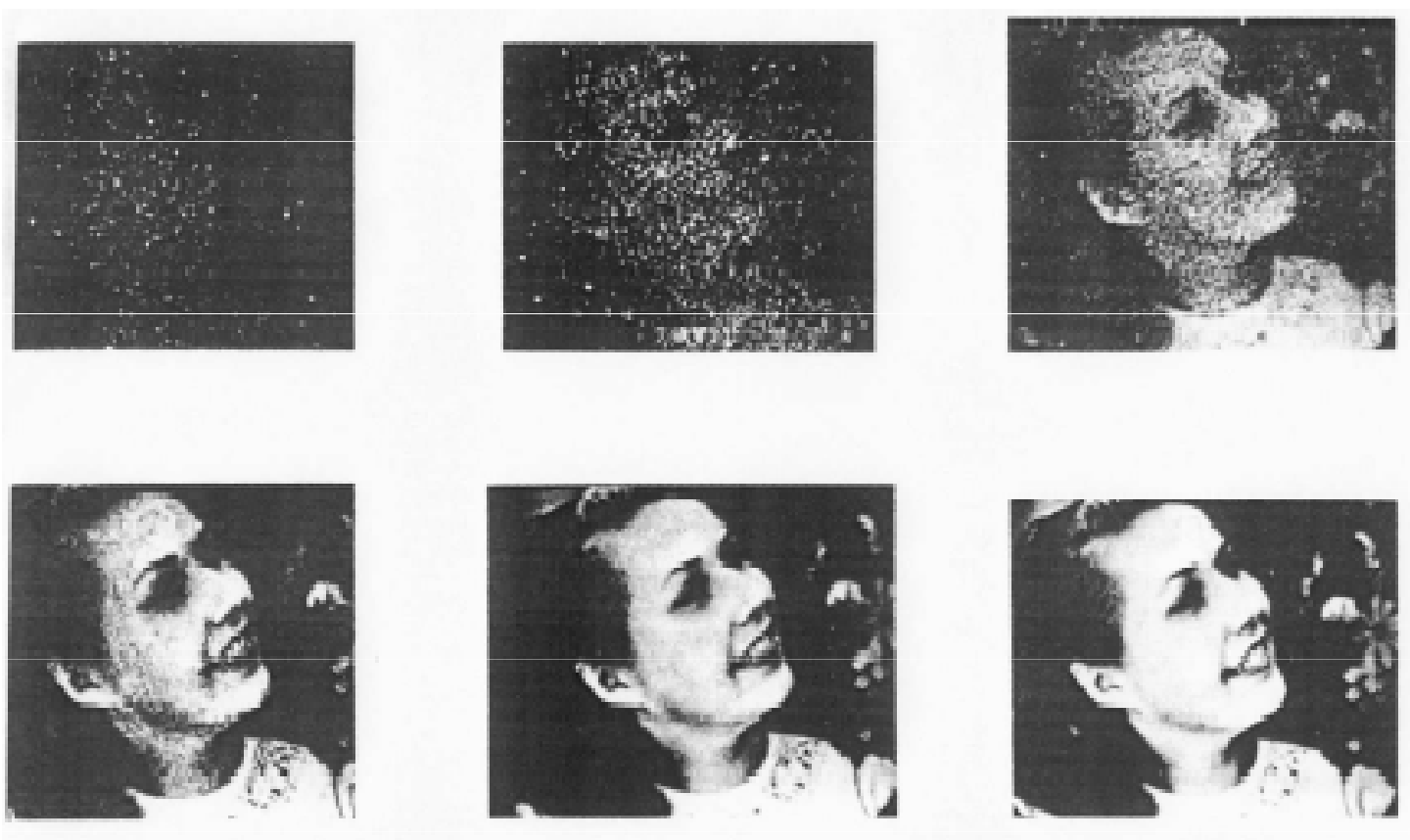
MRI

# Typický problém

Ionizující elektromagnetické záření ( $f > 3 \cdot 10^{15}$  Hz neboli  $\lambda < 100$  nm - UV, rtg a gama) má dostatek energie pro ionizaci atomů tvořících naše tělo. Ionty způsobují tvorbu volných radikálů (H, OH) a vysoce chemicky reaktivních sloučenin ( $H_2O_2$ ), které vyvolávají změny biologicky významných molekul (DNA) a vedou k biologickým účinkům jako je kancerogeneze a mutageneze. Čím vyšší je počet fotonů absorbovaných tělem a čím vyšší je energie těchto fotonů, tím vyšší je počet vytvářených volných radikálů, tím vyšší je riziko. **Ale...**

# Kvalita obrazu souvisí s dávkou

Obecně platí, že lepší obraz vyžaduje více fotonů a tím i vyšší dávku.



# Něco jaderné terminologie

Pokud se o jádra atomů zajímáme jen z hlediska různých jaderných vlastností, nikoli jako o části atomů, nazýváme je obecně **nuklidy**.

Jádro se skládá z protonů a neutronů. Počet protonů v jádře (**atomové číslo** nebo také **protonové číslo** jádra) je označováno symbolem **Z**; počet neutronů (**neutronové číslo**) symbolem **N**. Celkovému počtu neutronů a protonů v jádře říkáme **hmotnostní číslo** **A**. Máme-li na mysli jak neutrony, tak protony, používáme společného pojmenování **nukleony**.

$$A = Z + N$$

# Značení nuklidů

NUKLID	$Z$	$N$	$A$
${}^1\text{H}$	1	0	1
${}^7\text{Li}$	3	4	7
${}^{31}\text{P}$	15	16	31
${}^{84}\text{Kr}$	36	48	84
${}^{120}\text{Sn}$	50	70	120
${}^{157}\text{Gd}$	64	93	157
${}^{197}\text{Au}$	79	118	197
${}^{227}\text{Ac}$	89	138	227
${}^{239}\text{Pu}$	94	145	239

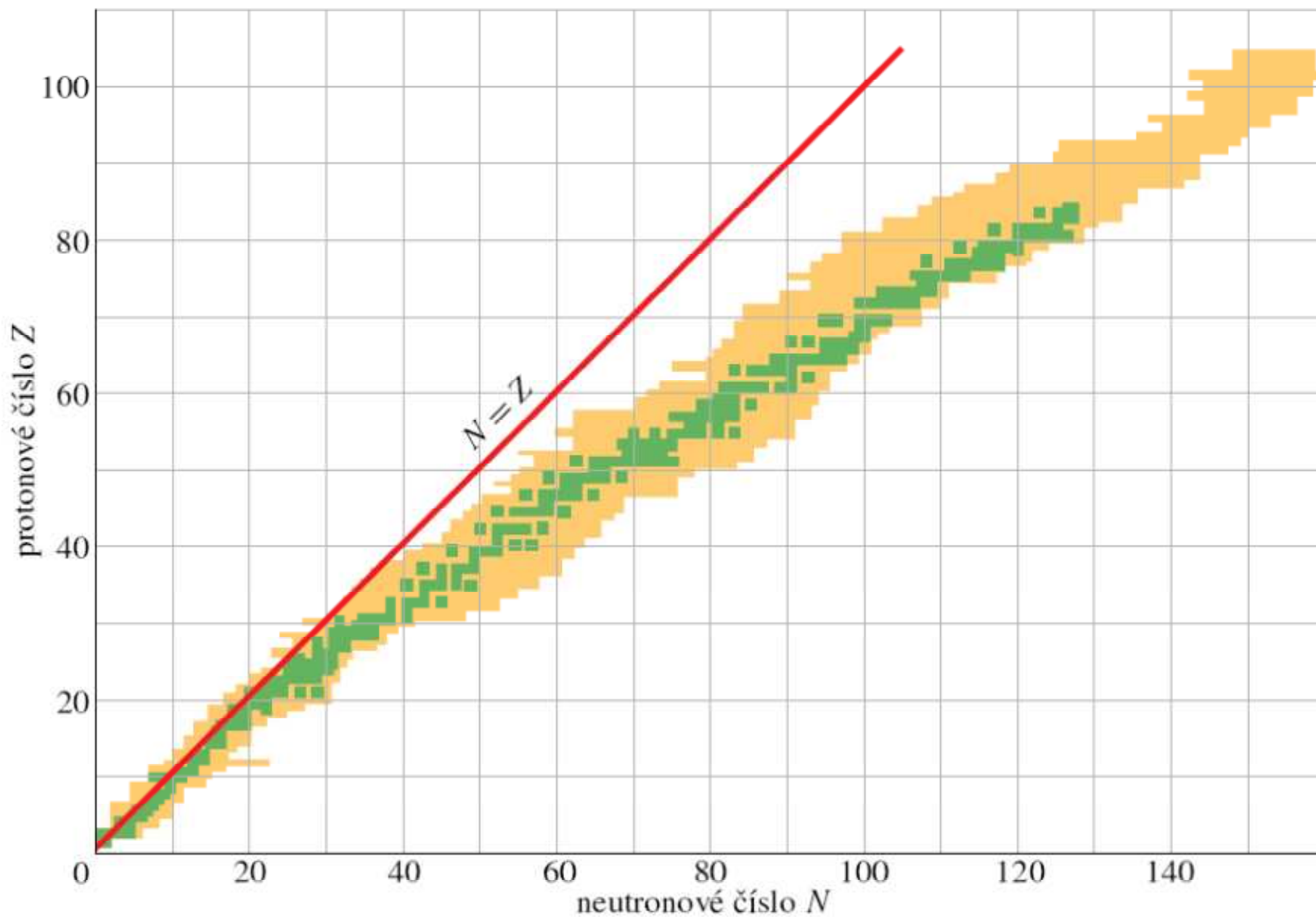
**A X**

**X**

**A X**

**Z X**

# Známé nuklidy (zeleně stabilní)





# Nuklidy v okolí zlata

The chart displays isotopes of elements near gold (Z=79) with a diagonal line representing  $A = 198$ . The y-axis is the proton number  $Z$  (76-82) and the x-axis is the neutron number  $N$  (115-121). The diagonal line  $A = 198$  passes through the  $^{198}\text{Au}$  isotope.

$Z$	$N=115$	$N=116$	$N=117$	$N=118$	$N=119$	$N=120$	$N=121$
82	$^{197}\text{Pb}$ 43 min	$^{198}\text{Pb}$ 2,4 h	$^{199}\text{Pb}$ 1,5 h	$^{200}\text{Pb}$ 21,5 h	$^{201}\text{Pb}$ 9,33 h	$^{202}\text{Pb}$ 53 000 y	$^{203}\text{Pb}$ 2,16 d
81	$^{196}\text{Tl}$ 1,84 h	$^{197}\text{Tl}$ 2,83 h	$^{198}\text{Tl}$ 5,3 h	$^{199}\text{Tl}$ 7,4 h	$^{200}\text{Tl}$ 26,1 h	$^{201}\text{Tl}$ 72,9 h	$^{202}\text{Tl}$ 12,2 d
80	$^{195}\text{Hg}$ 9,5 h	$^{196}\text{Hg}$ 0,15 %	$^{197}\text{Hg}$ 64,1 h	$^{198}\text{Hg}$ 10,0 %	$^{199}\text{Hg}$ 16,9 %	$^{200}\text{Hg}$ 23,1 %	$^{201}\text{Hg}$ 13,2 %
79	$^{194}\text{Au}$ 39,4 h	$^{195}\text{Au}$ 186 d	$^{196}\text{Au}$ 6,18 d	$^{197}\text{Au}$ 100 %	$^{198}\text{Au}$ 2,69 d	$^{199}\text{Au}$ 3,14 d	$^{200}\text{Au}$ 48,4 min
78	$^{193}\text{Pt}$ 60 y	$^{194}\text{Pt}$ 32,9 %	$^{195}\text{Pt}$ 33,8 %	$^{196}\text{Pt}$ 25,3 %	$^{197}\text{Pt}$ 18,3 h	$^{198}\text{Pt}$ 7,2 %	$^{199}\text{Pt}$ 30,8 min
77	$^{192}\text{Ir}$ 73,8 d	$^{193}\text{Ir}$ 62,7 %	$^{194}\text{Ir}$ 19,2 h	$^{195}\text{Ir}$ 2,8 h	$^{196}\text{Ir}$ 52 s	$^{197}\text{Ir}$ 5,8 min	$^{198}\text{Ir}$ $\approx 8$ s
76	$^{191}\text{Os}$ 15,4 d	$^{192}\text{Os}$ 41,0 %	$^{193}\text{Os}$ 30,5 h	$^{194}\text{Os}$ 6,0 y	$^{195}\text{Os}$ 6,5 min	$^{196}\text{Os}$ 35 min	—

# „Klasické“ třídění na $\alpha$ , $\beta$ a $\gamma$ rozpad

## $\alpha$ rozpad

Radium se změní na radon při emisi  $\alpha$  částice (jádra helia)



## obecně

Nuklid X se změní na nuklid Y při emisi  $\alpha$  částice (jádra helia)



# „Klasické“ třídění na $\alpha$ , $\beta$ a $\gamma$ rozpad

## $\beta$ rozpad

Kobalt se změní na nikl (v nabuzeném stavu) při emisi elektronu a antineutrína



## obecně

Nuklid X se změní na nuklid Y při emisi elektronu a antineutrína



# „Klasické“ třídění na $\alpha$ , $\beta$ a $\gamma$ rozpad

## $\gamma$ rozpad

Nikl v nabuzeném stavu přejde do základního stavu při emisi dvou fotonů



## obecně

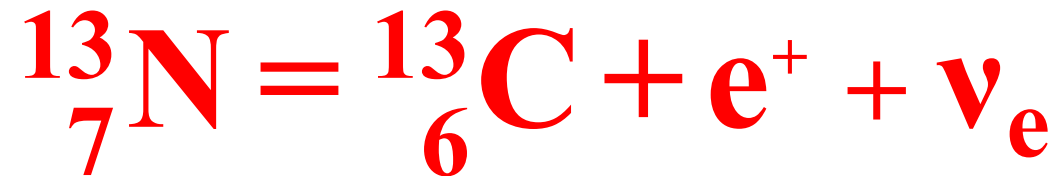
Nuklid v nabuzeném stavu  $X^*$  přejde do základního stavu  $X$  při emisi dvou fotonů



# Další typy přechodů

## $\beta^+$ rozpad

Dusík se změní na uhlík při emisi pozitronu a neutrina



## obecně

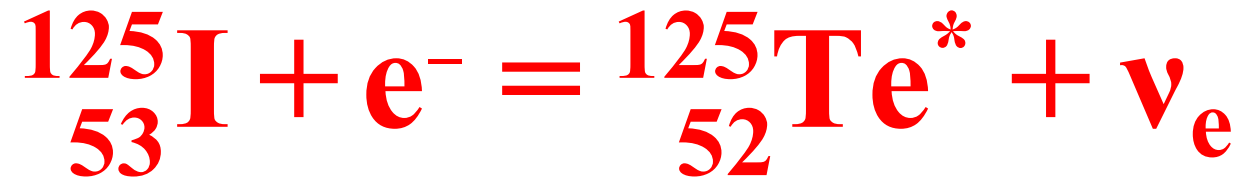
Nuklid X se změní na nuklid Y při emisi pozitronu a neutrina



# Další typy přechodů

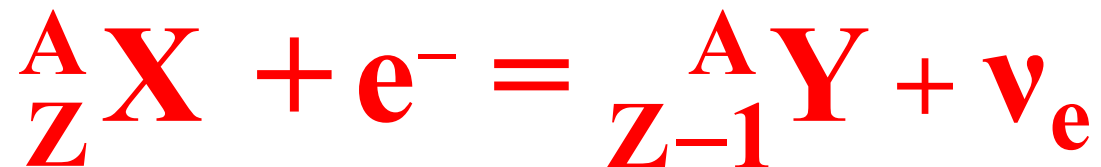
## Elektronový záchyt

Jod se přemění na tellur v nabuzeném stavu při emisi neutrina



obecně

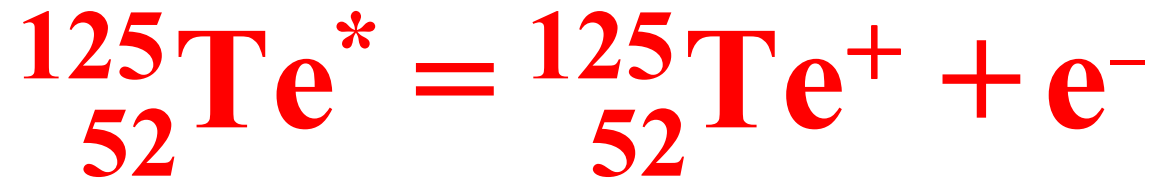
Elektron z vnitřní hladiny „se sloučí“ s protonem jádra na neutron při emisi neutrina



# Další typy přechodů

## Vnitřní konverse

Tellur z nabuzeného stavu přejde do jedenkrát ionizovaného stavu při emisi elektronu



## obecně

Prvek uvolní energii nabuzeného stavu emisí vnitřního elektronu



# Jak podrobný popis je potřeba pro porozumění jevu?

Dva příklady:

1) Stručný:

Jak je popisován na různých úrovních  $\beta$  rozpad

2) Podrobnější:

Proč jsou při  $\alpha$  rozpadu emitovány právě nuklidy helia



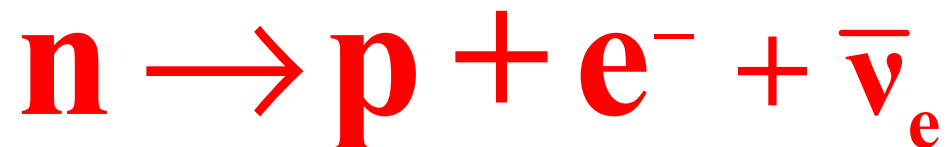
# Popis $\beta$ - rozpadu

fosfor se změní na síru  
při emisi elektronu a neutrina



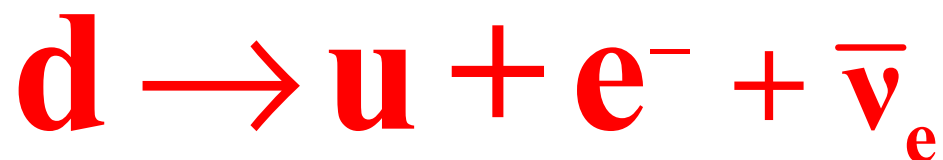
Zákon zachování počtu nukleonů (32=32) a elektrického náboje (15=16-1)

neutron se změní na proton  
při emisi elektronu a  
elektronového antineutrina



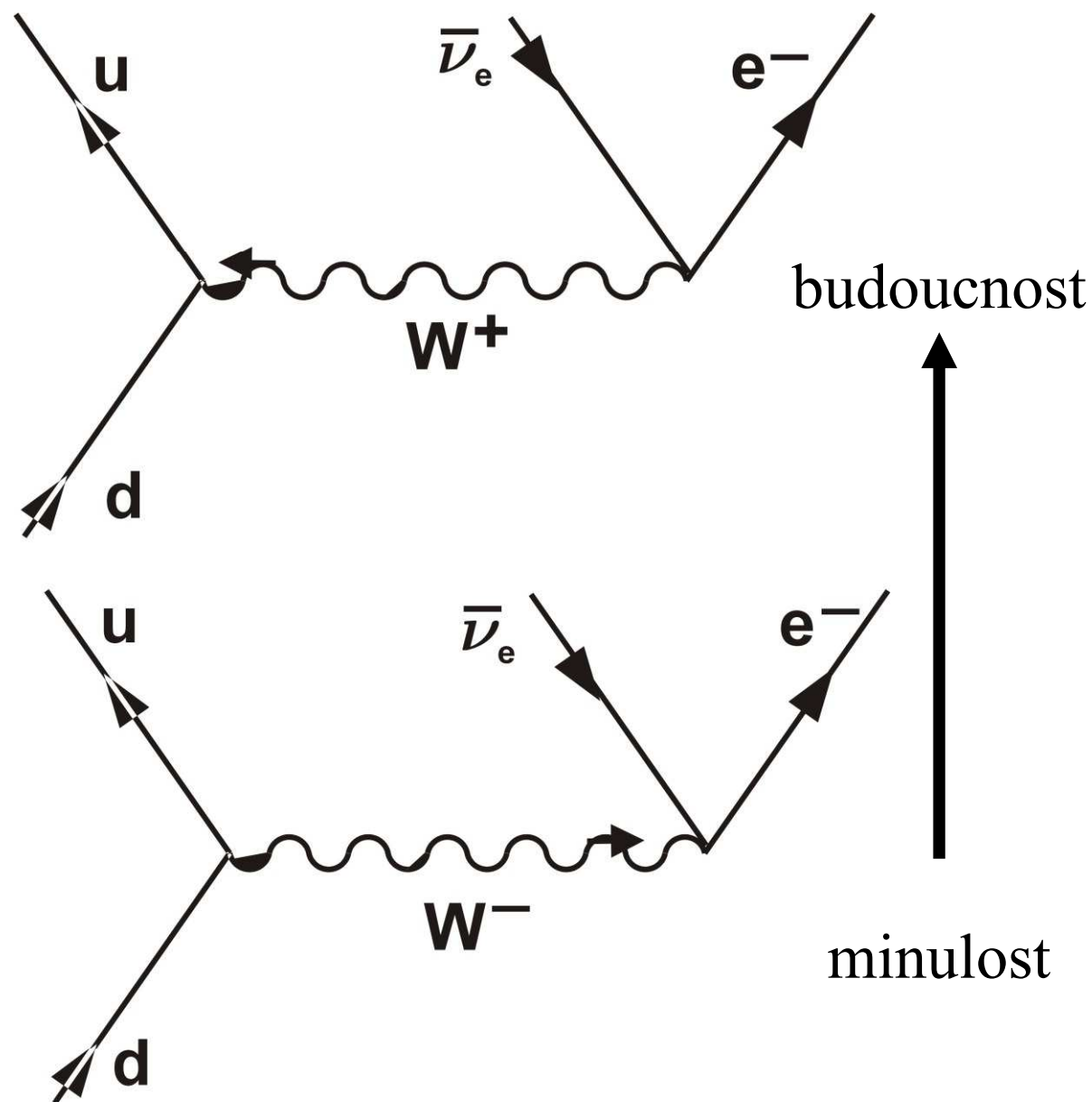
Zákon zachování baryonového (1=1), leptonového (0=1-1)  
a elektrického náboje (0=1-1)

d-kvark se změní na u-kvark  
při emisi elektronu a  
elektronového antineutrina



Zákon zachování baryonového ( $1/3=1/3$ ), leptonového (0=1-1)  
a elektrického náboje ( $-1/3=2/3-1$ )

# Popis $\beta$ - rozpadu



V každém vrcholu  
Feynmanova diagramu  
jsou splněny zákony  
zachování:

**baryonového náboje**  
**leptonového náboje**  
**elektrického náboje**  
**energie a hybnosti**

# Einsteinovy vztahy I

Vztah mezi energií  $E$  a hmotností  $m$  částice

$$E = m c^2$$

Pokud se částice pohybuje rychlostí velikosti  $v$ , platí

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

# Einsteinovy vztahy II

Vztah mezi energií fotonu  $E$  a frekvencí elmg. záření  $\omega$

$$E = \hbar \omega$$

Vztah mezi energií fotonu  $E$  a vlnovou délkou elmg. záření  $\lambda$

$$E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$$

# Fundamentální konstanty

Rychlost světla ve vakuu  $c$

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$

Planckova konstanta  $\hbar$

$$\hbar = 1,054\,571\,628(53) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

Elementární náboj  $e$

$$e = 1,602\,176\,487(40) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Newtonova gravitační konstanta  $G$

$$G = 6,674\,28(67) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

# Jednotky pro vyjádření hmotnosti

V soustavě SI je touto jednotkou kilogram. Díky Einsteinově vztahu mezi energií a hmotností částice v klidu můžeme vyjadřovat hmotnost pomocí jednotek pro energii nebo si zvolit nějakou hmotnost jako normál, se kterým budeme ostatní hmotnosti porovnávat. Pro atomovou a jadernou fyziku je vhodnou jednotkou energie elektronvolt (eV) a jeho násobky, tj. 1 eV je energie získaná nebo ztracená elementárním nábojem při překonání potenciálového rozdílu 1 V. Hmotnosti se většinou vyjadřují v  $\text{MeV}/c^2$  ( $1 \text{ MeV}=10^6 \text{ eV}$ ) nebo v atomových jednotkách hmotnosti u.

$$1 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 1,782\,661\,758(44) \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

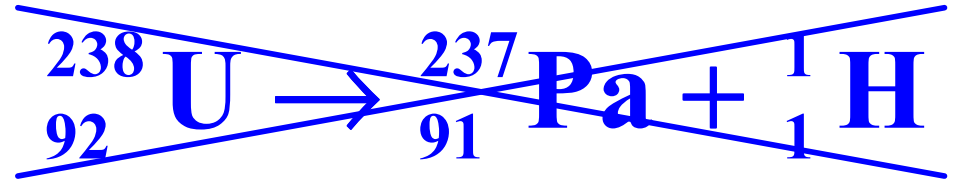
$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} m({}^{12}\text{C}) = 1,660\,538\,782(83) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

# Hmotnostní přebytek nuklidu

$$\frac{\Delta}{u} = \left( \frac{m}{u} - A \right)$$

	Z	A	$\Delta/u$
proton	1	1	0,007 276
neutron	0	1	0,008 665
deuteron	1	2	0,013 553
triton	1	3	0,015 501
helion	2	3	0,014 932
$\alpha$ částice	2	4	0,001 506

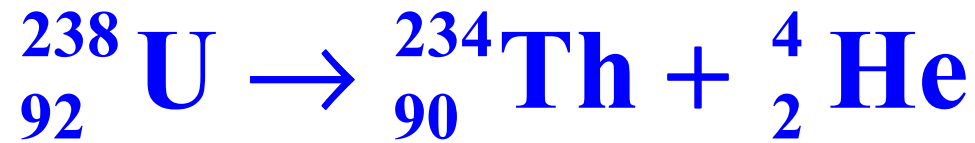
# Přirozený $\alpha$ rozpad uranu



atom	Z	A	$m[\text{u}]$
uran	92	238	238,050 79
protaktinium	91	237	237,051 21
thorium	90	234	234,043 63
helium	2	4	4,002 60
vodík	1	1	1,007 83



# Spontánní $\alpha$ rozpad uranu

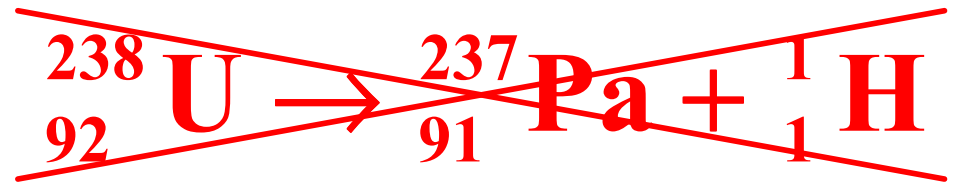


$$\Delta m c^2 =$$

$$(238,050\ 79 - 234,043\ 63 - 4,002\ 60) \text{u} c^2 =$$

$$0,004\ 56 \text{u} c^2 = \boxed{4,25 \text{MeV}}$$

Spontánní rozpad nastává, poločas rozpadu je  $4,47 \cdot 10^9$  let.



$$\Delta m c^2 =$$

$$(238,050\ 79 - 237,051\ 21 - 1,007\ 83) \text{u} c^2 =$$

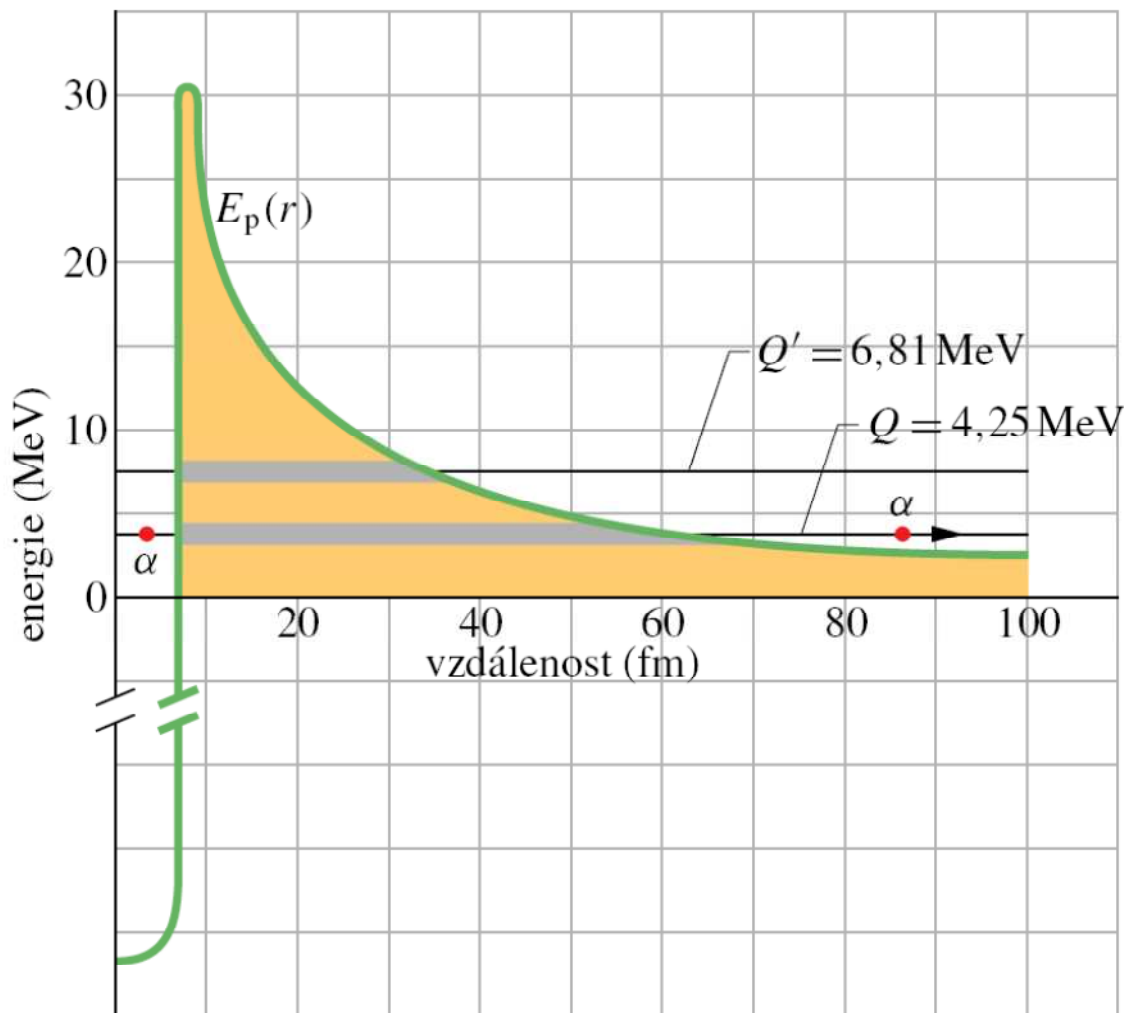
$$-0,008\ 25 \text{u} c^2 = \boxed{-7,68 \text{MeV}}$$

Spontánní rozpad nemůže nastat.

# Tunelování při $\alpha$ rozpadu uranu

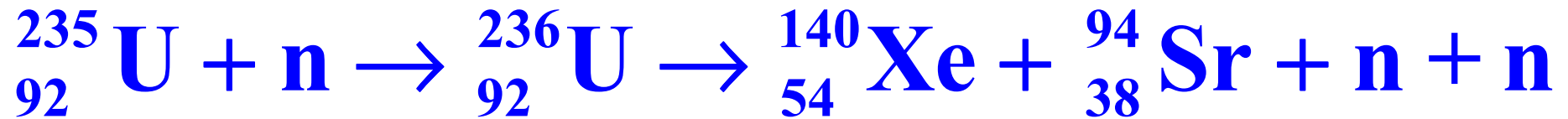


$4,5 \cdot 10^9$  let



9,1 min

# Štěpení uranu



	${}^{140}\text{Xe}$	$\rightarrow$	${}^{140}\text{Cs}$	$\rightarrow$	${}^{140}\text{Ba}$	$\rightarrow$	${}^{140}\text{La}$	$\rightarrow$	${}^{140}\text{Ce}$
$\tau$	14 s		64 s		13 d		40 h		stabilní
$Z$	54		55		56		57		58

	${}^{94}\text{Sr}$	$\rightarrow$	${}^{94}\text{Y}$	$\rightarrow$	${}^{94}\text{Zr}$
$\tau$	75 s		19 min		stabilní
$Z$	38		39		40



# Záření: částice nebo vlny?

Obecná odpověď je „ani částice, ani vlny“ nebo „někdy částice, někdy vlny“.

Elektrony, pozitrony, protony, neutrony, ...nebo vlnové funkce

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Hmotnost, rychlost,  
impuls ( = hybnost ),  
energie

$$\lambda = \frac{2\pi \hbar}{|\vec{p}|} \quad , \quad \omega = 2\pi f = \frac{E}{\hbar}$$

Vlnová délka,  
frekvence

# Záření: částice nebo vlny?

Obecná odpověď je „ani částice, ani vlny“ nebo „někdy částice, někdy vlny“.

Elektromagnetické vlnění nebo fotony

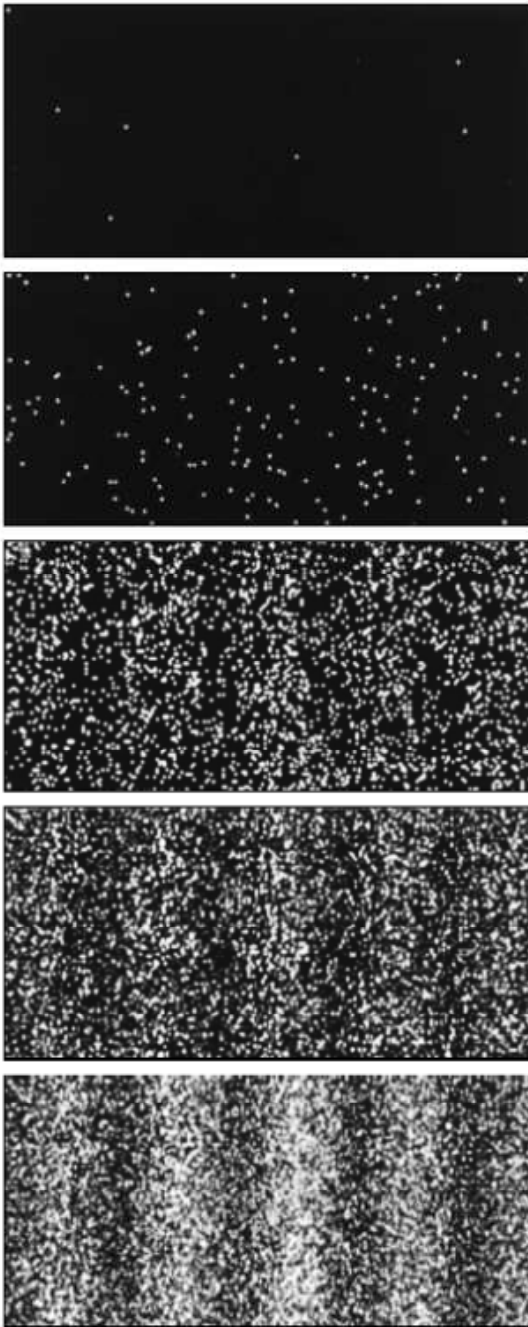
$$\lambda \quad , \quad \omega = 2\pi f$$

Vlnová délka,  
frekvence

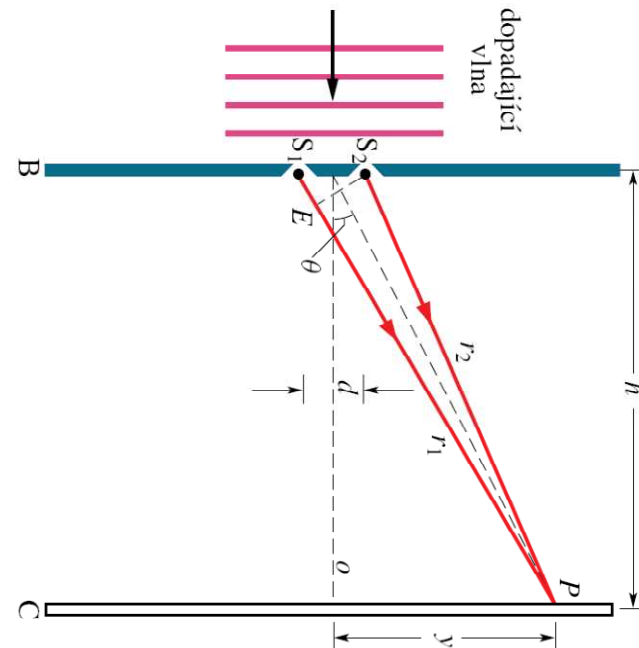
$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad , \quad E = \hbar\omega$$

Impuls ( = hybnost ),  
energie

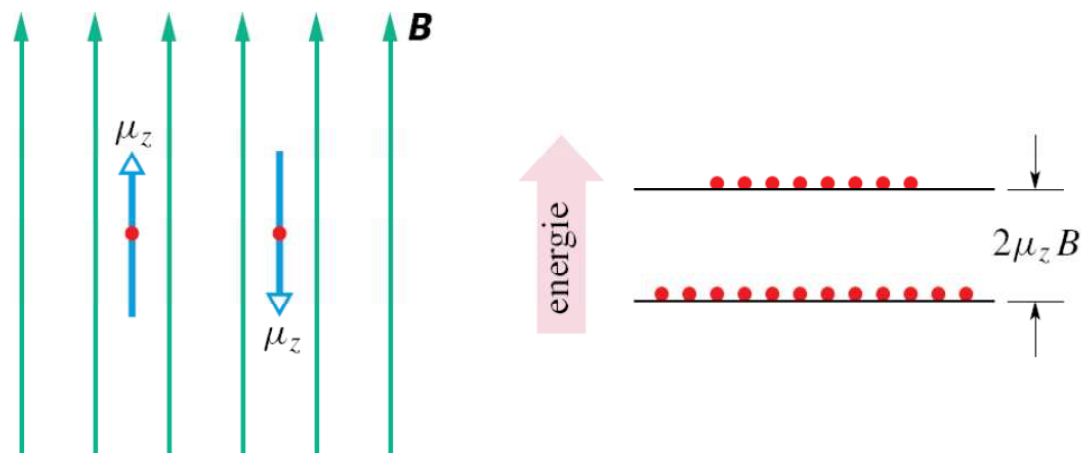
# Záření: částice nebo vlny?



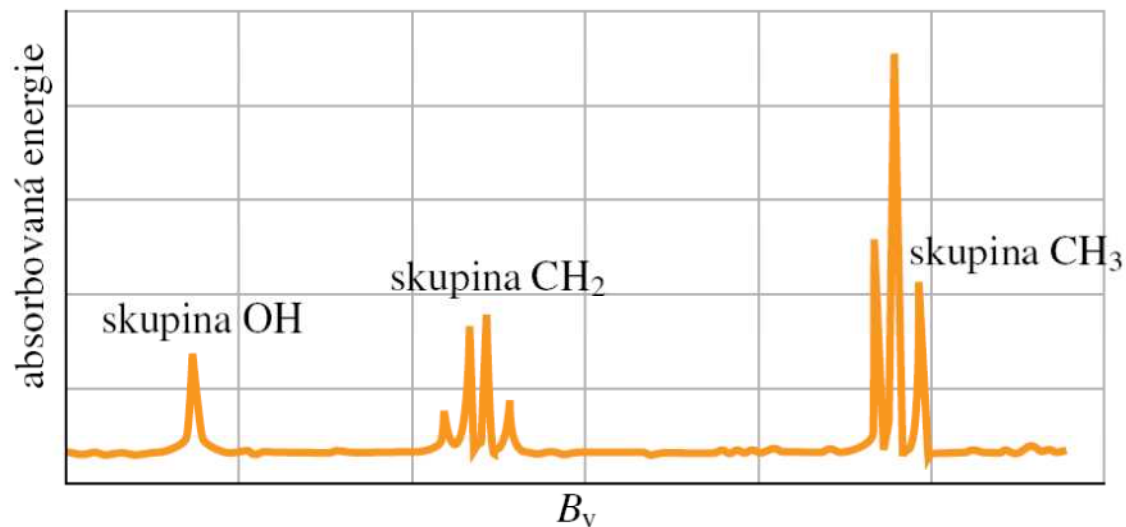
Interference je jistě projev vlnových vlastností. Ale podívejme se, jak se takový typický interferenční obrazec postupně vytváří. Jde o známou Youngovu interferenci na dvojštěrbíně (v tomto případě ne se světelnou, ale elektronovou vlnou). Obrázky vytváří postupně 7, 100, 3000, 20000 a 70000 elektronů.



# Příklad: jaderná magnetická rezonance



$$\hbar \omega = 2 \mu_z \cdot (B_{\text{vnější}} + B_{\text{vnitřní}})$$



# Příklad: jaderná magnetická rezonance





# Příklad: jaderná magnetická rezonance

Kapka vody je vložena do stálého magnetického pole  $\mathbf{B}$  o velikosti 1,80 T a střídavého elektromagnetického pole takové frekvence, aby došlo k překlápění spinů protonů. Složka  $\mu_z$  magnetického dipólového momentu protonu ve směru vektoru  $\mathbf{B}$  má velikost  $1,41 \cdot 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$ . Předpokládejme, že lokální magnetické pole můžeme proti  $\mathbf{B}$  zanedbat. Jaká musí být frekvence  $f$  a vlnová délka  $\lambda$  střídavého magnetického pole?

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (41.13) plyne

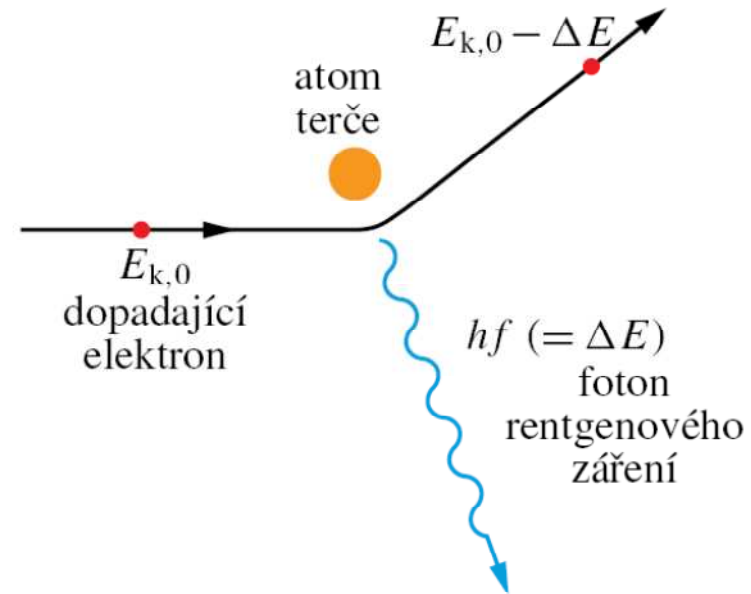
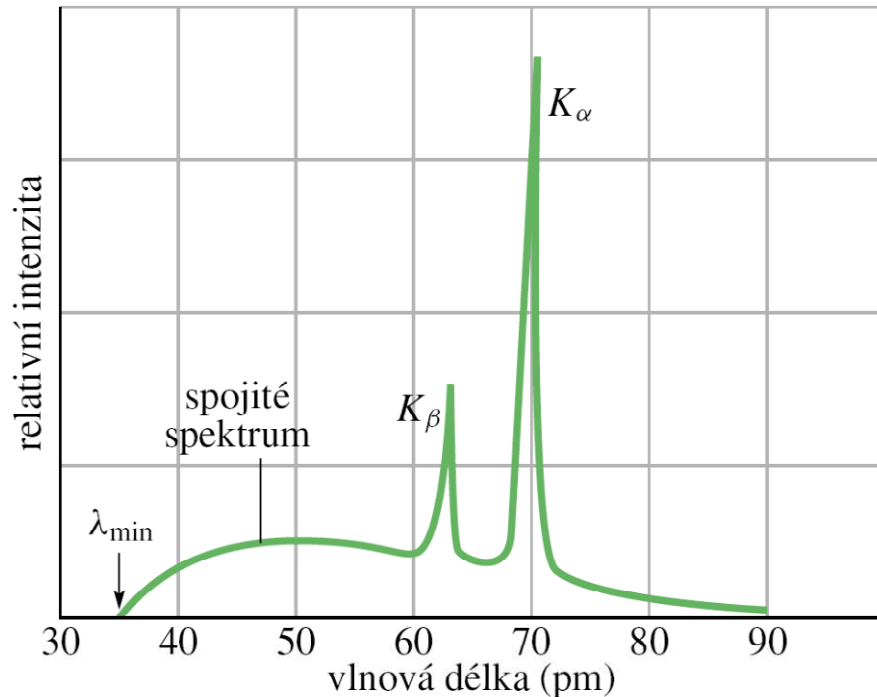
$$\begin{aligned} f &= \frac{2\mu_z B}{h} = \frac{2(1,41 \cdot 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1})(1,80 \text{ T})}{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})} = \\ &= 7,66 \cdot 10^7 \text{ Hz} = 76,6 \text{ MHz.} \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Odpovídající vlnová délka je

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{(3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})}{(7,66 \cdot 10^7 \text{ Hz})} = 3,92 \text{ m.} \quad (\text{Odpověď})$$

Tyto hodnoty frekvence a vlnové délky leží v krátkovlnné rádiové oblasti elektromagnetického spektra.

# Příklad: rentgenové záření



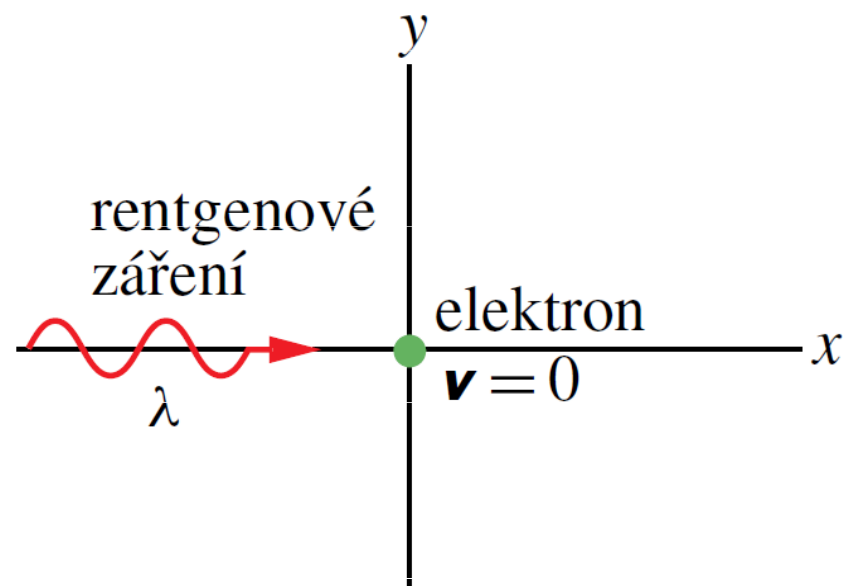
Svazek elektronů o energii 35,0 keV dopadá na molybdenový terč a vytváří tak rentgenové záření, jehož spektrum je znázorněno na obr. 41.15.

(a) Jaká je prahová vlnová délka?

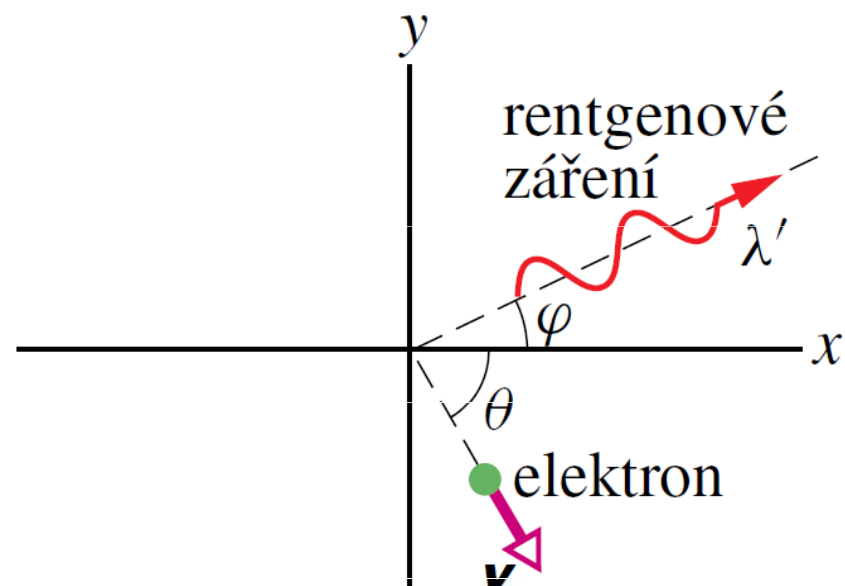
**ŘEŠENÍ:** Z rov. (41.15) plyne

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} &= \frac{hc}{E_{k,0}} = \frac{(4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})}{(35,0 \cdot 10^3 \text{ eV})} = \\ &= 3,55 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 35,5 \text{ pm.} \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$

# Příklad: Comptonův rozptyl



počáteční stav



výsledný stav

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \varphi)$$

# Jak vypočítat Comptonův posuv?

Zákon zachování energie

$$hf = hf' + mc^2(\gamma - 1)$$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} + mc(\gamma - 1)$$

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad , \quad f' = \frac{c}{\lambda'}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1$$

Zákon zachování hybnosti

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \varphi + \gamma m v \cos \theta$$

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \varphi - \gamma m v \sin \theta$$

# **Příště**

**Hmota se skládá z atomů**

**Atomy**

**Zmínka o kvantové  
teorii**