

Radiologická fyzika

Zákony zachování

Soustava SI

Jednotky v radiologii

14. října 2013

Zákon zachování energie

Richard Feynman o energii

Je důležité si uvědomit, že dnešní fyzika neví, co energie je. Netvrdíme, že se energie vyskytuje v nějakých malých dávkách o přesně dané velikosti. Tak to prostě není. Nicméně máme vzorce pro výpočet určitých číselných hodnot, a když ta čísla všechna sečteme, dají vždycky totéž.

Když vypočítáváme energii, občas její část systém opouští a občas zase zvenku přichází. Když chceme zákon zachování ověřit, musíme si dát pozor, aby žádná energie ani zvenku nepřišla, ani ven neodešla.

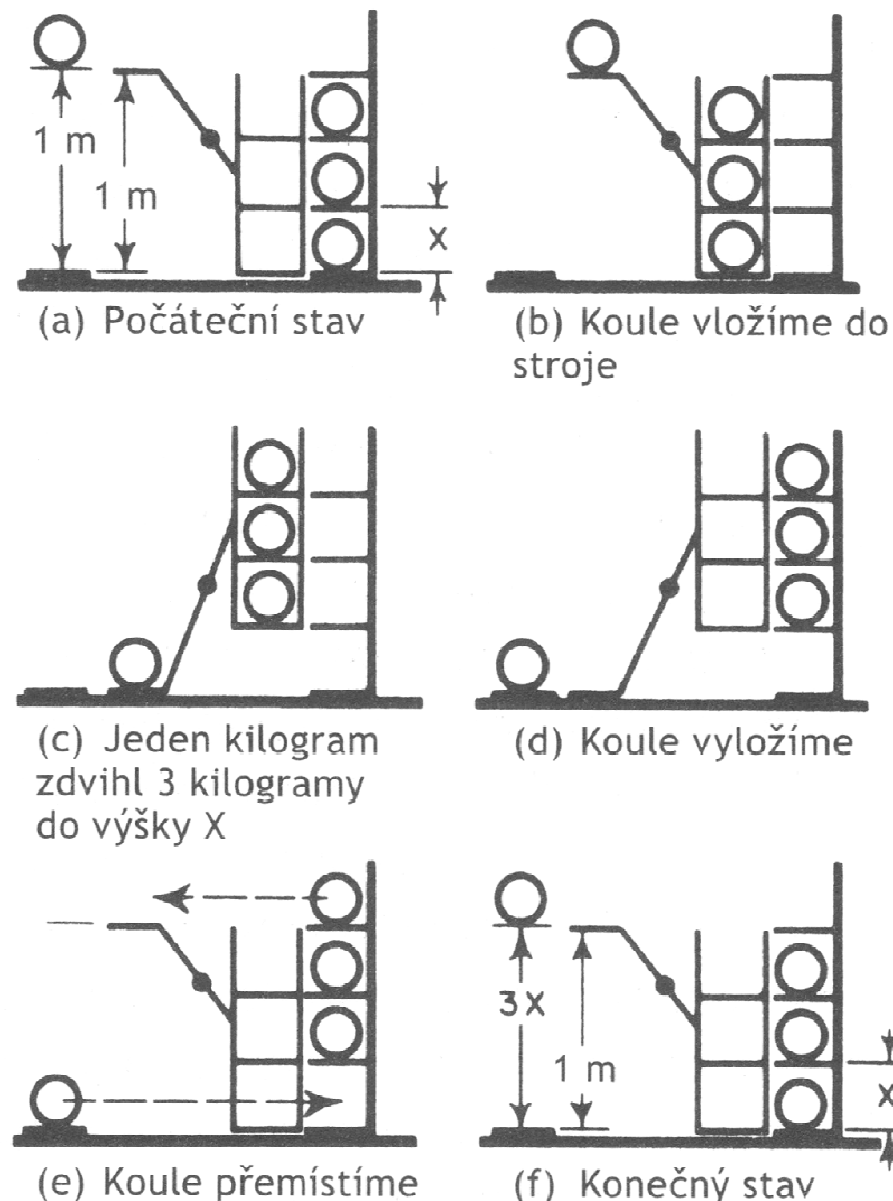
Energie má řadu různých podob, a každá z nich se počítá z jiného vzorce. Existuje gravitační energie, elektromagnetická energie, kinetická energie, tepelná energie, elastická energie, jaderná energie a energie spojená s hmotností. Když sečteme výrazy pro všechny tyto druhy energie, bude součet vždy stejný.

Gravitační potenciální energie

Vratný stroj A: jednotkové závaží spustí o jednotkovou vzdálenost a přitom tři jednotková závaží zvedne o vzdálenost X .

Nevratný stroj B: jednotkové závaží spustí o jednotkovou vzdálenost a přitom tři jednotková závaží zvedne o vzdálenost Y .

$$Y \leq X$$



Důkaz

Předpokládejme opak našeho tvrzení, tedy $Y > X$. Jednotkové závaží spustíme strojem B o jednotkovou vzdálenost a tři jednotková závaží vystoupí o Y výše. Pak můžeme snížit tři závaží závaží z Y na X a získat „zadarmo“ výkon, neboť v této situaci pak vratný stroj A s obráceným chodem by snížil tři jednotková závaží o vzdálenost X a zdvihl jednotkové závaží o jednotkovou vzdálenost, čímž by se závaží dostala do původního stavu a oba stroje by mohly opakovat popsanou akci. Kdyby tedy bylo Y větší jak X , dostali bychom věčný pohyb, jehož existenci považujeme za vyloučenou.

$$0 = 1\text{kg} \times (-1\text{m}) + 3\text{kg} \times X\text{m}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{gravitační potenciální} \\ \text{energie} \end{array} \right) = (\text{tíha}) \times (\text{výška})$$

**Zákon zachování energie a
hybnosti na příkladu
Comptonova jevu**

Charakteristiky elektronu a fotonu

Elektron charakterizujeme hmotností, nábojem a vektorem rychlosti (případně spinem)

$$m, e, \vec{v}, (s)$$

Foton charakterizujeme frekvencí (vlnovou délkou) a jednotkovým vektorem směru šíření (případně jednotkovým vektorem polarizace)

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda}, \vec{n}, (\vec{e})$$

Hybnost a energie elektronu a fotonu

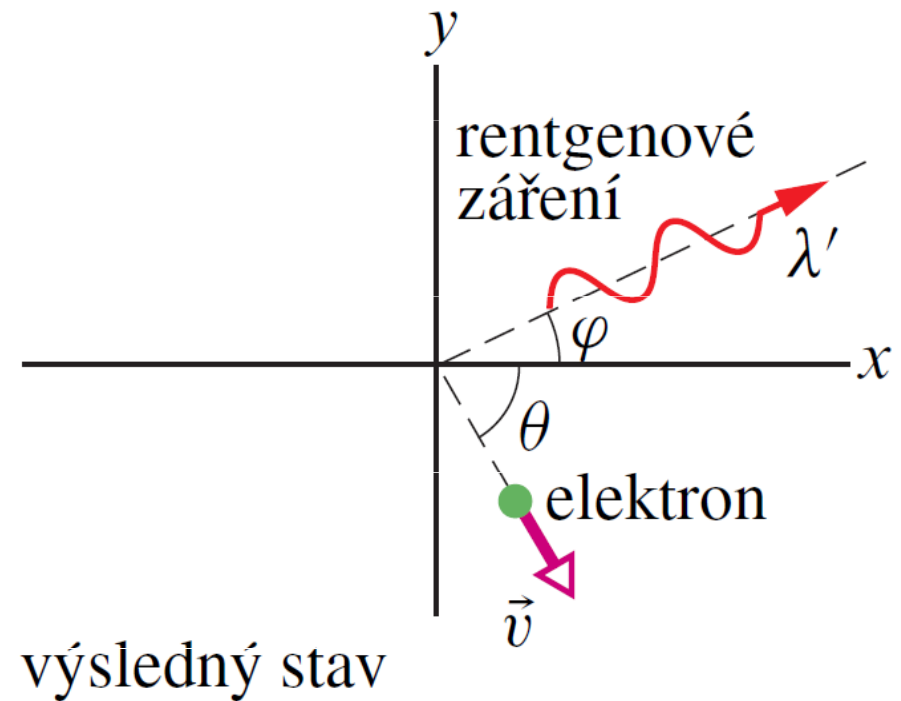
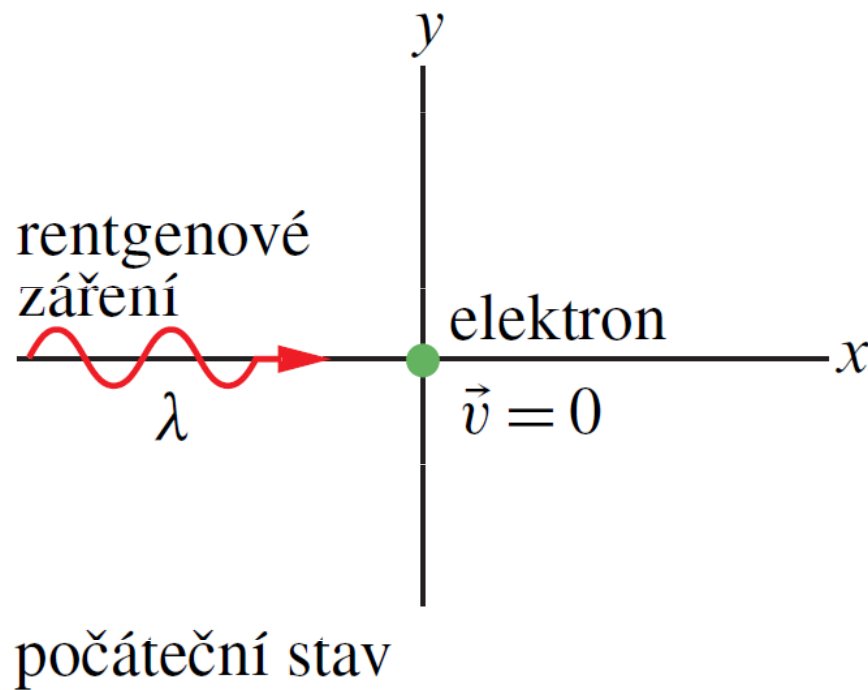
Volný elektron má hybnost a energii

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Foton má hybnost a energii

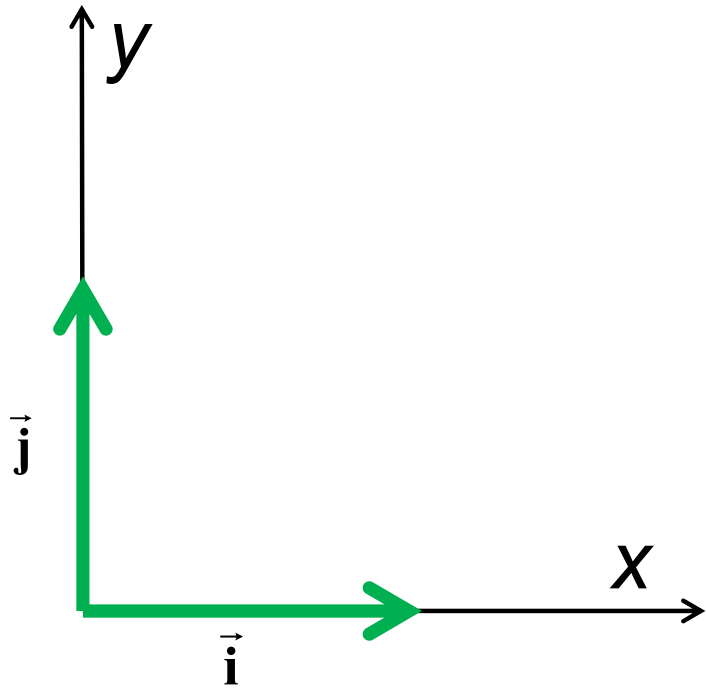
$$\vec{p} = \frac{\hbar \omega}{c} \vec{n}, \quad E = \hbar \omega$$

Comptonův rozptyl



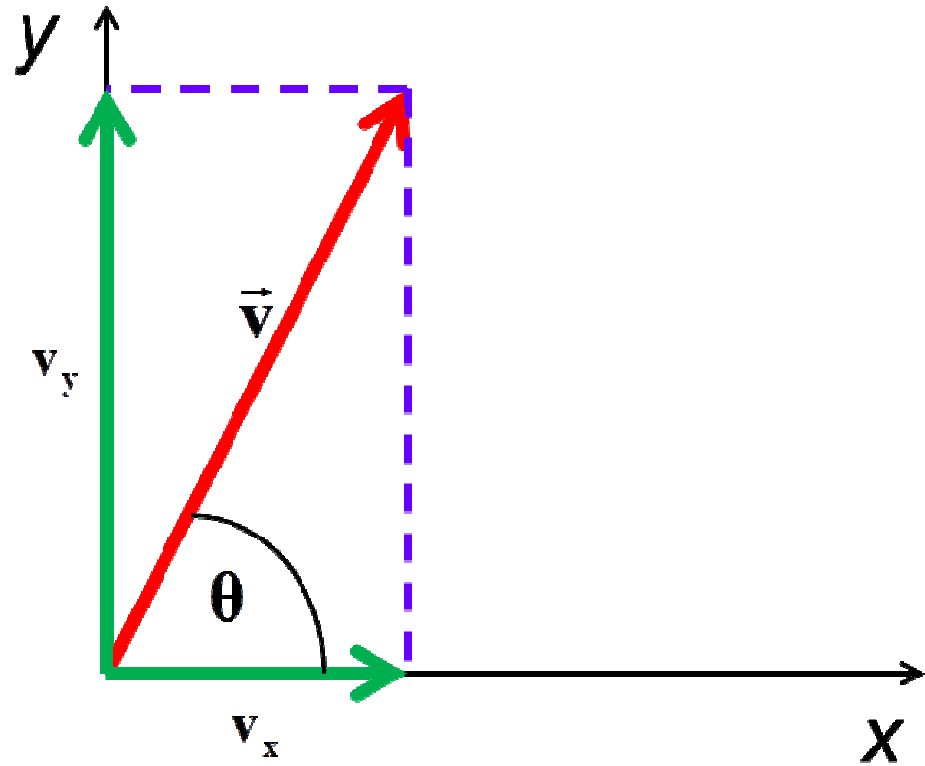
Rentgenové záření o vlnové délce λ interaguje s elektronem v klidu. Rentgenový svazek je rozptýlen do úhlu φ a jeho vlnová délka vzroste na λ' . Elektron se pohybuje s rychlostí \mathbf{v} pod úhlem θ .

Rozklad vektoru do složek



$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \quad , \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\vec{a}, \vec{b})$$



$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad , \quad v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2$$

$$\sin\theta = \frac{v_y}{v} \quad , \quad \cos\theta = \frac{v_x}{v}$$

$$\vec{v} = v(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

Zápis zákonů zachování

Energie

$$\hbar \omega + m c^2 = \hbar \omega' + \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Složka hybnosti ve směru osy x

$$\frac{\hbar \omega}{c} + 0 = \frac{\hbar \omega'}{c} \cos \varphi + p \cos \theta$$

Složka hybnosti ve směru osy y

$$0 + 0 = \frac{\hbar \omega'}{c} \sin \varphi - p \sin \theta$$

Změna vlnové délky a energie

Po výpočtu dostaneme

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos\varphi)$$

kde λ_C je Comptonova vlnová délka

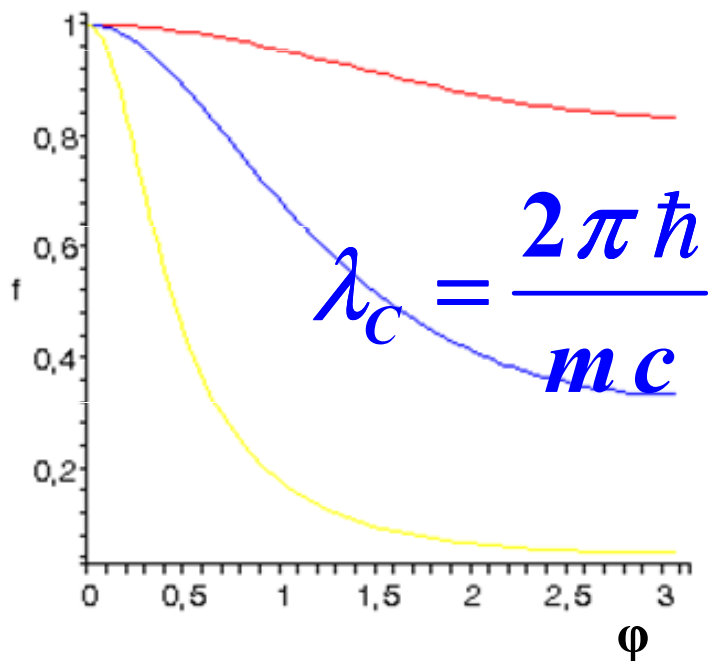
$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$

Pro energii fotonu po rozptylu dostaneme

$$\hbar\omega' = \frac{\hbar\omega}{1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos\varphi)}$$

Množství fotonem předané energie

$$f = \frac{\hbar \omega'}{\hbar \omega} \quad , \quad k = \frac{\hbar \omega}{m c^2}$$



**Zákon zachování energie:
kinetická a potenciální
energie**

Pohyb částice s malou hmotností v poli částice s velkou hmotností

V takovém případě můžeme s dobrým přiblížením považovat částici s velkou hmotností za nehybnou

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{q Q}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

Elektron hmotnosti m s nábojem $q = -e$ v elektrickém poli protonu s nábojem $Q = e$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m M}{r}$$

Částice s hmotností m v gravitačním poli Země hmotnosti M

Znaménko potenciální energie

$$U = + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Souhlasné náboje se odpuzují, náboje opačného znaménka se přitahují

$$U = - G \frac{mM}{r}$$

Gravitační působení je vždy přitažlivé

Jak je to s potenciální energií v gravitačním poli země

$$U = -G \frac{m M}{r} = -G \frac{m M}{R+h}$$

Úprava

$$-\frac{1}{R+h} = -\frac{1}{R} + \left(-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R} + \frac{h}{(R+h)R}$$

Výsledek

$$U \approx -G \frac{m M}{R} + m \frac{G M}{R^2} h = konst + m g h$$

Zkratky pro různé jednotky energie

Btu = British thermal unit

erg = erg

ft.lb = foot - pound

hp.h = horse power hour

J = Joule

cal = kalorie

kW.h = kilowatthodina

eV = elektrovolt

kg = kilogram

u = atomová hmotnostní jednotka

Převodní vztahy jednotek pro energii

| | Btu | erg | ft·lb | hp·h | J | cal | kW·h | eV | kg | u |
|-------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| Btu | 1 | $1,055 \cdot 10^{10}$ | 777,9 | $3,929 \cdot 10^{-4}$ | 1 055 | 252,0 | $2,930 \cdot 10^{-4}$ | $6,585 \cdot 10^{21}$ | $1,174 \cdot 10^{-14}$ | $7,070 \cdot 10^{12}$ |
| erg | $9,481 \cdot 10^{-11}$ | 1 | $7,376 \cdot 10^{-8}$ | $3,725 \cdot 10^{-14}$ | 10^{-7} | $2,389 \cdot 10^{-8}$ | $2,778 \cdot 10^{-14}$ | $6,242 \cdot 10^{11}$ | $1,113 \cdot 10^{-24}$ | 670,2 |
| ft·lb | $1,285 \cdot 10^{-3}$ | $1,356 \cdot 10^7$ | 1 | $5,051 \cdot 10^{-7}$ | 1,356 | 0,323 8 | $3,766 \cdot 10^{-7}$ | $8,464 \cdot 10^{18}$ | $1,509 \cdot 10^{-17}$ | $9,037 \cdot 10^9$ |
| hp·h | 2 545 | $2,685 \cdot 10^{13}$ | $1,980 \cdot 10^6$ | 1 | $2,685 \cdot 10^6$ | $6,413 \cdot 10^5$ | 0,745 7 | $1,676 \cdot 10^{25}$ | $2,988 \cdot 10^{-11}$ | $1,799 \cdot 10^{16}$ |
| J | $9,481 \cdot 10^{-4}$ | 10^7 | 0,737 6 | $3,725 \cdot 10^{-7}$ | 1 | 0,238 9 | $2,778 \cdot 10^{-7}$ | $6,242 \cdot 10^{18}$ | $1,113 \cdot 10^{-17}$ | $6,702 \cdot 10^9$ |
| cal | $3,969 \cdot 10^{-3}$ | $4,186 \cdot 10^7$ | 3,088 | $1,560 \cdot 10^{-6}$ | 4,186 | 1 | $1,163 \cdot 10^{-6}$ | $2,613 \cdot 10^{19}$ | $4,660 \cdot 10^{-17}$ | $2,806 \cdot 10^{10}$ |
| kW·h | 3 413 | $3,600 \cdot 10^{13}$ | $2,655 \cdot 10^6$ | 1,341 | $3,600 \cdot 10^6$ | $8,600 \cdot 10^5$ | 1 | $2,247 \cdot 10^{25}$ | $4,007 \cdot 10^{-11}$ | $2,413 \cdot 10^{16}$ |
| eV | $1,519 \cdot 10^{-22}$ | $1,602 \cdot 10^{-12}$ | $1,182 \cdot 10^{-19}$ | $5,967 \cdot 10^{-26}$ | $1,602 \cdot 10^{-19}$ | $3,827 \cdot 10^{-20}$ | $4,450 \cdot 10^{-26}$ | 1 | $1,783 \cdot 10^{-36}$ | $1,074 \cdot 10^{-9}$ |
| kg | $8,521 \cdot 10^{13}$ | $8,987 \cdot 10^{23}$ | $6,629 \cdot 10^{16}$ | $3,348 \cdot 10^{10}$ | $8,987 \cdot 10^{16}$ | $2,146 \cdot 10^{16}$ | $2,497 \cdot 10^{10}$ | $5,610 \cdot 10^{35}$ | 1 | $6,022 \cdot 10^{26}$ |
| u | $1,415 \cdot 10^{-13}$ | $1,492 \cdot 10^{-3}$ | $1,101 \cdot 10^{-10}$ | $5,559 \cdot 10^{-17}$ | $1,492 \cdot 10^{-10}$ | $3,564 \cdot 10^{-11}$ | $4,146 \cdot 10^{-17}$ | $9,320 \cdot 10^8$ | $1,661 \cdot 10^{-27}$ | 1 |

Mezinárodní soustava jednotek SI

Základní jednotky SI m, kg, s

Délka **metr** **m**

Metr je délka dráhy proběhnuté světlem ve vakuu za dobu $1/299\,792\,458$ sekundy

Hmotnost **kilogram** **kg**

Kilogram je jednotka hmotnosti; rovná se hmotnosti mezinárodního prototypu kilogramu

Čas **sekunda** **s**

Sekunda je trvání $9\,192\,631\,770$ period záření odpovídajícího přechodu mezi dvěma velmi jemnými hladinami základního stavu atomu cesia 133

Základní jednotky SI A, K

Elektrický proud

ampér

A

Ampér je stálý elektrický proud, který při průtoku dvěma přímými nekonečně dlouhými rovnoběžnými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1 metru, vyvolá mezi nimi sílu $2 \cdot 10^{-7}$ newtonu na metr délky

Termodynamická teplota

kelvin

K

Kelvin, jednotka termodynamické teploty, je $1/273,16$ termodynamické teploty trojného bodu vody

Základní jednotky SI mol, cd

Látkové množství

mol

mol

Mol je látkové množství soustavy, která obsahuje tolik elementárních entit, kolik je atomů v 0,012 kg uhlíku 12. Při užití molu musí být elementární entity specifikovány. Mohou to být atomy, molekuly, ionty, elektrony, jiné částice nebo specifikované skupiny takových částic

Svítivost

kandela

cd

Kandela je svítivost zdroje v daném směru, který vysílá monochromatické záření s kmitočtem $540 \cdot 10^{12}$ hertzů a má v tomto směru zářivost $1/683$ wattů na steradián

Odvozené jednotky SI (1)

| | | | |
|-----------------------|----------------|--------------------|---------------------------|
| plocha | čtverečný metr | m^2 | |
| objem | krychlový metr | m^3 | |
| rychlost | | $m \cdot s^{-1}$ | |
| zrychlení | | $m \cdot s^{-2}$ | |
| rovinný úhel | radián | rad | |
| prostorový úhel | steradián | sr | |
| úhlová rychlost | | $rad \cdot s^{-1}$ | |
| úhlové zrychlení | | $rad \cdot s^{-2}$ | |
| frekvence, kmitočet | hertz | Hz | s^{-1} |
| hustota | | $kg \cdot m^{-3}$ | |
| síla | newton | N | $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ |
| tlak | pascal | Pa | $N \cdot m^{-2}$ |
| práce, energie, teplo | joule | J | N·m |
| výkon | watt | W | $J \cdot s^{-1}$ |

Odvozené jednotky SI (2)

| | | | |
|-----------------------------|---------------|-------------------------------------|---------------------|
| elektrický náboj | coulomb | C | A·s |
| potenciál, napětí | volt | V | W·A ⁻¹ |
| intenzita elektrického pole | | V·m ⁻¹ | N·C ⁻¹ |
| elektrický odpor | ohm | Ω | V·A ⁻¹ |
| elektrická vodivost | siemens | S | Ω ⁻¹ |
| kapacita | farad | F | A·s·V ⁻¹ |
| magnetická indukce | tesla | T | Wb·m ⁻² |
| magnetický tok | weber | Wb | V·s |
| indukčnost | henry | H | V·s·A ⁻¹ |
| intenzita magnetického pole | | A·m ⁻¹ | |
| entropie | | J·K ⁻¹ | |
| měrná tepelná kapacita | | J·kg ⁻¹ ·K ⁻¹ | |
| tepelná vodivost | | W·m ⁻¹ ·K ⁻¹ | |
| Celsiova teplota | stupeň Celsia | °C | |
| světelný tok | lumen | lm | cd·sr |
| osvětlení | lux | lx | lm·m ⁻² |
| zářivost | | W·sr ⁻¹ | |

Jednotky v radiologii

Pohlčená dávka

Pohlčená dávka je míra radiační dávky (energie na jednotku hmotnosti) skutečně pohlčené určitým objektem, například pacientovou rukou nebo hrudníkem. Jednotkou v soustavě SI je **gray** (Gy). Stále se však užívá i starší jednotky **rad** (radiation absorbed dose - pohlčená radiační dávka). Jednotky jsou definovány jako

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J kg}^{-1} = 100 \text{ rad}$$

Ekvivalentní dávka

Ekvivalentní dávka. Ačkoli různé druhy záření (například záření gama a neutrony) mohou tělu dodat stejné množství energie, nemusí mít stejný biologický účinek. Ekvivalentní dávka nám umožňuje určit biologický účinek záření tak, že vynásobíme pohlcenou dávku (udanou v jednotkách gray nebo rad) číselným **RBE** faktorem relativní biologické účinnosti (relative biological effectiveness). Pro rentgenové záření a elektrony je $RBE=1$, pro pomalé neutrony $RBE=5$, pro α -částice $RBE=10$ atd. Běžné osobní měřicí pomůcky registrují právě ekvivalentní dávku. Jednotkou pro ekvivalentní dávku v soustavě SI je **sievert (Sv)**. Užívá se i starší jednotky **rem**. Platí

$$1\text{Sv} = 100\text{rem}$$

Aktivita

Aktivita. Celková rychlost rozpadu vzorku radionuklidu se nazývá **aktivita** vzorku. Jednotkou aktivity v soustavě SI je **becquerel**, podle objevitele radioaktivity Henriho Becquerela

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$$

1 Bq tedy odpovídá jednomu rozpadu za sekundu. Starší, ale stále používanou jednotkou je **curie**

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

Příklady použití

Pohlčená dávka: „Celotělová, krátkodobá dávka gama záření 3 Gy (300 rad) zapříčiní smrt 50% populace, která jí byla vystavena.“ Pro uklidnění uveďme, že dnešní střední roční absorbovaná dávka záření ze zdrojů přírodních i vytvořených lidskou činností je asi $2 \text{ mGy} = 0,2 \text{ rad}$.

Ekvivalentní dávka: „Národní úřad pro ochranu před zářením doporučuje, aby nikdo vystavený působení záření (kromě osob pracujících se zářením) neobdržel v žádném roce ekvivalentní dávku větší než $5 \text{ mSv} = 0,5 \text{ rem}$.“

Aktivita: „Aktivita vyhořelé palivové tyče číslo 5 658 dne 15. ledna 1997 činila $3,5 \cdot 10^{15} \text{ Bq}$.“

Doba působení

| Interakce | Děj | Typická doba |
|------------|---|------------------|
| fyzikální | absorbce energie | femtosekundy |
| ↓ | interakce iontů s molekulami, tvorba volných radikálů | mikrosekundy |
| chemická | interakce volných radikálů s buňkami a DNA | sekundy |
| biologická | zánik buněk, změny v genetických datech buněk, mutace | od hodin po roky |