

Radiologická fyzika

Radioaktivita

21. října 2013

Radioaktivní rozpad

α rozpad



β^- rozpad



γ rozpad



β^+ rozpad



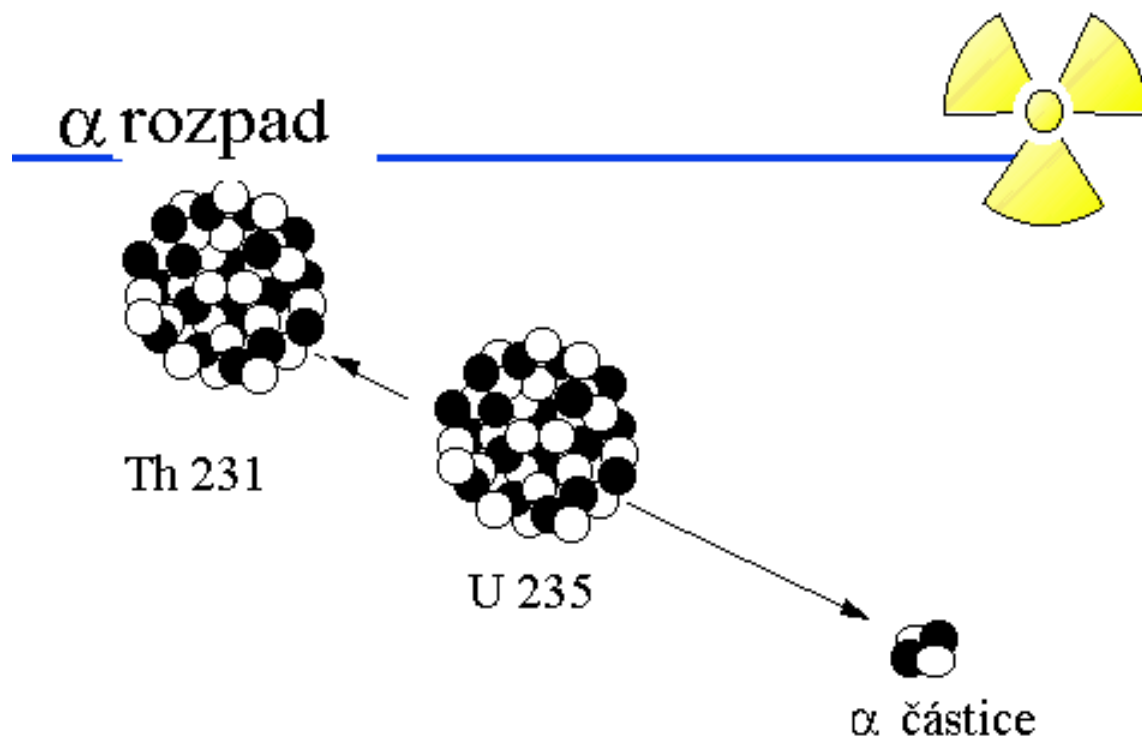
Elektronový záchyt



Vnitřní konverse



Rozpad α



Rozpad β

β rozpad



antineutrino



elektron



Rozpad β^+

β^+ rozpad



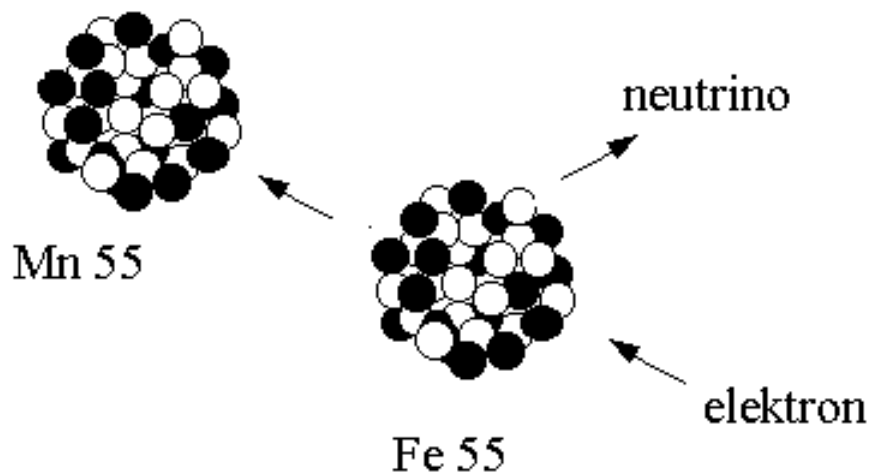
neutrino

positron

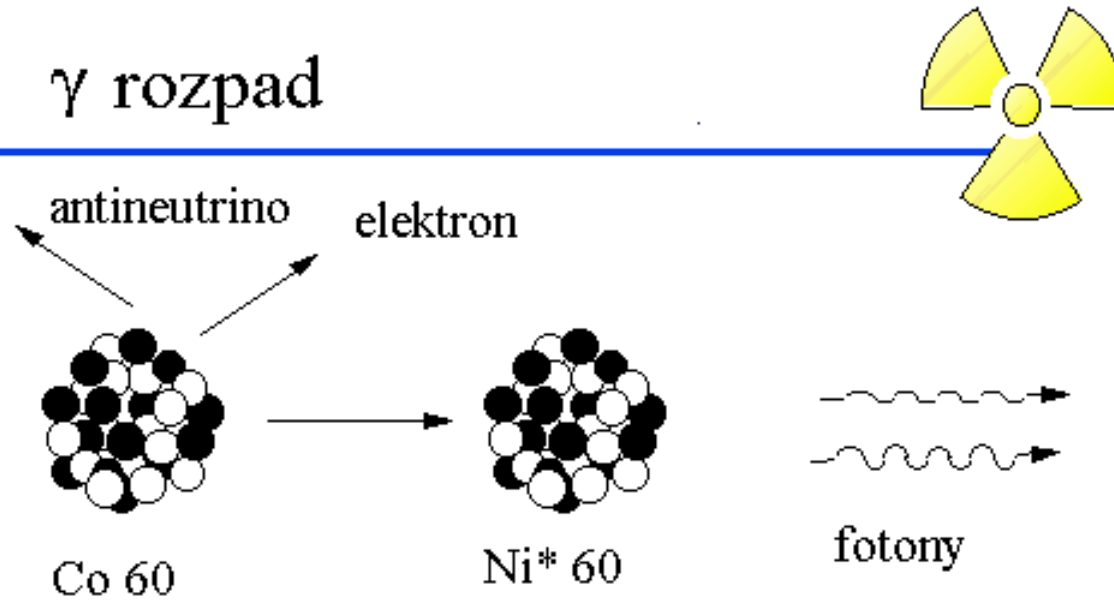


Elektronový záchyt

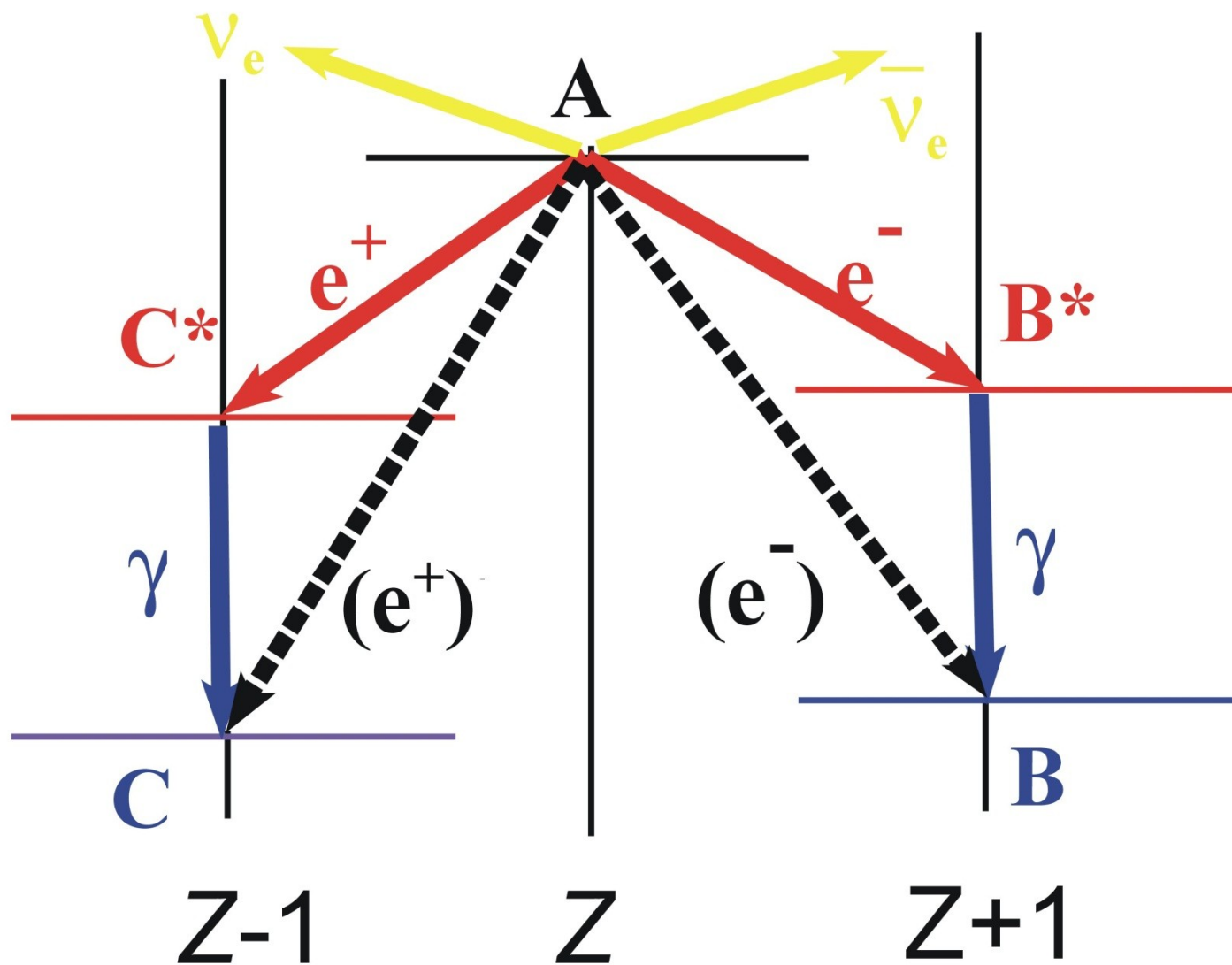
Elektronový záchyt



Rozpad γ



Obecné schema β rozpadů



Příprava technecia (Tc) I

Začínáme u molybdenu (Mo), $Z=42$. V přírodě se vyskytuje řada stabilních izotopů:

| A | % |
|-----|-------|
| 92 | 15,86 |
| 94 | 09,12 |
| 95 | 15,70 |
| 96 | 16,50 |
| 97 | 09,45 |
| 98 | 23,75 |
| 100 | 09,62 |

Příprava technecia (Tc) II

V reaktoru dochází k vytvoření radionuklidu



Molybden je přepraven k diagnostickému zařízení, probíhá přitom β rozpad s poločasem rozpadu $T_{1/2}=66$ hodin

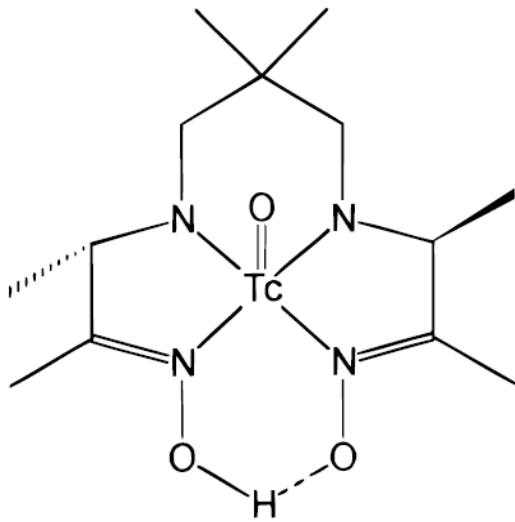


V chemickém generátoru je technecium separováno a navázáno na vhodnou látku. Pak je dopraveno ke zkoumanému orgánu. Technecium přejde γ rozpadem s poločasem rozpadu $T_{1/2}=361$ minut z excitovaného do základního stavu. Vyzáří přitom foton o energii 141 keV, který je detekován.

Příprava technecia (Tc) III

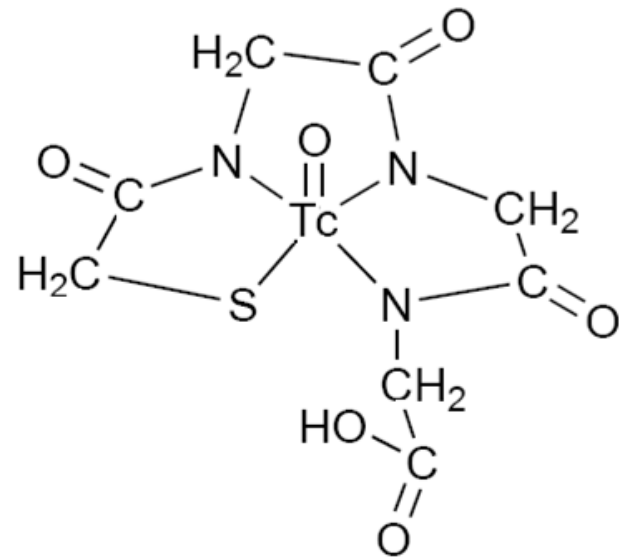


Vyšetření mozku „Ceretec“



${}^{99m}\text{TcO}$ -hexamethylpropyleneamineoxime

Vyšetření ledvin



${}^{99m}\text{TcO}$ -mercaptoacetyltriglycine

Příprava kobaltu (Co)

V reaktoru dochází k vytvoření radionuklidu



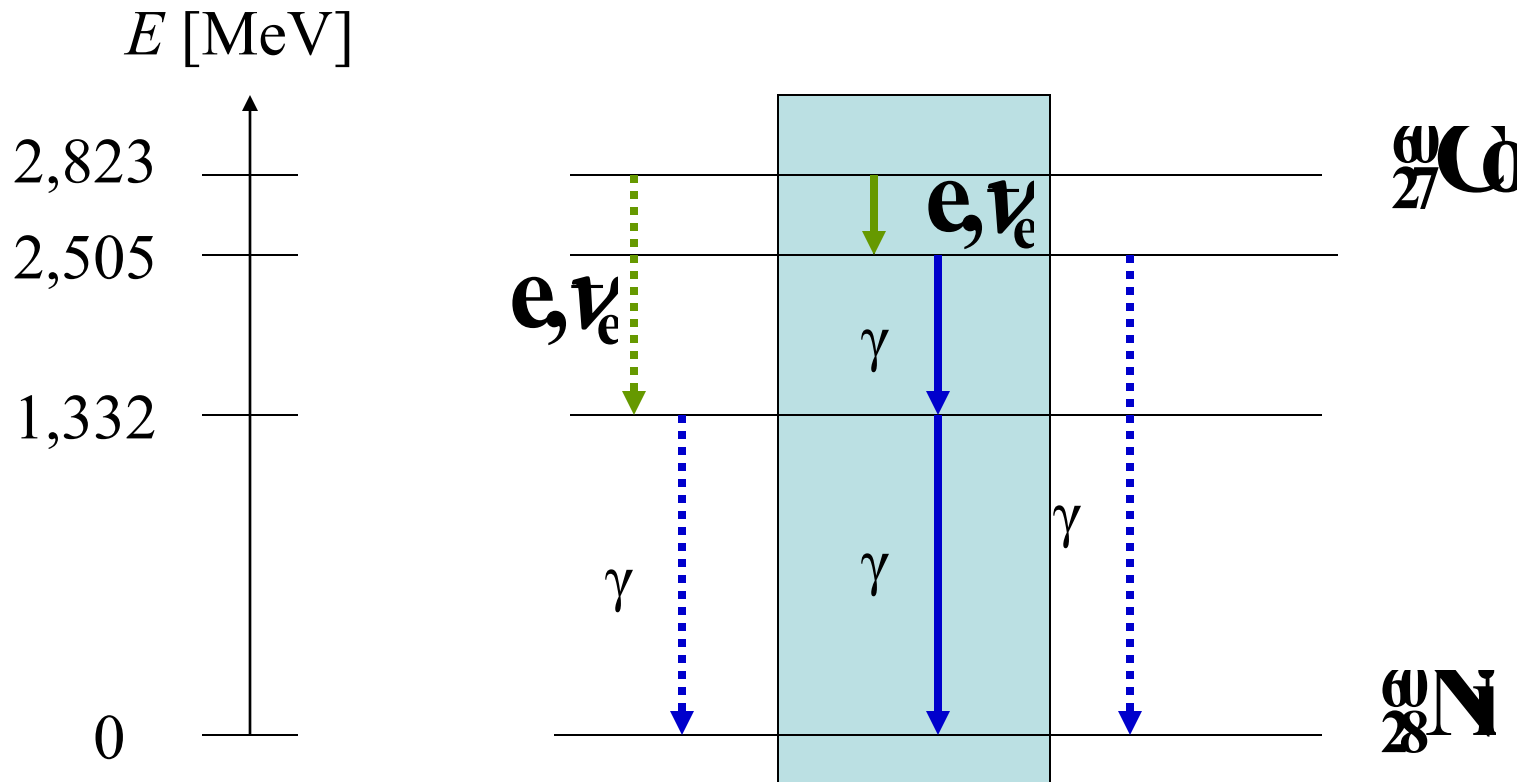
Radionuklid je vhodně umístěn („kobaltová bomba“). Přitom probíhá β rozpad s poločasem rozpadu $T_{1/2}=5,27$ roků



Excitované jádro niklu téměř okamžitě přechází do základního stavu, fotony vzniklé při tomto γ rozpadu mají každý energii přibližně 1.2 MeV



Energiové schema rozpadu Co - Ni



Zákon radioaktivního rozpadu

Pro vzorek s N jádry radionuklidu je rychlost rozpadu

$$R = -\frac{dN}{dt}$$

úměrná počtu těchto jader

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

Tato rovnice popisuje **zákon radioaktivního rozpadu**. Konstanta úměrnosti λ je pro daný rozpad charakteristická, nazývá se proto **konstanta rozpadu** a má rozměr $[\lambda] = \text{s}^{-1}$. Aktivita vzorku je definována jako

$$R = \lambda N$$

Integrální tvar zákona radioaktivního rozpadu

Jednoduchou integrací dostáváme

$$N(t) = N(t_0) \exp[-\lambda(t-t_0)]$$

Obvykle volíme $t_0=0$ a značíme $N(t_0)=N_0$, takže

$$N = N_0 \exp[-\lambda t]$$

Tato rovnice také popisuje zákon radioaktivního rozpadu, stejně jako rovnice pro aktivitu (označujeme $R_0 = \lambda N_0$)

$$R = R_0 \exp[-\lambda t]$$

Další charakteristiky rozpadu

Poločas rozpadu $T_{1/2}$ je doba, po které jak počet jader radionuklidu ve vzorku N , tak aktivita R poklesnou na polovinu své původní hodnoty

$$\frac{R_0}{2} = R_0 \exp[-\lambda T_{1/2}]$$

Jednoduchá úprava dává pro poločas rozpadu vztah

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Střední doba života je definována vztahem $R_0 T = \int_0^{\infty} R(t) dt$, takže

$$T = \frac{1}{\lambda}$$

Rozpad dvěma různými způsoby

Rozpad se může dít více způsoby. Uvažujme dva různé, charakterizované rozpadovými konstantami $\lambda^{(1)}$ a $\lambda^{(2)}$. Je tedy

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda^{(1)} N + \lambda^{(2)} N \Rightarrow N = N_0 \exp\left[-(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)})t\right]$$

Pro poločas rozpadu máme teď vztah

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}} = \frac{\ln 2}{\frac{\ln 2}{T_{1/2}^{(1)}} + \frac{\ln 2}{T_{1/2}^{(2)}}}$$

Jednoduchá úprava dává

$$T_{1/2} = \frac{T_{1/2}^{(1)} T_{1/2}^{(2)}}{T_{1/2}^{(1)} + T_{1/2}^{(2)}}$$

Dvoustupňový rozpad I

Velmi často musíme uvažovat o rozpadu jako vícestupňovém procesu. Nejčastější je dvoustupňový rozpad typu



Označení pochází z anglického parent, daughter, granddaughter.

Potřebné rovnice budou

$$\begin{aligned} \frac{dN_P}{dt} &= -\lambda_{PD} N_P & N_P(t=0) &= N_0 \\ \frac{dN_D}{dt} &= -\lambda_{DG} N_D + \lambda_{PD} N_P & N_D(t=0) &= 0 \\ \frac{dN_G}{dt} &= \lambda_{DG} N_D & N_G(t=0) &= 0 \end{aligned}$$

Dvoustupňový rozpad II

Řešení, které splňuje počáteční podmínky najdeme například postupnou integrací rovnic jako

$$N_P = N_0 \exp[-\lambda_{PD} t]$$

$$N_D = \frac{\lambda_{PD} N_0}{\lambda_{DG} - \lambda_{PD}} \left(\exp[-\lambda_{PD} t] - \exp[-\lambda_{DG} t] \right)$$

$$N_G = \frac{\lambda_{PD} \lambda_{DG} N_0}{\lambda_{DG} - \lambda_{PD}} \left\{ \lambda_{PD} \left(\exp[-\lambda_{DG} t] - 1 \right) - \lambda_{DG} \left(\exp[-\lambda_{PD} t] - 1 \right) \right\}$$

Pro praktické účely je potřeba znát aktivitu dceřinného vzorku. Aktivita rodičovského vzorku je

$$R_P = \lambda_{PD} N_0 \exp[-\lambda_{PD} t]$$

Aktivita dceřinného vzorku I

Z předchozích výsledků dostáváme

$$R_D = \lambda_{DG} \frac{\exp[(\lambda_{PD} - \lambda_{DG})t] - 1}{\lambda_{PD} - \lambda_{DG}} R_P$$

Jiný vhodný tvar tohoto vztahu je

$$R_D = \lambda_{DG} \frac{\exp[-\lambda_{DG}t] - \exp[-\lambda_{PD}t]}{\lambda_{PD} - \lambda_{DG}} R_P(t=0)$$

Aktivita dceřinného vzorku II

Maximální hodnotu aktivity dostaneme z

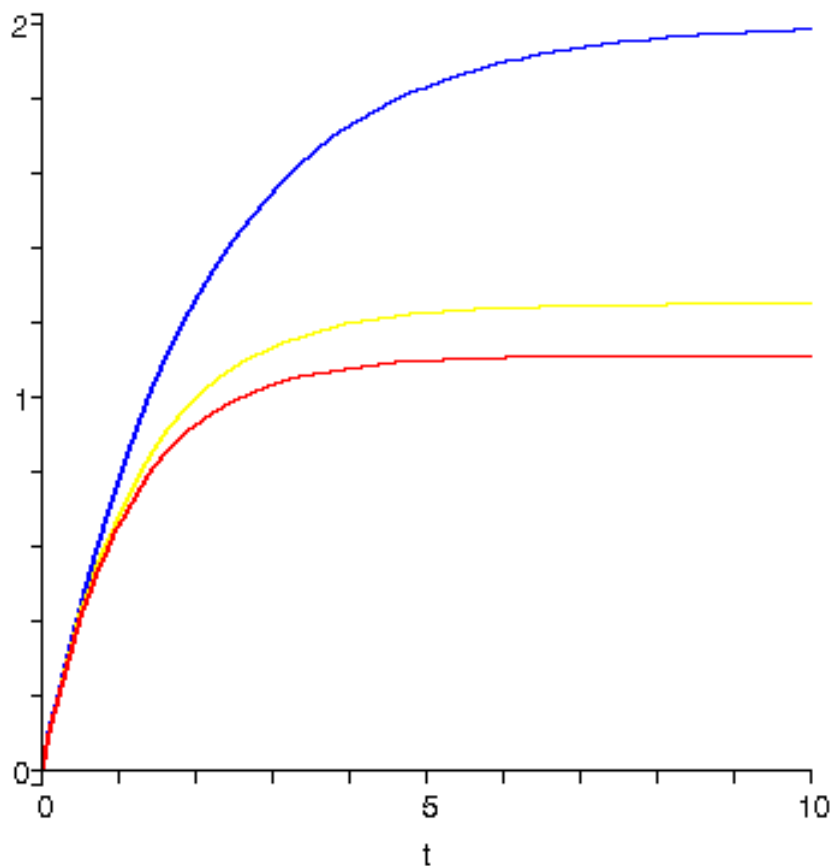
$$\frac{dR_D}{dt} = 0 \Rightarrow t_{\max} = \frac{1}{\lambda_{DG} - \lambda_{DD}} \ln \frac{\lambda_{DG}}{\lambda_{DD}}$$

V případě, že poločas rozpadu dceřinného vzorku je menší než poločas vzorku rodičovského (rodičovský: ^{99}Mo na $^{99m}\text{Tc}^*$, dceřinný: $^{99m}\text{Tc}^*$ na ^{99}Tc), dostáváme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_D}{R_P} = \frac{\lambda_{DG}}{\lambda_{DG} - \lambda_{DD}}$$

Aktivita dceřinného vzorku III

Závislosti R_D/R_P pro hodnoty $\lambda_{PD}/\lambda_{DG}$ 1/2 (modrá), 1/5 (žlutá) a 1/10 (červená) na $\lambda_{DG} \cdot t$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R_D}{R_P} = \frac{1}{1 - \lambda_{PD}/\lambda_{DG}}$$

Aktivace v reaktoru

V reaktoru ozařuje neutronový svazek vzorek stabilního nuklidu, jadernou reakcí se vytváří požadovaný radioaktivní nuklid



Počet jader stabilního nuklidu se opět řídí zákonem

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

Konstanta λ je v tomto případě součinem hustoty toku neutronů j a účinného průřezu reakce σ , tj. plošku, která ukazuje jak velkou překážku tvoří při dané reakci jádro dopadajícím neutronům (rozměry veličin jsou $[\lambda]=s^{-1}$, $[j]=m^{-2}s^{-1}$, $[\sigma]=m^2$)

$$\lambda = j\sigma$$

Příklad s kobaltem

V reaktoru ozařuje neutronový svazek vzorek ^{59}Co hmotnosti $m=1$ g, jadernou reakcí se vytváří radioaktivní nuklid ^{60}Co . Účinný průřez je $\sigma=35$ barn (barn= 10^{-24} cm²), neutronový tok je $j=10^{13}$ cm⁻²s⁻¹. Poločas rozpadu ^{60}Co na $^{60}\text{Ni}^*$ je $T_{1/2}=5,27$ roků, vyzáření dvou fotonů γ záření při přechodu $^{60}\text{Ni}^*$ na ^{60}Ni následuje v zanedbatelně krátké době.

$$N_0 = m \frac{N_A}{A}$$

$$N_0 = 160 \cdot 10^3 - 10^2 \cdot 10^2$$

$$\lambda_{\text{FD}} = j \sigma$$

$$\lambda_{\text{FD}} = 10^{13} \cdot 35 \cdot 10^{-24} \text{ s}^{-1} = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda_{\text{DG}} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$\lambda_{\text{DG}} = \frac{0,693}{56 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}} = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$$

Nejčastěji užívané radionuklidy I

γ rozpad

| nuklid | $T_{1/2}$ | energie [keV] |
|--------------------|-----------|------------------|
| Jód I - 123 | 13,3 h | 150 |
| Jód I - 131 | 8,04 d | 364 |
| Jód I -125 | 60 d | 35 |
| Thallium Tl - 201 | 73 h | 135 |
| Technecium Tc -99m | 6 h | 140 |

Nejčastěji užívané radionuklidy II

β^+ rozpad

| nuklid | $T_{1/2}$ [minut] | energie [keV] |
|-------------|----------------------|------------------|
| Fluor - 18 | 110 | 202 |
| Kyslík - 15 | 2 | 696 |

Srovnání radiační a tepelné zátěže

Příklad: Uvedli jsme, že dávka γ – záření 3 Gy pohlčena v těle je smrtelná pro polovinu zasažených osob. Jestliže by byla energie obsažená v této dávce pohlčena ve formě tepla, o kolik by se zvýšila teplota těla?

Rozvaha: (1) Pohlčená energie Q souvisí s nárůstem teploty ΔT podle rovnice

$$Q = mC\Delta T$$

kde m je hmotnost materiálu, v němž byla energie pohlčena, a C je měrná tepelná kapacita tohoto materiálu (v našem případě lidského těla). (2) Pohlčená dávka 3 Gy odpovídá energii na jednotku hmotnosti 3 J.kg^{-1} .

Výpočet: Předpokládejme, že měrná tepelná kapacita C lidského těla je stejná jako vody, tj. $C=4180 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Potom

$$\Delta T = \frac{Q}{mC} = \frac{3 \text{ J.kg}^{-1}}{4180 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}} \approx 0,0007 \text{ K}$$

Je zřejmé, že poškození způsobené ionizujícím zářením nemá nic společného s tepelným ohřevem. Škodlivé účinky jsou důsledkem toho, že záření poruší molekulární vazby v DNA a naruší tak normální funkci tkání, kterými bylo pohlčeno.

Srovnání aktivity a hmotnosti nuklidu

Příklad: Při léčbě rakoviny se užívá nuklid ^{198}Au s poločasem rozpadu 2,70 d. Jaká celková hmotnost tohoto nuklidu je potřeba k dosažení aktivity 250 Ci.

Rozvaha: (1) Aktivita vzorku je spojena s počtem nuklidů vztahem $R = \lambda \cdot N$, kde λ je rozpadová konstanta. (2) $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$. (3) Hmotnost nuklidu ^{198}Au je $m = (198 \text{ u}) \cdot (1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{u}^{-1}) = 3,29 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$. (4) $1 \text{ d} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$.

Výpočet: Pro celkovou hmotnost nuklidu M máme

$$M = mN = m \frac{R}{\lambda} = \frac{mRt_{1/2}}{\ln 2}$$

Dosazením potřebných hodnot dostáváme

$$M = \frac{1}{\ln 2} (250 \text{ Ci}) \frac{3,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}}{\text{Ci}} (2,7 \text{ d}) \frac{8,64 \cdot 10^4 \text{ s}}{\text{d}} (3,29 \cdot 10^{-25} \text{ kg}) = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

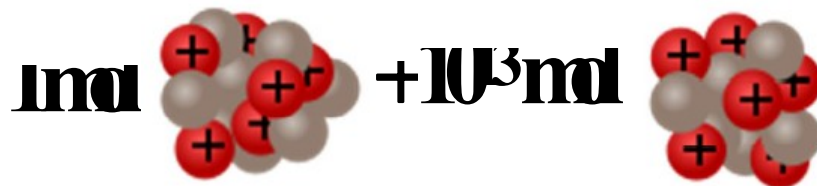
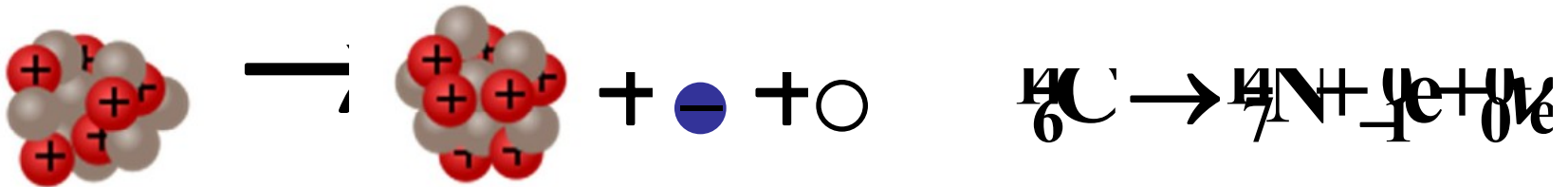
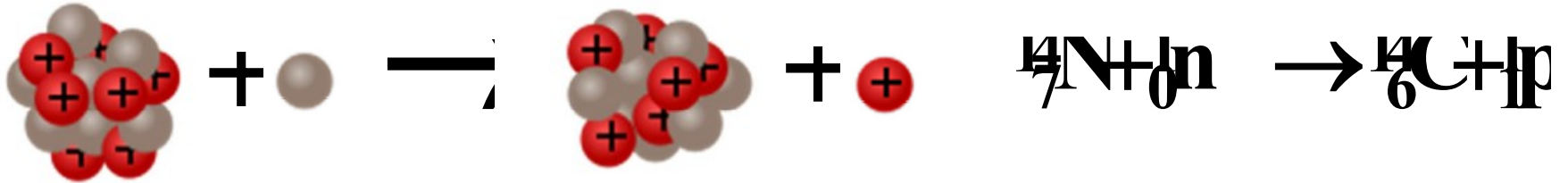
Odpověď: Pro dosažení aktivity 250 Ci je potřeba 1 mg nuklidu ^{198}Au .

Radiouhlíkové datování

Známe-li poločas rozpadu určitého radionuklidu, můžeme v principu použít takový rozpad jako hodiny pro měření časových intervalů.

Pro měření kratších časových intervalů, zajímavých třeba z historických důvodů, je neocenitelný nástroj radiouhlíkové datování. Radionuklid ^{14}C (s $T_{1/2} = 5\,730\text{ y}$) je s konstantní rychlostí produkován v horních vrstvách atmosféry při ostřelování atmosférického dusíku částicemi kosmického záření. Tento radiouhlík se mísí s uhlíkem normálně přítomným v atmosféře (jako CO_2), takže se vyskytuje jeden atom ^{14}C na každých 10^{13} atomů běžného stabilního ^{12}C . Při biologických procesech, jako je fotosyntéza nebo dýchání, dochází k náhodné výměně atomů atmosférického uhlíku s atomy uhlíku v živých organismech, jako jsou rostliny nebo lidé. Po jisté době je dosaženo rovnováhy, při které uhlíkové atomy každého žijícího organismu obsahují jistou malou část radioaktivního nuklidu ^{14}C . Tato rovnováha trvá, jen dokud je organismus naživu. Po smrti se výměna s atmosférou zastaví a radiouhlík uvězněný v organismu se z něj vytrácí s poločasem 5 730 let. Měřením obsahu radiouhlíku v jednotce hmotnosti organické látky lze určit dobu, která uplynula od smrti organismu.

Radiouhlíkové datování



Radiouhlíkové datování

Příklad: 5,00 g dřevěného uhlí z dávného ohniště má aktivitu ^{14}C 63,0 rozpadů za minutu, živý strom má aktivitu ^{14}C 15,3 rozpadů za minutu z 1,00 gramu. Poločas rozpadu ^{14}C je 5 730 let. Jak starý je vzorek dřevěného uhlí?

$$R = R_0 \exp(-\lambda t), \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$\exp(\lambda t) = \frac{R_0}{R} \Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_0}{R} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{R_0}{R}$$

$$t = \frac{5730 \text{ y}}{\ln 2} \ln \left(\frac{15,3}{63,0} \right) \approx 11000 \text{ y}$$