

Radiologická fyzika

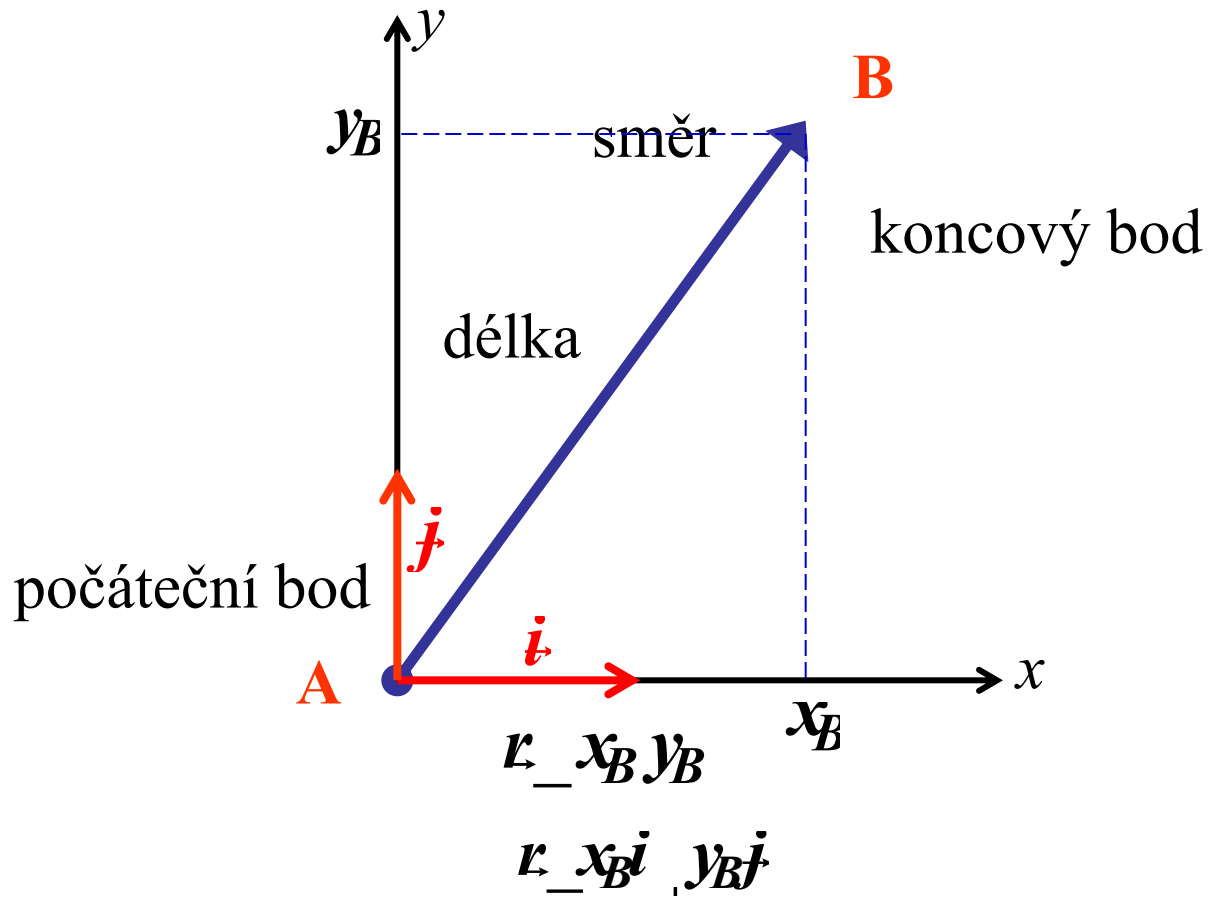
Jaderná magnetická rezonance

11. listopadu 2013

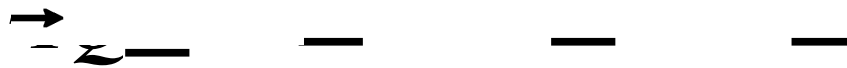
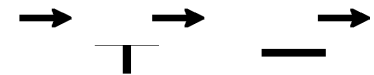
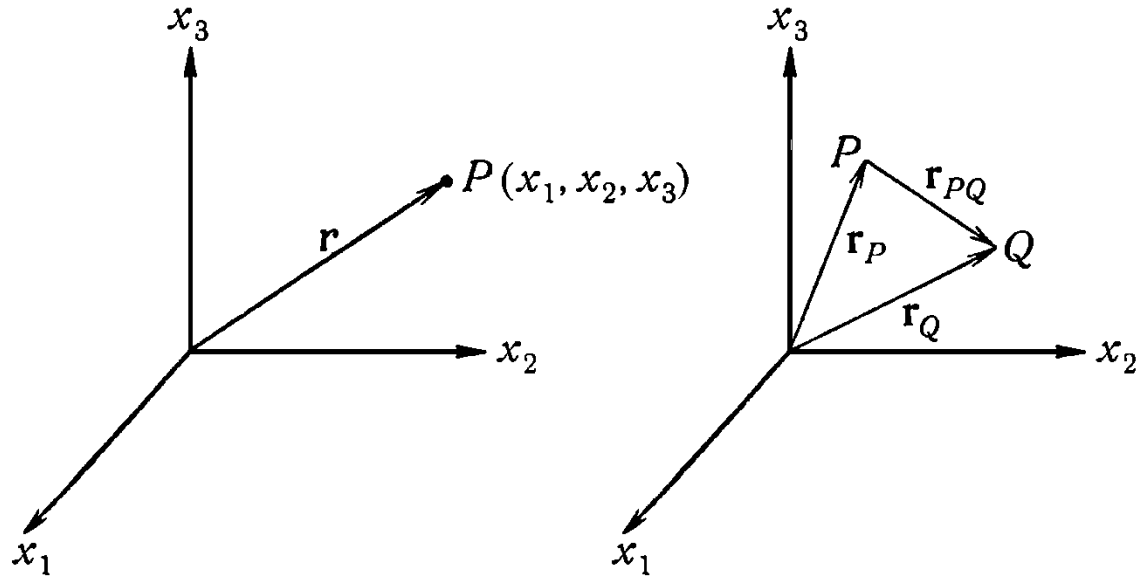
NMR nebo MRI?

Základním fyzikálním procesem je jaderná magnetická rezonance (nuclear magnetic resonance – NMR). Protože řada lidí má obavy ze slov jádro, jaderný, jaderná, používá se v lékařských aplikacích názvu zobrazení magnetickou rezonancí (magnetic resonance imaging - MRI). Nakonec je to i přesnější – rozdíl v intenzitě určitého fyzikálního jevu se používá k získání kontrastu ve výsledném obraze.

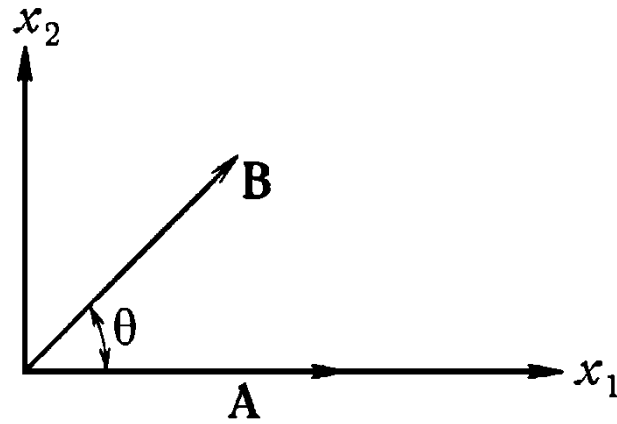
Nutná připomínka – počítání s vektory



Počítání s vektory – sečítání

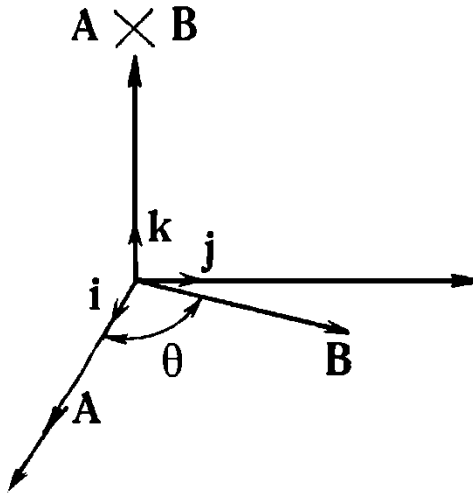


Počítání s vektory – skalární součin



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Počítání s vektory – vektorový součin



$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

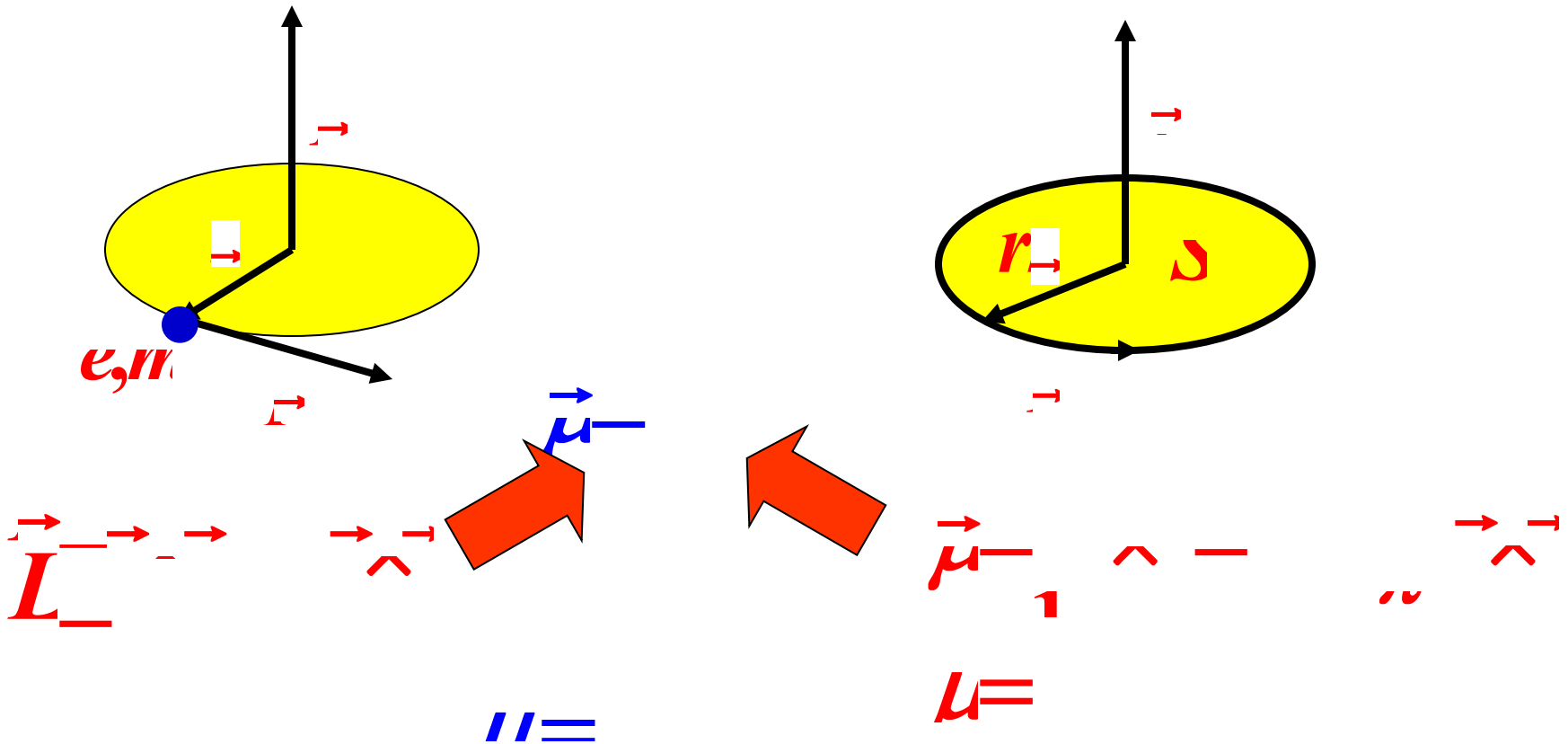
$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \vec{n}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \vec{n}$$

Orbitální a magnetický moment

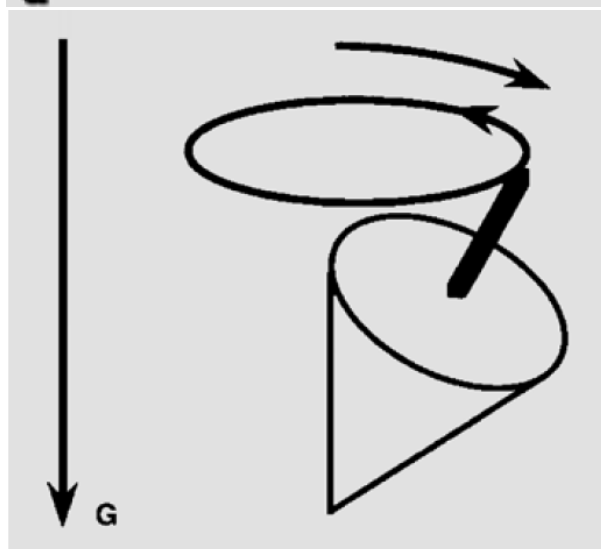
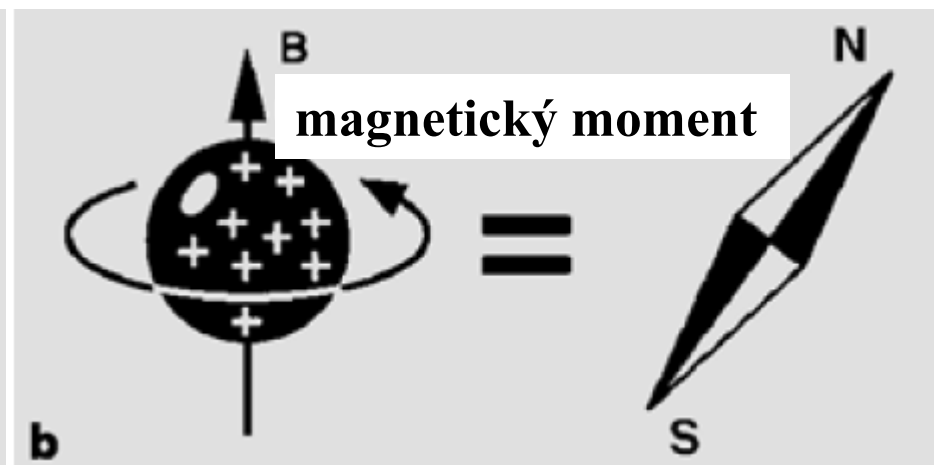
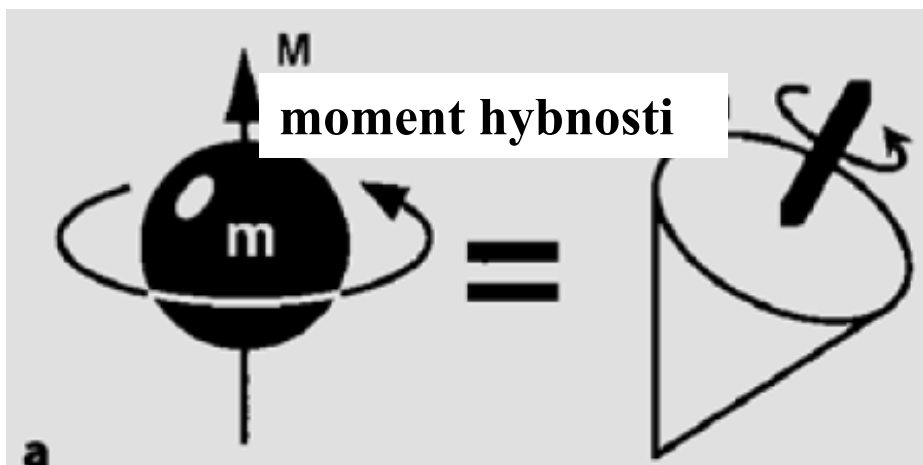
Částice o hmotnosti m a s nábojem e na kruhové trajektorii poloměru r má **moment hybnosti**

Proudová smyčka poloměru r s proudem velikosti I má **magnetický moment**

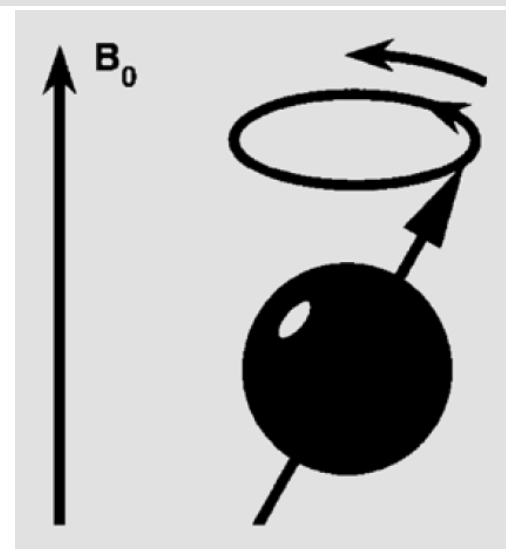


Proton jako magnet

S mechanickým momentem hybnosti – spinem protonu (a) je spojen magnetický moment (b).



Analogie: precese setrvačníku v gravitačním poli a precese spinu protonu v magnetickém poli

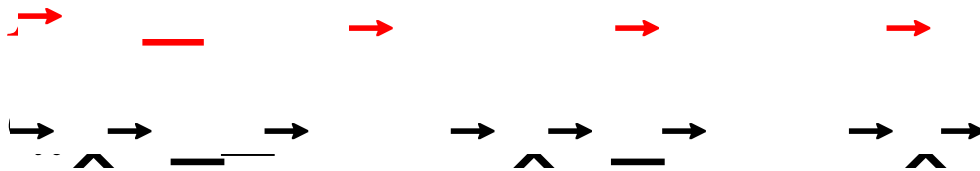


Larmorova precese I

Podle druhé impulsové věty je časová změna momentu hybnosti rovna momentu působící síly. V případě magnetického momentu v homogenním magnetickém poli ve směru osy z

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Larmorovu frekvenci jsme označili jako ω_L . Vektor momentu hybnosti rozložíme do složky rovnoběžné s vektorem indukce magnetického pole a složek kolmých



Larmorova precese II

Rozepsáním do složek dostáváme tři rovnice

$$\frac{dL_x}{dt} = -\gamma L_y B_0, \quad \frac{dL_y}{dt} = \gamma L_x B_0, \quad \frac{dL_z}{dt} = 0$$

Podle třetí z rovnic je složka vektoru momentu hybnosti L_z rovnoběžná s magnetickým polem konstantní. Také velikost vektoru momentu hybnosti L je konstantní – to vidíme hned, vynásobíme-li první rovnici L_x , druhou L_y , třetí L_z a vzniklé rovnice sečteme

$$L_x \frac{dL_x}{dt} + L_y \frac{dL_y}{dt} + L_z \frac{dL_z}{dt} = -\gamma B_0 L_x L_y + \gamma B_0 L_y L_x + 0 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dL^2}{dt} = 0$$

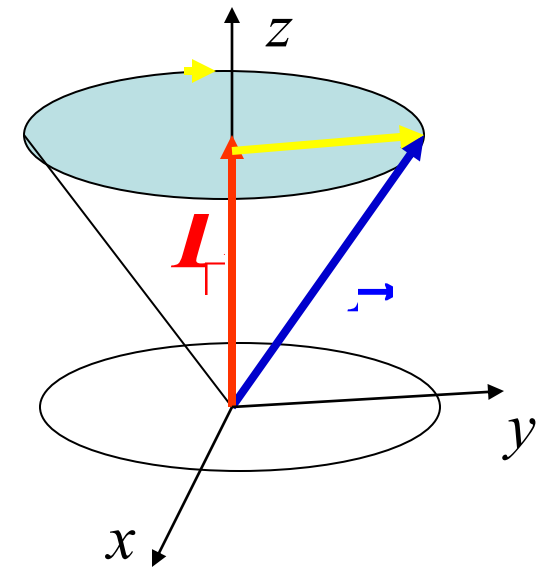
Larmorova precese III

U prvních dvou rovnic si vzpomeneme na vztahy pro goniometrické funkce

$$\frac{d \sin \omega}{dt} = \omega \cos \omega$$

Výsledné vztahy pro složky momentu hybnosti jsou tedy

$$\begin{aligned} L_x &= \hbar m_l \cos \theta \\ L_y &= \hbar m_l \sin \theta \cos \phi \\ L_z &= \hbar m_l \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$



Vektor momentu hybnosti vykonává precesní pohyb s Larmorovou frekvencí – tvoří površky kužele s osou danou magnetickým polem.















Spin jádra

Jádro je složeno z nukleonů (protonů a neutronů). Každý nukleon má vlastní moment hybnosti – **vektor spinu**. Velikosti vektoru spinu měřené v jednotkách Planckovy konstanty \hbar říkáme **spin** a pro nukleony je

$$I = \frac{1}{2} \hbar$$

Spiny nukleonů se vektorově sčítají, takže se při počtu protonů 2, 8, 20, 28, 50, 82 a 126 spiny vyruší, totéž platí pro neutrony. Je to podobné existenci uzavřených slupek u elektronů v atomu. Pro jádra izotopů nejlehčích prvků je předpověď spinu jádra snadná.

Spin jader s malým počtem nukleonů

${}^1_0\text{n}$				$I = \frac{1}{2}$
${}^1_1\text{H}$				$I = \frac{1}{2}$
${}^2_1\text{H}$				$I = \frac{1}{2}$
${}^3_1\text{H}$				$I = \frac{1}{2}$
${}^3_2\text{He}$	 			$I = \frac{1}{2}$
${}^4_2\text{He}$	 			$I = 0$

Spiny a výskyt jader pro MRI

Prvek	Symbol	Spin I	Výskyt [%]
vodík	^1H	1/2	99,985
	^2H	1	0,015
uhlík	^{13}C	1/2	1,11
dusík	^{14}N	1	99,63
	^{15}N	1/2	0,37
sodík	^{23}Na	3/2	100
fosfor	^{31}P	1/2	100
draslík	^{39}K	3/2	93,1

Jaderný magnetický moment

Jaderný magnetický moment M je podobně spojen se spinem I , jako byl magnetický moment μ spojen s orbitálním L . Rozdíl je jen v konstantě úměrnosti

$$\vec{L} \rightarrow \underline{\quad}$$

Gyromagnetický faktor γ má rozměr

$$\gamma = \frac{M}{I} = \frac{M}{|\vec{I}|} = \frac{M}{\hbar}$$

Gyromagnetický faktor protonu a neutronu je

$$\gamma_p = 3881.12 \text{ MHz}$$

$$\gamma_n = 1832.47 \text{ MHz}$$

Kvantování jaderného magnetického momentu

Protože je spin kvantován, je kvantován i jaderný magnetický moment. Pravidla kvantové mechaniky dovolují, aby velikost magnetického momentu byla

$$M_z = m_z \hbar$$

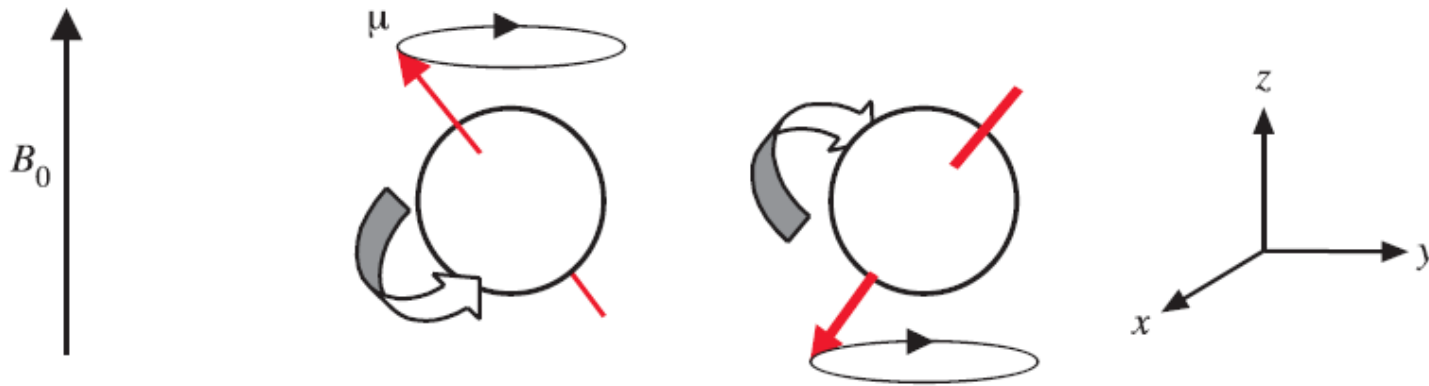
a průmět do nějakého směru (např. do osy z)

$$M_z = m_z \hbar$$

Energie magnetického momentu v homogenním poli indukce B mířícím podél osy z je

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m_z B = -m_z \hbar \gamma B$$

Jaderný magnetický moment pro $I=1/2$



Už jsme viděli, že spin $1/2$ má např. také izotop ^{13}C se šesti protony a sedmi neutrony – jedním nepárovaným.

protony



neutrony

nepárovaný
neutron

Kvantové přechody

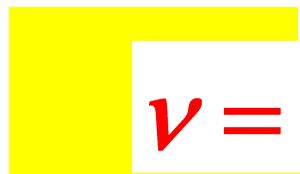
Při přechodu jádra ze stavu s $m=m_1$ do stavu s $m=m_2$ (přechody mohou probíhat jen mezi sousedními hladinami) dojde ke změně energie

$$\Delta E = \dots = \dots \hbar \hbar$$

Tato energie je buď vyzářena (je-li záporná) jako kvantum elektromagnetického záření nebo je získána (je-li kladná) absorpcí takového kvanta.

$$\hbar \hbar$$

S uvážením vztahu mezi kruhovou frekvencí a frekvencí $\omega=2\pi\nu$ dostáváme jednu ze základních rovnic NMR


$$\nu = \dots$$

Vyvolání přechodu

Aby k přechodu došlo, musíme kromě homogenního na čase nezávislého magnetického pole orientovaného podél osy z počítat s dalším přidaným elektromagnetickým polem – monochromatickou v rovině $x - y$ kruhově polarizovanou vlnou s úhlovou frekvencí ω a amplitudou $B_1 \ll B$

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} + B_1 \left(\cos(\omega t) \hat{x} + \sin(\omega t) \hat{y} \right) = B_0 \hat{z} + B_1 \hat{e}_R$$

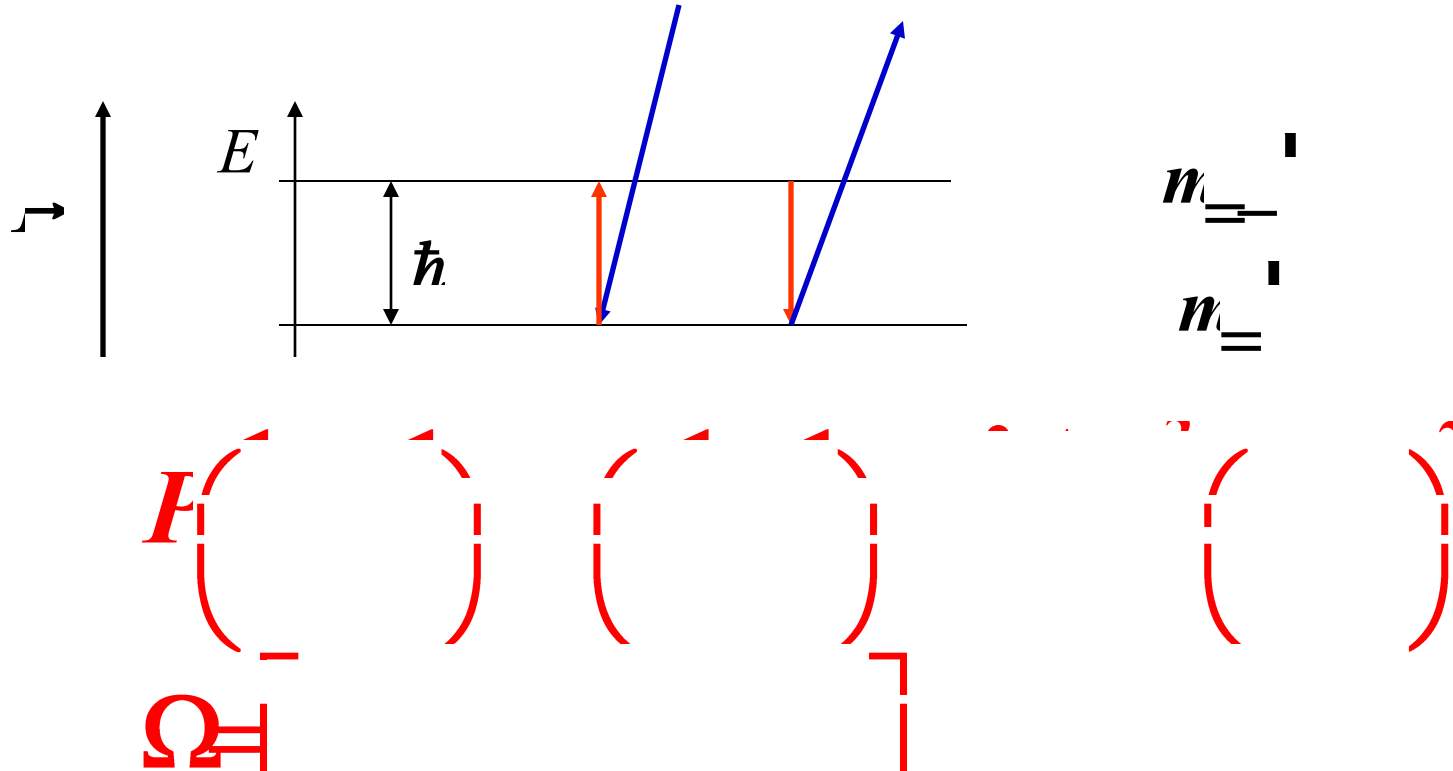
Při zápisu jsme zanedbali prostorovou závislost fáze vlny,

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

protože i pro velmi vysokou frekvenci $\nu = 10^8$ MHz je vlnová délka $\lambda = 3$ m.

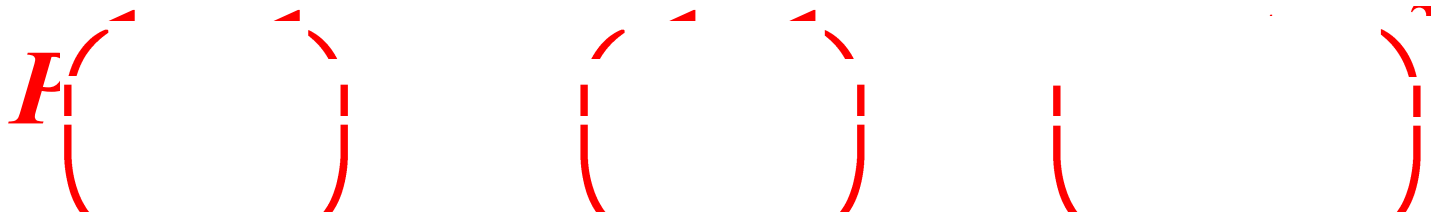
Pravděpodobnost přechodu I

Pravděpodobnost přechodu je třeba počítat s užitím rovnic kvantové mechaniky. Uvedeme si jen výsledek pro jádro se spinem jedna polovina a kladným gyromagnetickým faktorem



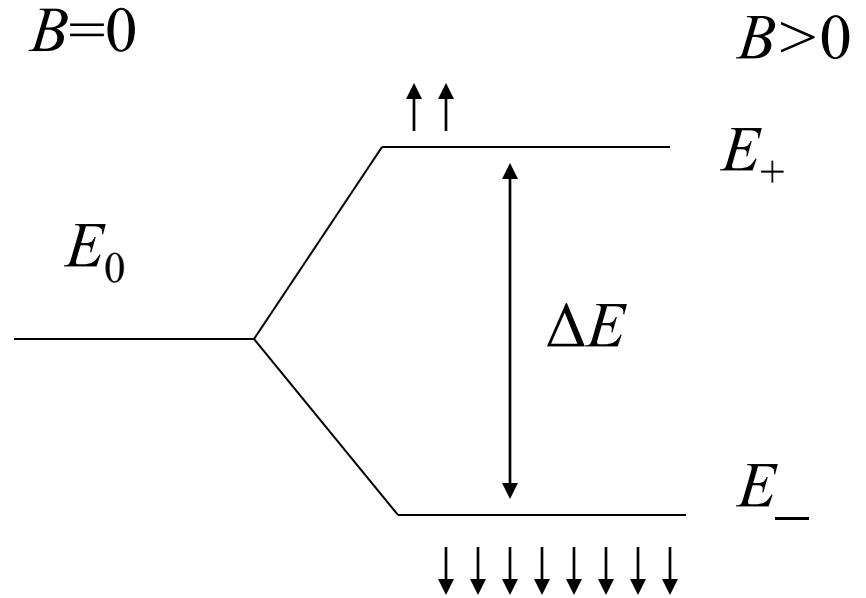
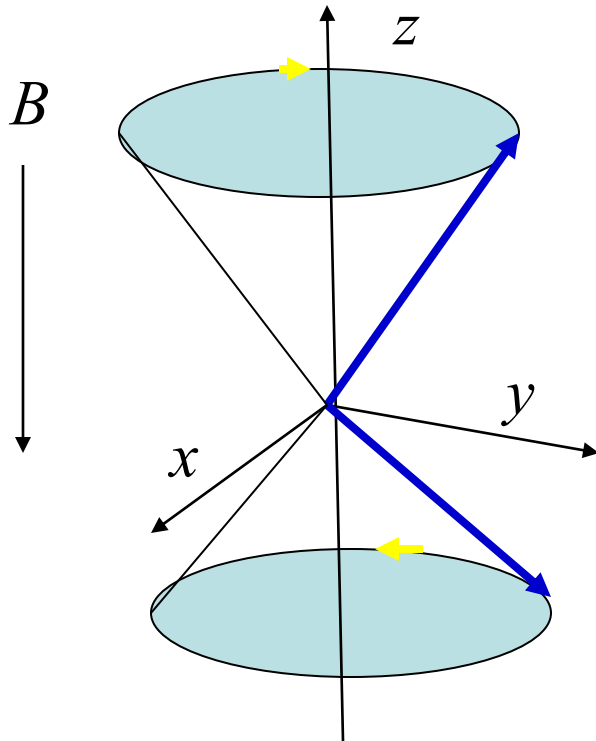
Pravděpodobnost přechodu II

Ze vztahu pro pravděpodobnost přechodu vidíme, že při resonanci, tj. pro $\omega = \omega_B$ může tato pravděpodobnost dosáhnout v jistém čase jedničky

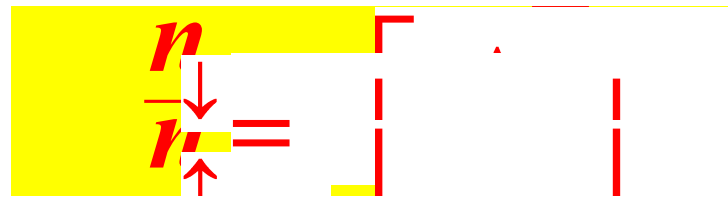


Je třeba si uvědomit, že až dosud jsme uvažovali o izolovaných jádrech. V látce je přiložené vnější magnetické pole v místě daného jádra mírně ovlivněno okolím, což vede k tzv. chemickému posuvu rezonanční frekvence. V lékařských aplikacích jsou vodíkové atomy vázány především ve skupinách $-\text{CH}_2-$ a H_2O . Pro proton s frekvencí 42 576 388 Hz při poli 1 T je chemický posuv těchto skupin 220 Hz.

Teplotní rovnováha pro jaderné spiny v látce

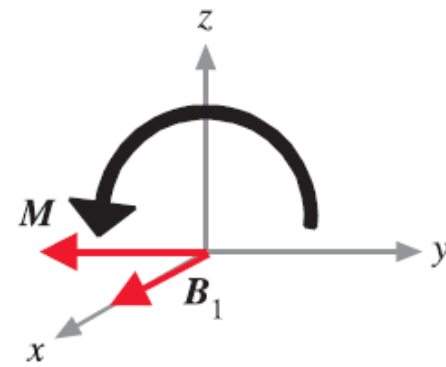
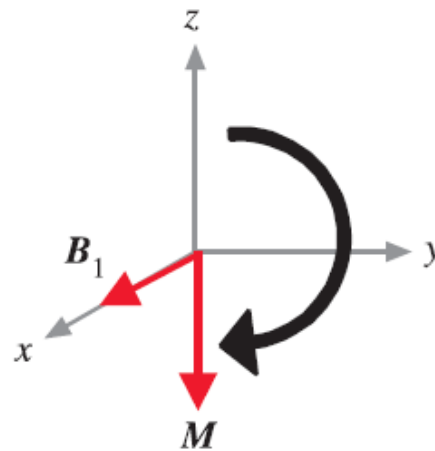
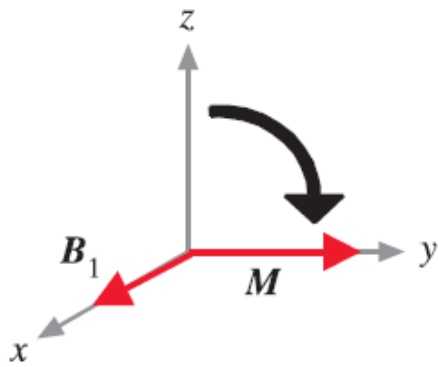
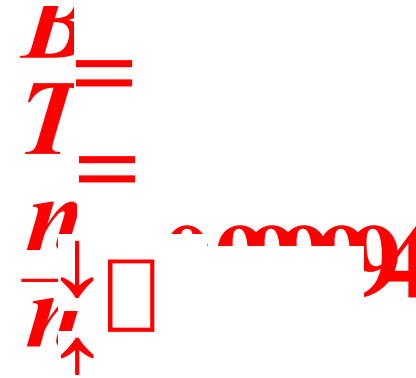


Při rovnováze

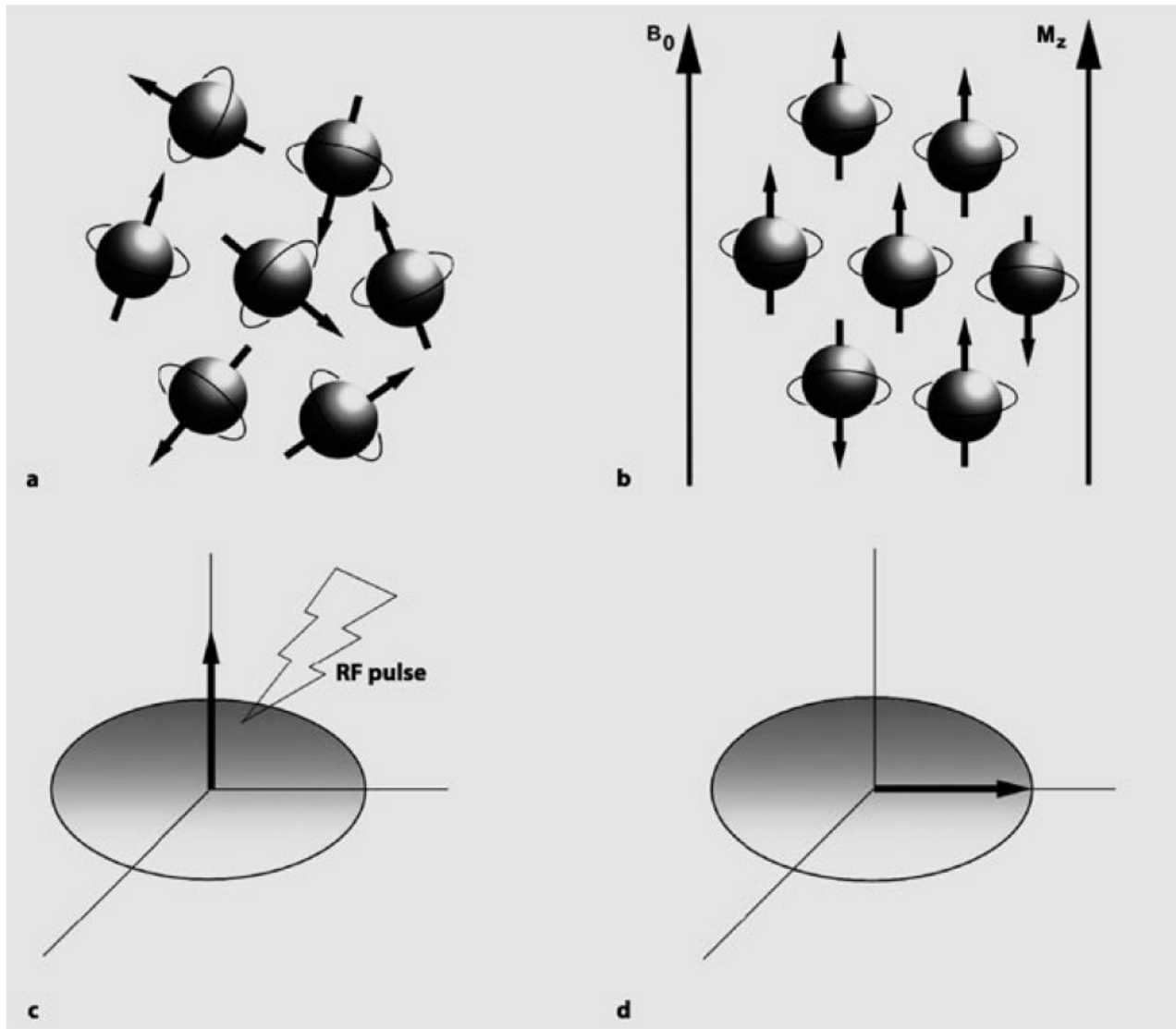


Narušení rovnováhy I

I tak velmi malý rozdíl v koncentraci vytváří při obrovské hustotě protonů v látce makroskopickou magnetizaci M_0 ve směru osy z . Tu můžeme ovlivnit vhodně trvajícím pulsem radiofrekvenční (rf) vlny s rezonanční frekvencí. Na obrázcích je účinek jednoho 90° a dvou 180° rf pulsů.



Narušení rovnováhy II



Náhodně orientované spiny (a) se v silném magnetickém poli orientují a tak vzniká makroskopicky měřitelná magnetizace (b).
Vhodně orientovaný puls vysokofrekvenčního pole (c) překlopí magnetizaci do roviny kolmé k poli (d).

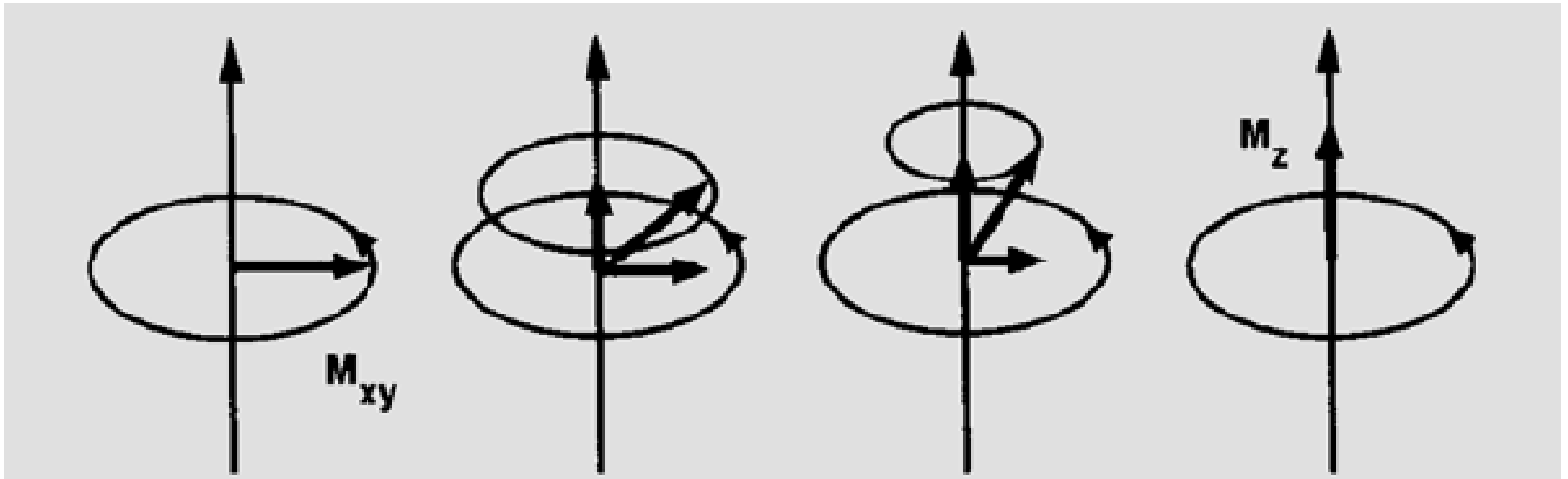
Návrat k rovnováze I

Předpokládejme, že jsme v čase $t=\tau$ dosáhli rf pulsem nulové magnetizace ve směru osy z . Interakcí s okolím ale dochází ke zpětnému přechodu do rovnovážného stavu s tzv. konstantou spinově – mřížkové interakce T_1 . Při volné precesi nejsou složky magnetických momentů v rovině $x - y$ u jednotlivých jader ve fázi, takže celková magnetizace ve směru x a y je nulová. Za působení rf pole se sfázují a tak i celková magnetizace rotuje obdobně jako jednotlivé momenty. Po vypnutí rf pole se opět sfázování poruší, to se děje s časovou konstantou T_2 :

$$\begin{matrix} M_z = \\ M_x = \\ M_y = \end{matrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

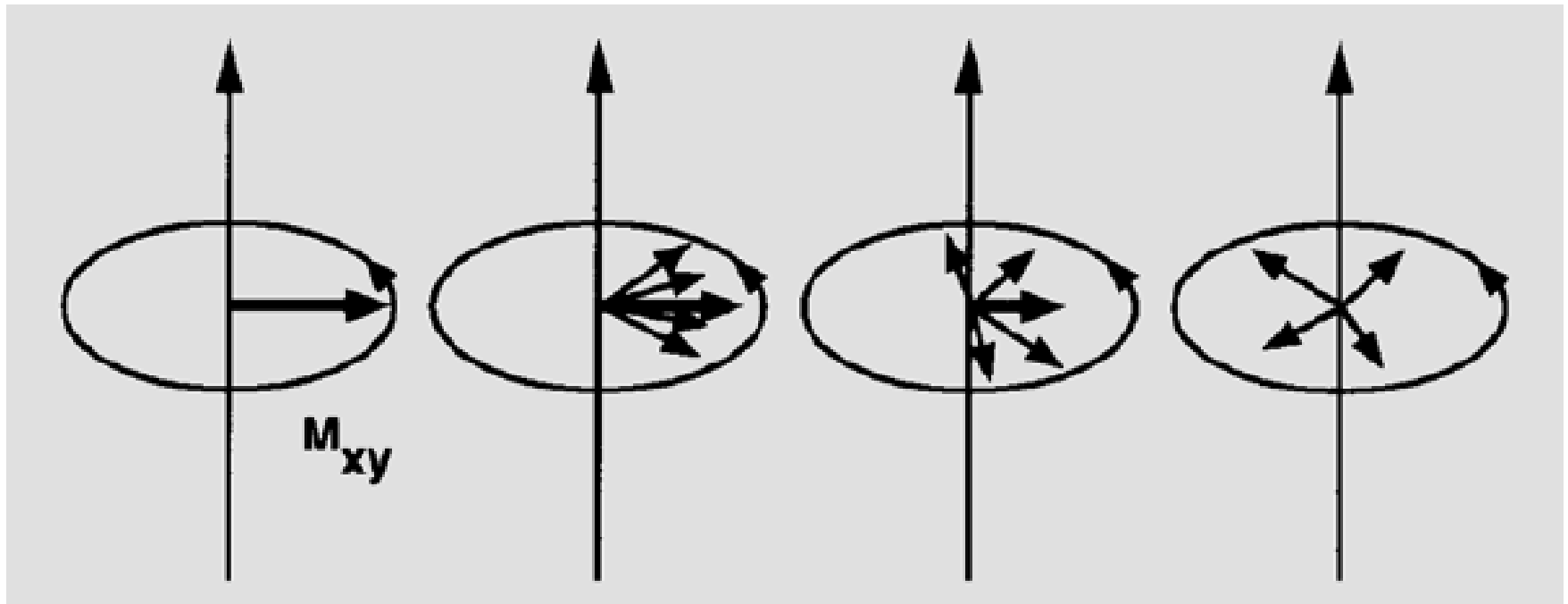
Návrat k rovnováze II

Interakcí s okolím dochází ke zpětnému přechodu do rovnovážného stavu s tzv. konstantou spinově – mřížkové interakce T_1 . Přitom předává jádro energii okolí (přechází z nabuzeného stavu – nevýhodné orientace spinu – do základního stavu s výhodnou orientací spinu)



Návrat k rovnováze III

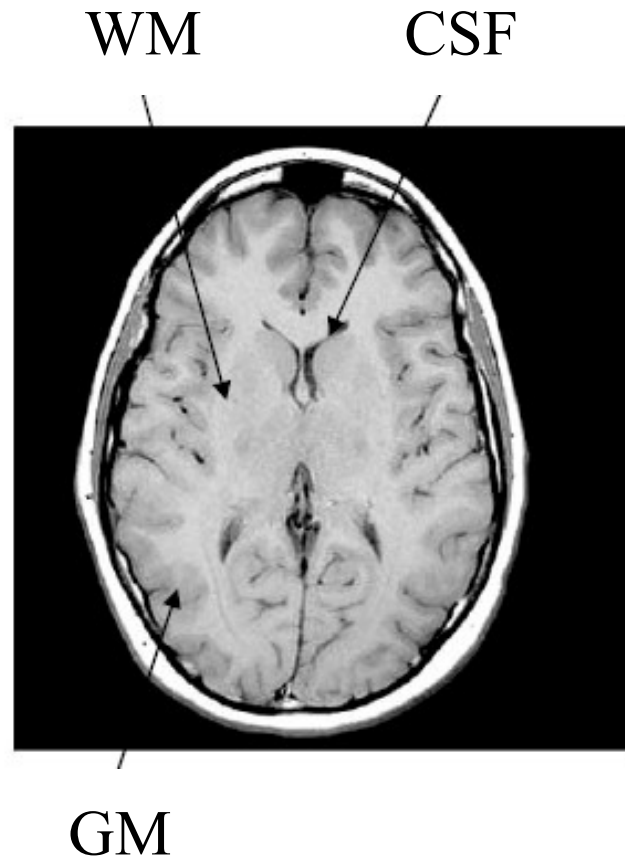
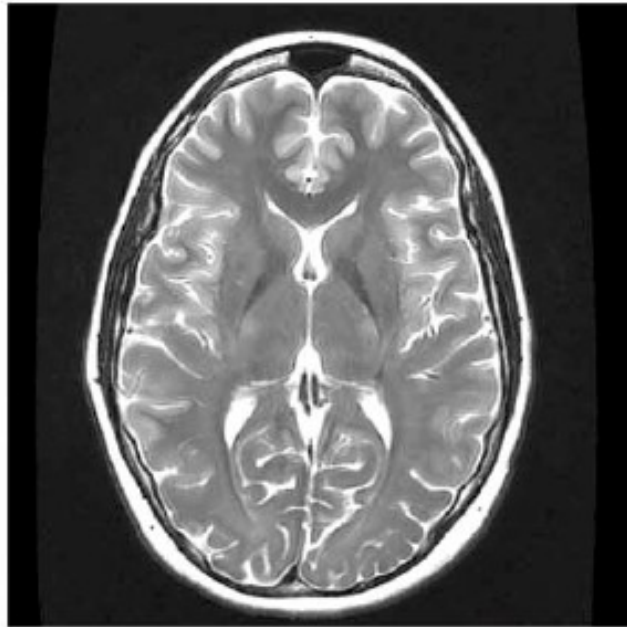
Po vypnutí rf pole se vlivem nepatrně magneticky odlišného okolí opět sfázování poruší, to se děje s časovou konstantou T_2 , na rozdíl od spin – mřížkové relaxace k předávání energie nedochází.



Časové konstanty T_1 a T_2

Typ látky	T_1 [ms]	T_2 [ms]
tuk	250	60
sval	900	50
krev	1400	100-200
mozek		
šedá hmota (GM)	950	100
bílá hmota (WM)	600	80
cerebrospinální tekutina (CSF)	2000	250

Kontrast v T_1 a T_2



Blochovy rovnice

Blochovy rovnice zahrnují všechny vlivy, které působí na vektor magnetizace (makroskopický, tj. střední hodnota z velkého počtu jader): precesi v základním homogenním poli, vliv rf pole a relaxační jevy.

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} &= \gamma M_y B_z - \gamma M_z B_y \\ \frac{dM_y}{dt} &= \gamma M_z B_x - \gamma M_x B_z \\ \frac{dM_z}{dt} &= \gamma M_x B_y - \gamma M_y B_x \end{aligned}$$

Řešení Blochových rovnic

Blochovy rovnice jdou řešit za zjednodušujícího předpokladu ustáleného stavu magnetizace podél osy z analyticky. Potom dostaneme pro dvě zcela odlišně se chovající složky magnetizace vztahy

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{\hbar}{2} \omega - \\
 M_y &= \frac{\hbar}{2} \omega + \\
 M_z &= \frac{\hbar}{2} \omega -
 \end{aligned}$$

Blochovy rovnice vzniknou z kvantově-mechanických rovnic pro operátory jako rovnice pro jejich střední hodnoty.

Jak získat obraz při MRI?

Vytvoření obrazu vyžaduje splnit dvě základní podmínky:

- ✓ najít způsob, jak získat informaci jen z dané malé oblasti a
- ✓ najít způsob, jak vytvářet kontrast.

Jev NMR: Felix Bloch a Edward Purcell 1946 (Nobelova cena 1952)

Rozdíly v signálu od normálních a od rakovinných oblastí:
Raymond Damadian 1971

Zobrazení malých oblastí pomocí gradientu pole: Paul Lauterbur 1973 a Peter Mansfield 1974 (Nobelova cena 2003)

Gradientní cívky dělají hluk

MRI Scanner Gradient Magnets

