

Radiologická fyzika

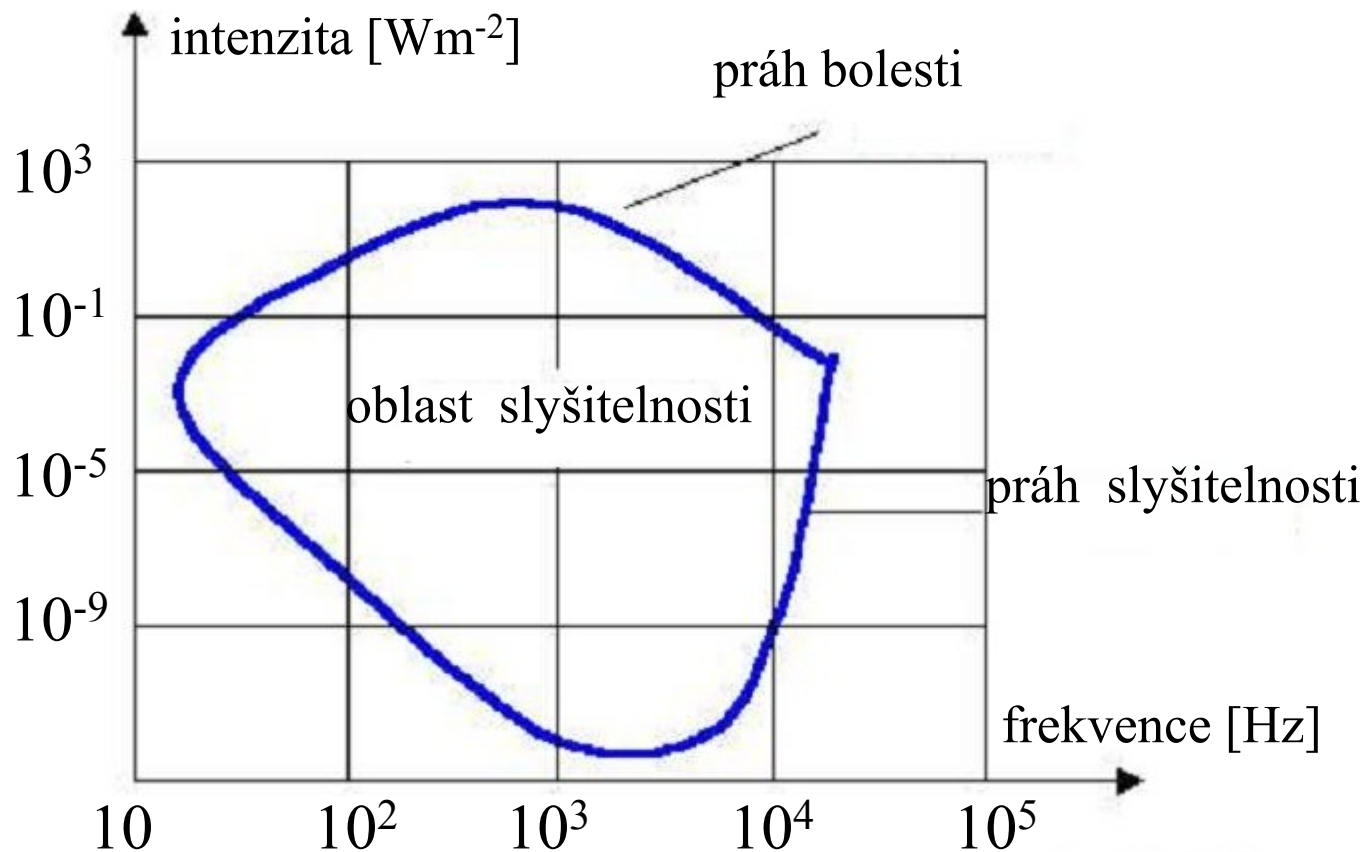
Ultrazvuková diagnostika

25. listopadu 2013

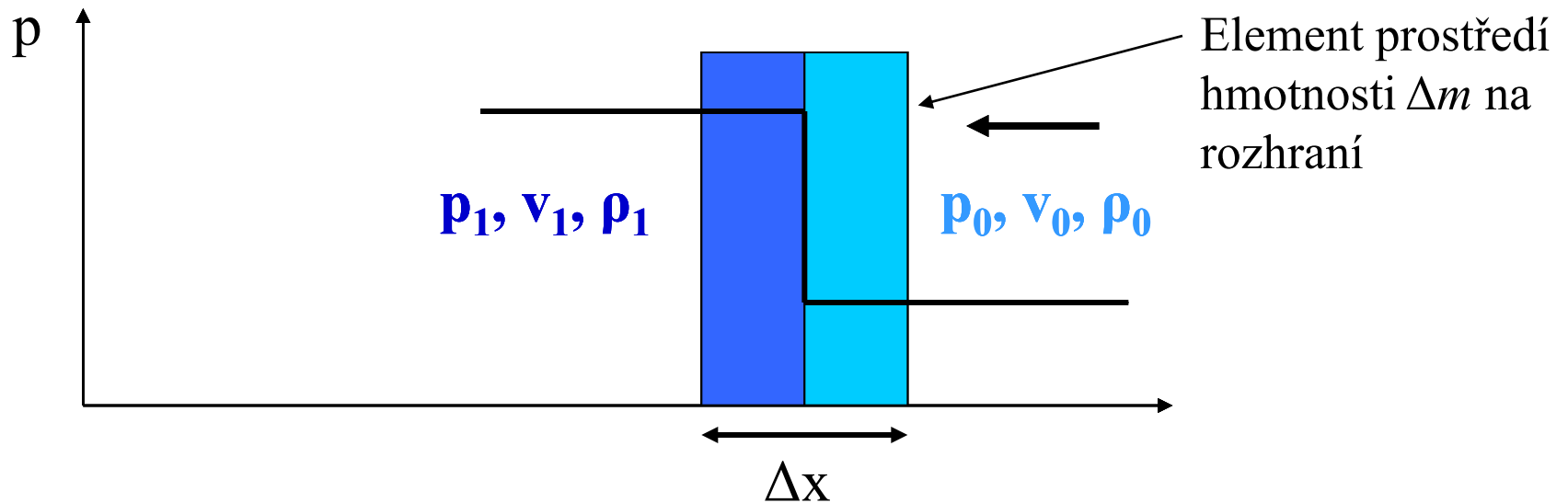
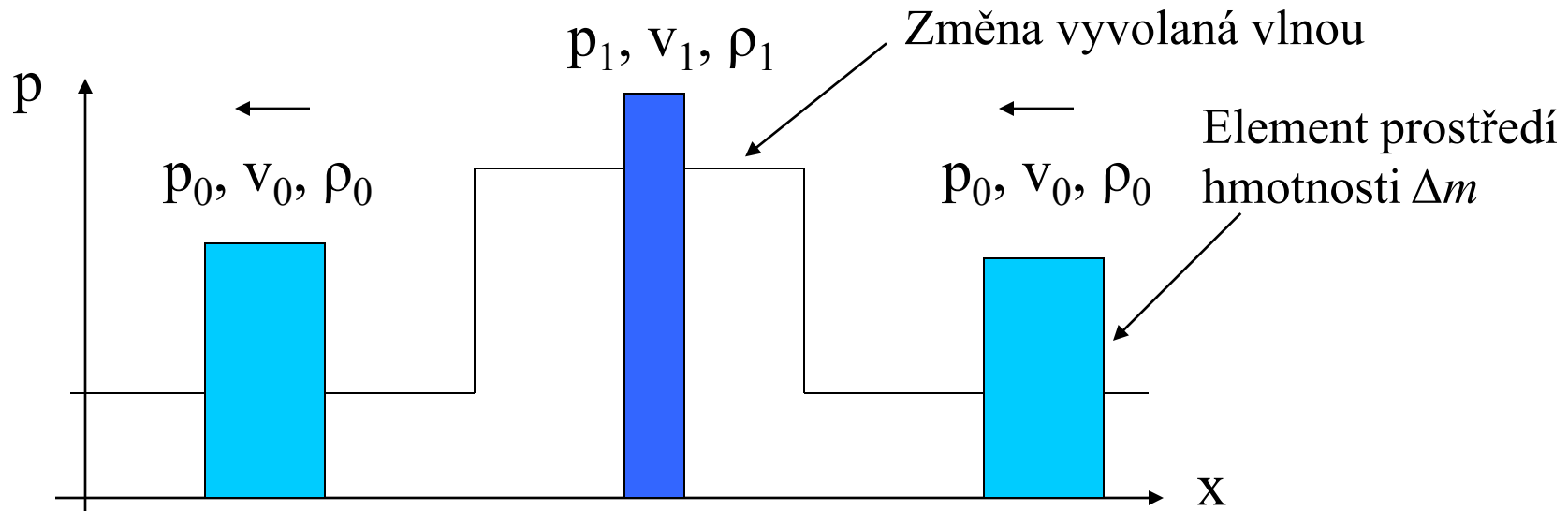
Ultrazvuk

Ultrazvuk je zvukové vlnění s frekvencí vyšší jak 20 kHz. Tato hranice je dána hranicí slyšitelnosti zvuku u průměrného lidského ucha. Pro ultrazvukovou diagnostiku v medicíně (velmi rozšířená je také ultrazvuková diagnostika v různých inženýrských aplikacích) se používají frekvence řádu jednotek až desítek MHz.

Citlivost ucha k frekvencím



Šíření zvukové vlny



Newtonův druhý zákon

Známý tvar Newtonova zákona přepíšeme na

$$\underbrace{\frac{\rho_0 + \rho_1}{2} \Delta x S}_m \underbrace{\frac{v_0 - v_1}{\Delta t}}_a = \underbrace{p_1 - p_0}_F S$$

Dosadíme

$$\Delta x = \frac{v_0 + v_1}{2} \Delta t$$

a dostáváme

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2} \frac{v_0 + v_1}{2} (v_0 - v_1)$$

Zákon zachování hmoty

$$\rho_0 v_0 = \rho_1 v_1$$

umožní úpravou vyjádřit rozdíl rychlostí

$$\rho_0 v_0 - \frac{1}{2} \rho_1 v_0 - \frac{1}{2} \rho_0 v_1 = \rho_1 v_1 - \frac{1}{2} \rho_1 v_0 - \frac{1}{2} \rho_0 v_1 \Rightarrow$$

$$(\rho_0 + \rho_1)(v_0 - v_1) = (\rho_1 - \rho_0)(v_1 + v_0)$$

Rychlost zvuku

Předchozími úpravami dostáváme

$$\left(\frac{v_0 + v_1}{2} \right)^2 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0}$$

neboli výraz pro rychlost zvuku (pro rychlost zvuku budeme v této části nadále používat c , na rozdíl od rychlosti pohybu elementu prostředí, kterou budeme značit v)

$$c = \left(\frac{\Delta p}{\Delta \rho} \right)^{1/2}$$

Označíme-li K modul pružnosti

$$K = \rho \frac{\Delta p}{\Delta \rho}$$

je konečný výraz pro rychlost zvuku

$$c = \left(\frac{K}{\rho} \right)^{1/2}$$

Rychlost zvuku pro různá prostředí

| PROSTŘEDÍ | $\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ | PROSTŘEDÍ | $\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ | PROSTŘEDÍ | $\frac{v}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ |
|--------------------------|--|--------------------------------|--|-----------------------------|--|
| <i>Plyny^a</i> | | <i>Pevné látky^a</i> | | <i>Kapaliny^a</i> | |
| Vzduch (0 °C) | 331 | Hliník | 6 420 | Voda (0 °C) | 1 402 |
| Vzduch (20 °C) | 343 | Ocel | 5 941 | Voda (20 °C) | 1 482 |
| Helium | 965 | Žula | 6 000 | Mořská voda ^b | 1 522 |
| Vodík | 1 284 | | | | |

^a 0 °C a tlak 1 atm, pokud neuvedeno jinak.

^b Při 20 °C a salinitě 3,5 %.

Hustota vody je téměř tisíckrát větší než hustota vzduchu. Kdyby o rychlosti zvuku rozhodovala pouze hustota, dalo by se očekávat, že se ve vodě bude zvuk šířit asi třicetkrát pomaleji než ve vzduchu. Z tabulky ale vyplývá, že je ve vodě zvuk naopak čtyřikrát rychlejší než ve vzduchu. Proto by měl být modul pružnosti vody více než desetitisíckrát větší než u vzduchu. Tak tomu skutečně je, protože voda je v porovnání se vzduchem mnohem hůř stlačitelná.

Rovinná vlna

Později zvolíme pro teorii vhodnější popis zvukové vlny. Pro tyto elementární úvahy mějme jako $s(x,t)$ okamžitou výchylku malého elementu prostředí z rovnovážné polohy (rozměr [s]=m)

$$s = s_m \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - f t \right) \right] = s_m \sin [k x - \omega t]$$

Protože

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad , \quad k = \frac{\omega}{c}$$

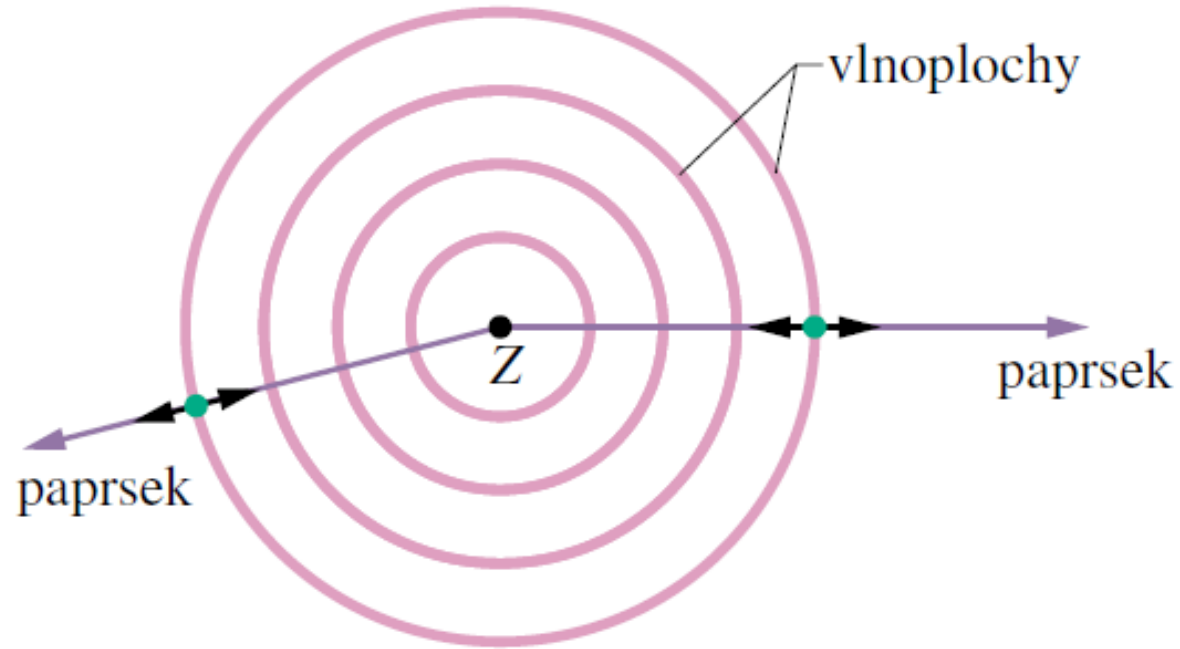
můžeme také psát

$$s = s_m \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - c t) \right] = s_m \sin \left[\omega \left(\frac{x}{c} - t \right) \right]$$

Kulová vlna

Popis

$$s = s_m \frac{r_0}{r} \sin \left[2\pi \left(\frac{r}{\lambda} - f t \right) \right]$$



Energie zvukové vlny

Kmitající element prostředí (objemu $\Delta V = S\Delta x$) má energii jak kinetickou, tak potenciální. V okamžiku, kdy je rychlost kmitání elementu prostředí maximální (to není rychlost zvukové vlny!) je celá energie obsažena v kinetické části. Je tedy

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \cos[kx - \omega t] \Rightarrow v_m = \omega s_m$$

a dále

$$\Delta E = \frac{1}{2} \underbrace{\rho S \Delta x}_{\Delta m} \underbrace{(\omega s_m)^2}_{v_m^2}$$

Výkon zvukové vlny pak bude ($\Delta x = c\Delta t$) – tady už přirozeně c je rychlost zvuku

$$W = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 s_m^2 S$$

Intenzita zvukové vlny

Intenzita je energie zvukové vlny, která projde jednotkovou plochou za jednotku času

$$I = \frac{W}{S} = \frac{\Delta E}{S \Delta t} \quad , \quad [I] = \text{W m}^{-2}$$

neboli

$$I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 s_m^2$$

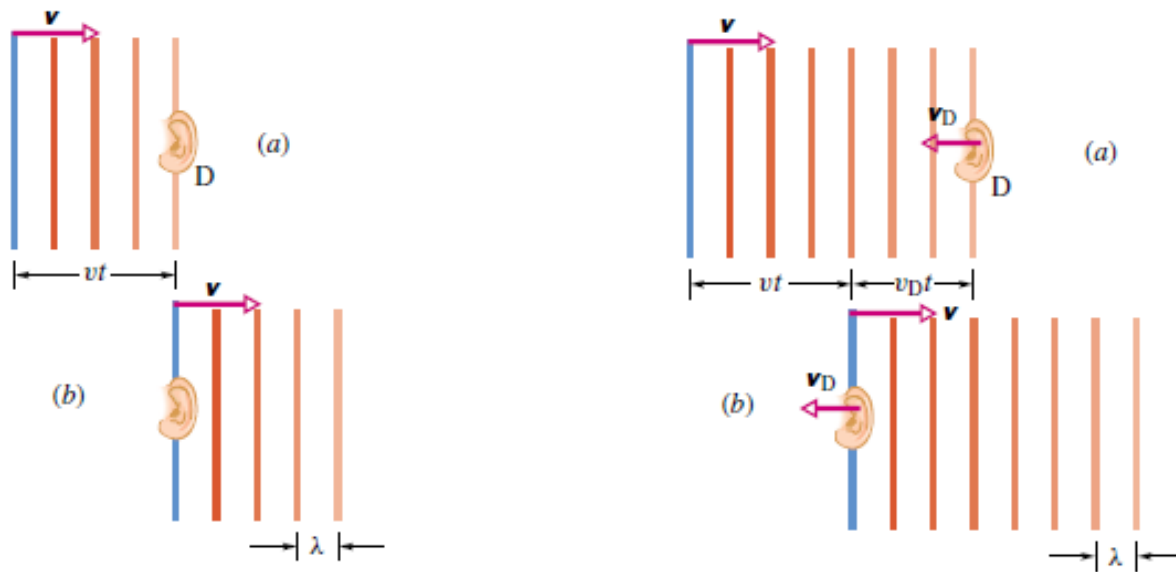
Hladina intenzity zvuku

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0} \quad , \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$$

V amplitudách, kdy $I^{1/2} = s_m$ a $\log(a^n) = n \log(a)$

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \left(\frac{I^{1/2}}{I_0^{1/2}} \right)^2 = (20 \text{ dB}) \log \frac{s_m}{s_{m0}}$$

Pohyb detektoru ke zdroji



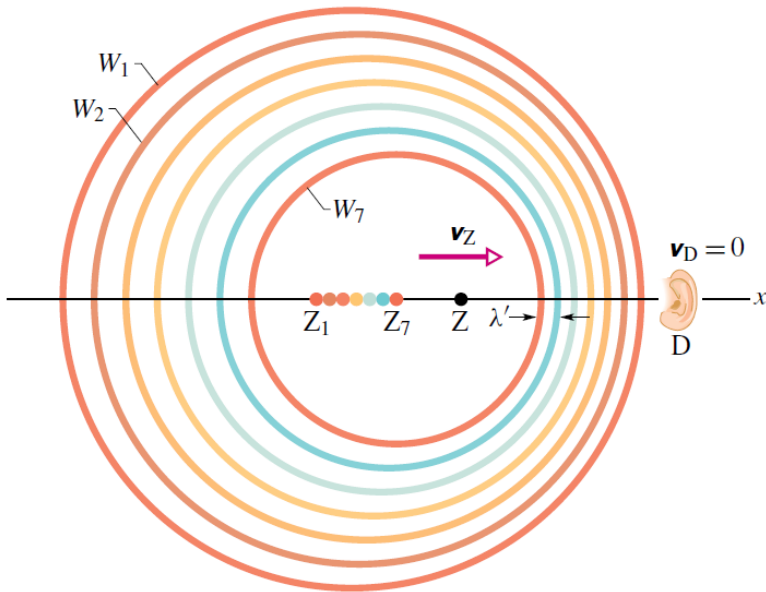
Zdroj i detektor v klidu

Zdroj v klidu, detektor se pohybuje ke zdroji

$$f' = \frac{c' t}{\lambda} = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c + v_D}{c} = f \frac{c + v_D}{c}$$

Počítáme takto: dráha c'/t , o kterou se za dobu t posunuly vlnoplochy dělena vlnovou délkou λ je rovna počtu vlnových délek. Tento počet vydělíme dobou t a dostáváme frekvenci f .

Pohyb zdroje k detektoru



Detektor je v klidu, zdroj se přibližuje k detektoru. Vlnoplochy vycházejí ze zdroje v intervalu $T=1/f$, takže jejich vzdálenost je vlnová délka λ . Detektor ovšem zaznamená vzhledem k pohybu zdroje (vlnoplochy nejsou vysílány ze stejného bodu) vzdálenost vlnoploch λ' .

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{cT - v_Z T} = \frac{c}{\frac{c}{f} - \frac{v_Z}{f}} = f \frac{c}{c - v_Z}$$

Dopplerův jev

Zdroj je v klidu, detektor se pohybuje ke zdroji

$$f' = f \frac{c + v_D}{c}$$

Detektor je v klidu, zdroj se pohybuje k detektoru:

$$f' = f \frac{c}{c - v_Z}$$

Při sblížení

$$f' > f$$

Zdroj je v klidu, detektor se pohybuje od zdroje

$$f' = f \frac{c - v_D}{c}$$

Při vzdalování

Detektor je v klidu, zdroj se pohybuje od detektoru:

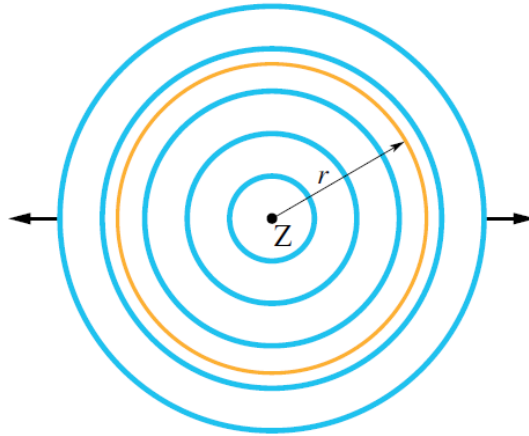
$$f' = f \frac{c}{c + v_Z}$$

$$f' < f$$

Pokles intenzity

Výkon zdroje označme P_Z , intenzita kulové vlny vycházející z počátku

$$I = \frac{P_Z}{4\pi r^2}$$



Máme-li několik (nekoherentních) zdrojů, je intenzita součtem

$$I = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{P_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Malý příklad výkladu z obecné fyzice

V závěrečných několika snímcích je příklad toho, jak asi vypadá výklad odvození rychlosti zvukové vlny v bakalářském kursu fyziky. Kromě následujícího užitečného snímku to berme jen jako (možná zajímavou) ukázkou.

Potřebné vztahy

Polohový vektor v kartézských souřadnicích, funkce souřadnic a její gradient

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad , \quad f = f(x, y, z) \quad , \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Vektorové pole a jeho divergence

$$\vec{u} = u_x(x, y, z)\vec{i} + u_y(x, y, z)\vec{j} + u_z(x, y, z)\vec{k} \quad ,$$

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Skalární součin

$$\vec{u} \cdot \text{grad } f = u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

| | | | |
|------------------------|-----------------------|----------|---------------------------|
| skalární součin | dva vektory | → | skalární veličina |
| gradient | funkce | → | vektorová veličina |
| divergence | vektorové pole | → | skalární veličina |

Rychlost zvuku I

Základními rovnicemi jsou rovnice kontinuity a Eulerova rovnice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad , \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = -\frac{\operatorname{grad} p}{\rho}$$

Tyto rovnice můžeme upravit na přirozená tvrzení. První rovnici integrací přes nějaký objem a užitím Gaussovy věty

$$M = \int_V \rho dV \quad , \quad \frac{dM}{dt} = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad \square$$

na zákon zachování hmoty

$$\frac{dM}{dt} = \Pi$$

Druhá rovnice po vynásobení malým elementem objemu ΔV a zápisu derivace rychlosti

$$m = \rho \Delta V \quad , \quad \vec{F} = -\Delta V \operatorname{grad} p \quad , \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v}$$

je druhý Newtonův zákon

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Rychlost zvuku II

Základními rovnicemi jsou rovnice kontinuity a Eulerova rovnice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = - \frac{\operatorname{grad} p}{\rho}$$

Pro malé kmity (položíme $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $p = p_0 + \delta p$) ponecháme v rovnicích jen členy prvního řádu v $\delta\rho$, δp a v , takže máme

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\operatorname{grad} \delta p}{\rho_0} = 0$$

Stejně jako každý pohyb v ideální tekutině je i šíření zvuku děj adiabatický. Proto můžeme psát

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \delta \rho$$

Rychlost zvuku III

Máme teď z rovnice kontinuity (v dalším už budeme vynechávat index 0)

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Zapišeme ještě vektor rychlosti jako gradient nějaké potenciálové funkce φ

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$$

a linearizovaná Eulerova rovnice je pak

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Máme pak již vlnovou rovnici s výrazem pro rychlost zvuku

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$$

Rychlost zvuku a rychlost kmitání

V jednorozměrném případě je jedním z řešení $\varphi=f(x-vt)$. Potom máme

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f'(x-ct) \quad , \quad \delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho c f'(x-ct)$$

odkud porovnáním

$$\left. \begin{array}{l} \delta p = \rho c v \\ \delta p = c^2 \delta \rho \end{array} \right\} \Rightarrow v = c \frac{\delta \rho}{\rho}$$

Pro kolísání teploty musíme připomenout termodynamickou identitu

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

takže

$$\delta T = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{T}{c_p} v c$$

Ideální plyn

Pro 1 mol ideálního plynu platí stavová rovnice

$$pV = RT \quad , \quad R = N_A k_B$$

$R=8,316 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ je univerzální plynová konstanta. Při adiabatickém ději můžeme zapsat první větu termodynamickou jako

$$T dS = \delta Q = 0 = dU + p dV = C_V dT + p dV$$

nebo jako

$$T dS = \delta Q = 0 = dH - V dp = C_p dT - V dp$$

kde U je vnitřní energie a $H=U+pV$ entalpie jednoho molu ideálního plynu, C_V a C_p jsou specifická tepla

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_S = \frac{1}{T} \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p \quad , \quad C_p = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_S = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_S + R = \frac{1}{T} \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p$$

Plyn složený z jednoatomových molekul má pouze tři translační stupně volnosti, u dvouatomových přibudou ještě další dva na vzájemné oscilace, tedy $C_V=3R/2$ nebo $C_V=5R/2$.

Rychlost zvuku v ideálním plynu

Stavovou rovnici přepíšeme na

$$p = \frac{RT}{\mu} \rho$$

kde μ je molární hmotnost. nová konstanta. Snadno tedy spočteme derivaci tlaku podle hustoty při konstantní teplotě. Pro výpočet derivace při adiabatickém ději (tj. při konstantní entropii) musíme počítat s jakobiány

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_S = \frac{\partial(p, S)}{\partial(\rho, S)} = \frac{\partial(p, S)}{\partial(\rho, S)} \cdot \frac{\partial(\rho, S)}{\partial(\rho, T)} = \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_p \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_T = \frac{C_p}{C_v} \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_T$$

Rychlost zvuku v ideálním plynu je

$$c = \left(\frac{c_p RT}{c_v \mu} \right)^{1/2}$$