Radiologická fyzika

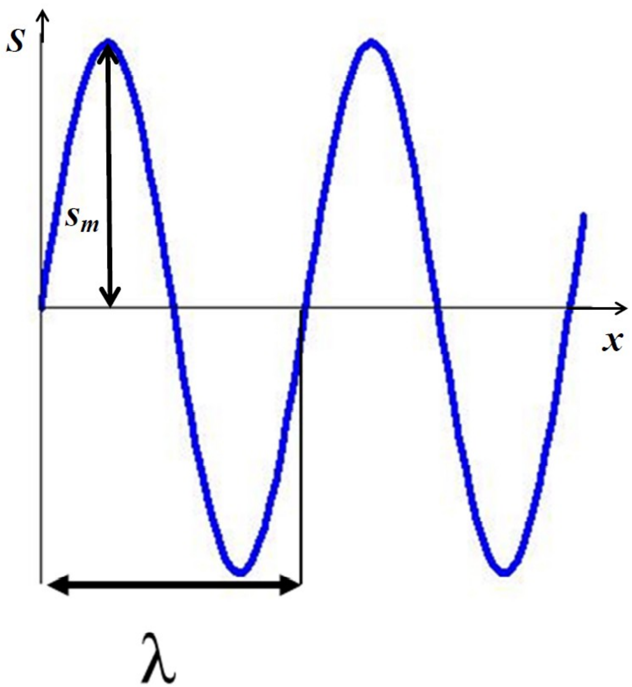
Ultrazvuk –

vlnové vlastnosti

2. prosince 2013

Ultrazvuk

Ultrazvuk je zvukové vlnění s frekvencí f > 20 kHZ. Pro ultrazvukovou diagnostiku v medicíně se používají frekvence řádu jednotek až desítek MHz.



$$s = s_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right]$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

vlastnosti prostředí

vlastnosti zdroje

Základní rovnice

Základními rovnicemi jsou rovnice kontinuity a Eulerova rovnice

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\right) \qquad \ldots \qquad \vec{\;}\;\;\vec{\;} \qquad \rho$$

Pro malé kmity ponecháme v rovnicích jen členy prvního řádu v malých veličinách δρ, δ*p* a *v*

$$\rho=\rho+\delta\rho\;,\;\;p=p+\delta p$$

takže dostáváme rovnici kontinuity a Eulerovu rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} \qquad\qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\frac{\;\;\partial p}{\rho}=0$$

Stejně jako každý pohyb v ideální tekutině je i šíření zvuku děj adiabatický. Proto můžeme psát

$$\delta p=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S\delta\rho$$

Rychlost pohybu elementu prostředí

Elementární úpravami dvou základních rovnic hydrodynamiky dospějeme k výrazu pro rychlost zvuku

$$\boxed{c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}}$$

(čtverec rychlosti zvuku je dán změnou tlaku v daném elementu prostředí se změnou hustoty v tomto elementu, aniž si sousední elementy vyměňují teplo). Zapíšeme-li totiž vektor rychlosti daného elementu jako gradient nějaké potenciálové funkce φ a místní změnu tlaku jako záporně vzatou derivaci podle času této funkce násobenou hustotou, je tato funkce řešením vlnové rovnice (Δ je Laplaceův operátor)

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0}$$

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Potenciálová funkce

Obecný tvar vlnové rovnice pro potenciálovou funkci je

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c^2\Delta\varphi=0}$$

V kartézských souřadnicích je φ=φ(x,y,z) a gradient a laplacián mají jednoduché vyjádření

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}, \quad \Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Pokud jde o rozměr potenciálové funkce φ, máme

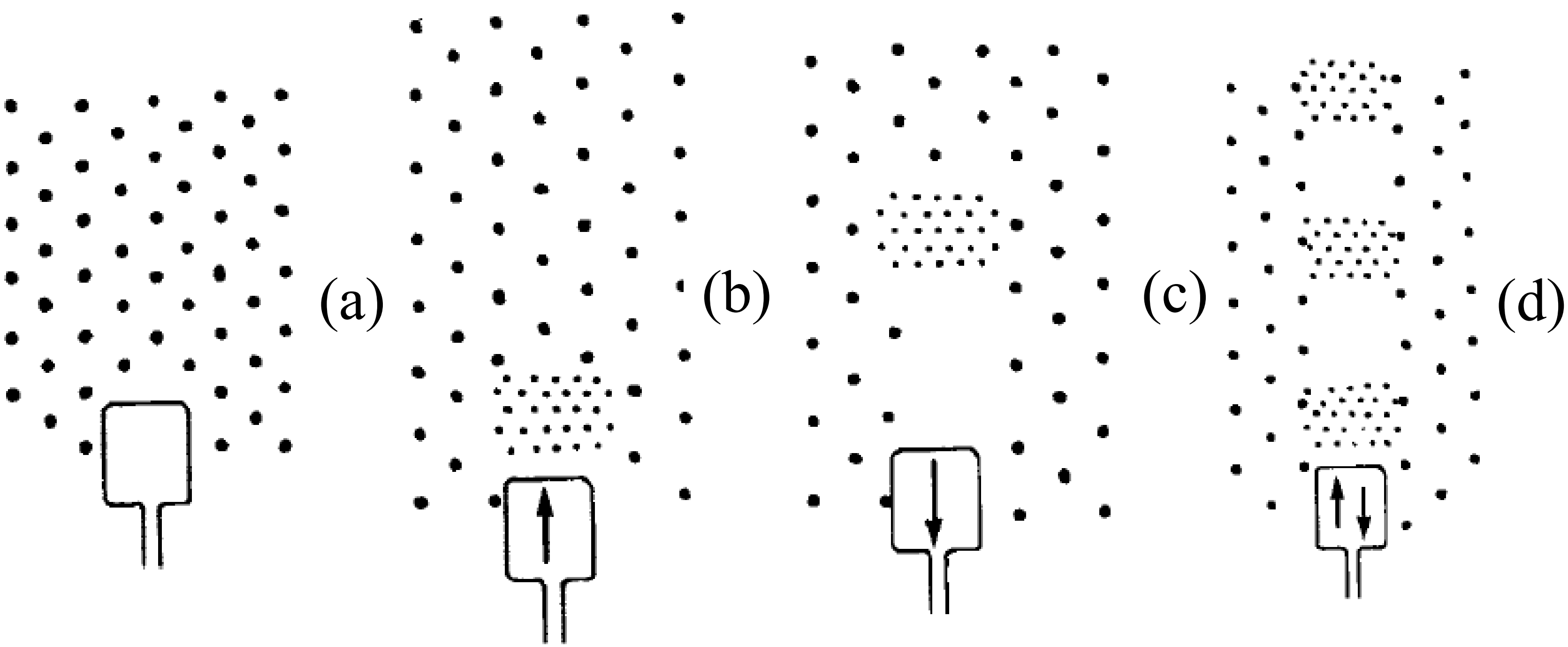
$$[v_x]=\mathrm{m\,s^{-1}}=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]=\frac{[\varphi]}{[x]}=\mathrm{m^{-1}}[\varphi] \Rightarrow [\varphi]=\mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

nebo také

$$[\delta p]=\mathrm{N\,m^{-2}}=\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}=\left[-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]=\frac{[\rho][\varphi]}{[t]}=\mathrm{kg\,m^{-3}\,s^{-1}}[\varphi] \Rightarrow [\varphi]=\mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

Pohyb pístu jako zdroj

Píst (a) při pohybu vzhůru stlačuje vzduch (b) a posuvá jej dopředu, při zpětném pohybu dolů zůstává na jeho místě zředění (c). Periodické opakování (d) vede ke vzniku postupující vlny zhuštění a zředění.



Rovinná vlna

Vlnová rovnice pro potenciálovou funkci, která závisí jen na čase a jedné kartézské souřadnici (třeba *x*) je

$$\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}=0$$

Přímým derivováním se přesvědčíme, že řešením jsou libovolné funkce tvaru

$$\varphi(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)$$

Nejjednodušším příkladem je rovinná monochromatická vlna postupující v kladném směru osy *x*

$$\varphi(x,t)=\varphi_m\cos\left[2\pi f\cdot\left(\frac{x}{c}-t\right)+\alpha\right]=\varphi_m\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\cdot(x-ct)+\alpha\right]$$

kde konstanta φ_m je amplituda a konstanta α značí fázi při $x=c.t$. Frekvence a vlnová délka spolu souvisí vztahem

$$f=\frac{c}{\lambda}\ ,\ \ 2\pi f=\omega=c\frac{2\pi}{\lambda}=ck$$

Kulová vlna

Vlnová rovnice pro potenciálovou funkci, která závisí jen na čase a radiální sférické souřadnici (značíme ji *r*) je

$$\frac{\partial^2 \varphi(r,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial r}\right) = 0$$

Přímým derivováním se přesvědčíme, že řešením jsou libovolné funkce tvaru

$$\varphi(r,t) = \frac{F(r-ct)}{r} + \frac{G(r+ct)}{r}$$

Nejjednodušším příkladem je kulová monochromatická vlna šířící se z počátku r=0

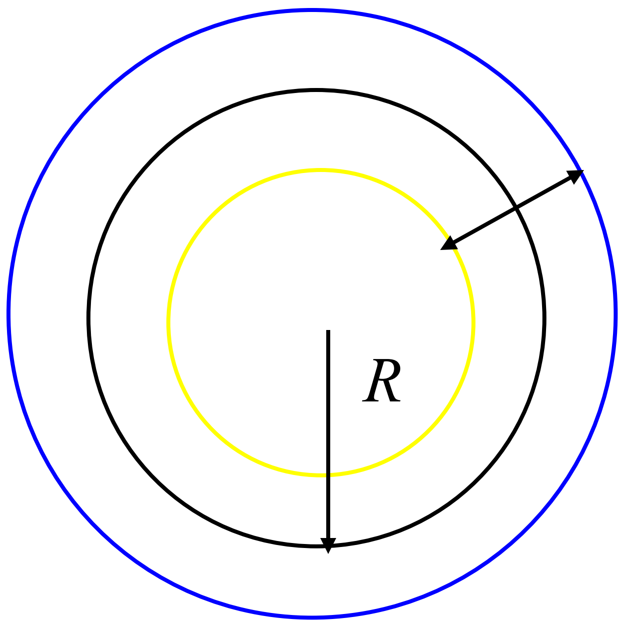
$$\varphi(r,t) = \frac{\varphi_m}{r}\cos\left[2\pi f \cdot \left(\frac{r}{c} - t\right) + \alpha\right] = \frac{\varphi_m}{r}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\cdot(r-ct) + \alpha\right]$$

kde konstanta φ_m je amplituda a konstanta α značí fázi při $x=c.t$. Frekvence a vlnová délka spolu souvisí vztahem

$$f = \frac{c}{\lambda}\ ,\ \ 2\pi f = \omega = c\frac{2\pi}{\lambda} = ck$$

Kmitající koule jako zdroj

Mějme kouli poloměru *R* vykonávající malé pulsace, tj. body na povrchu koule radiálně kmitají rychlostí $u(t)$



$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = u(t)$$

Obecná kulová vlna

Mějme kouli poloměru R vykonávající malé pulsace, tj. body na povrchu koule radiálně kmitají rychlostí $u(t)$. Řešení úlohy (tedy řešení vlnové rovnice) hledáme ve tvaru

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{r}f\left(t-\frac{r-R}{c}\right)$$

Na povrchu musí být rychlosti pohybu elementu budící koule i elementu okolního prostředí stejné

$$u(t)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R}=-\left[\frac{1}{Rc}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{f}{R^2}\right]$$

takže řešením je

$$\varphi(r,t)=-c\frac{R}{r}e^{-\frac{ct'}{R}}\int_{-\infty}^{t'}u(\tau)e^{\frac{c\tau}{R}}d\tau\ ,\ t'=t-\frac{r-R}{c}$$

Harmonická kulová vlna

Předpokládejme teď, že $u(t)=v_m.\sin(\omega t)$. Potom je výraz pro potenciálovou funkci v obecném bodě tvořen relativně jednoduchým vztahem

$$\boxed{\varphi(r,t)=\frac{\varphi_m}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r-R}{c}\right)+\alpha\right]}$$

$$\varphi_m=\frac{c v_m R^2}{\left(\omega^2 R^2+c^2\right)^{1/2}}\ ,\quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{c}{R\omega}$$

Při ultrazvukové diagnostice máme vždy $\omega R>>c$ (jinak zapsáno $R>>\lambda$), takže se vztah pro potenciálovou funkci zjednoduší na

$$\boxed{\varphi(r,t)=\frac{1}{r}\frac{cRv_m}{\omega}\cos\omega\left(t-\frac{r-R}{c}\right)}$$

Časová střední hodnota

Z různých důvodů není zajímavá a mnohdy ani dobře měřitelná okamžitá hodnota fyzikální veličiny $F(t)$, ale její střední hodnota za dobu T , tj.

$$\langle F \rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt$$

Tato doba bývá někdy velmi dlouhá (čekáme, až se nějaký jev ustálí a nezajímá nás přechodový jev). Pro veličinu s periodou $\omega=2\pi f$ je touto dobou přirozeně perioda $T=1/f$

$$\boxed{F\left(t+\frac{1}{f}\right)=F(t)\ ,\ \langle F \rangle = f\int_0^{1/f} F(t)\,dt}$$

Zejména

$$\langle \sin(2\pi f t) \rangle = f\int_0^{1/f} \sin(2\pi f t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$$

$$\langle [\sin(2\pi f t)]^2 \rangle = f\int_0^{1/f} [\sin(2\pi f t)]^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin x)^2\,dx = \frac{1}{2}$$

Intenzita harmonické kulové vlny

Pro rychlost pohybu elementu prostředí máme

$$\boxed{v(r,t) = v_m \frac{R}{r} \sin\omega\left(t - \frac{r-R}{c}\right)}$$

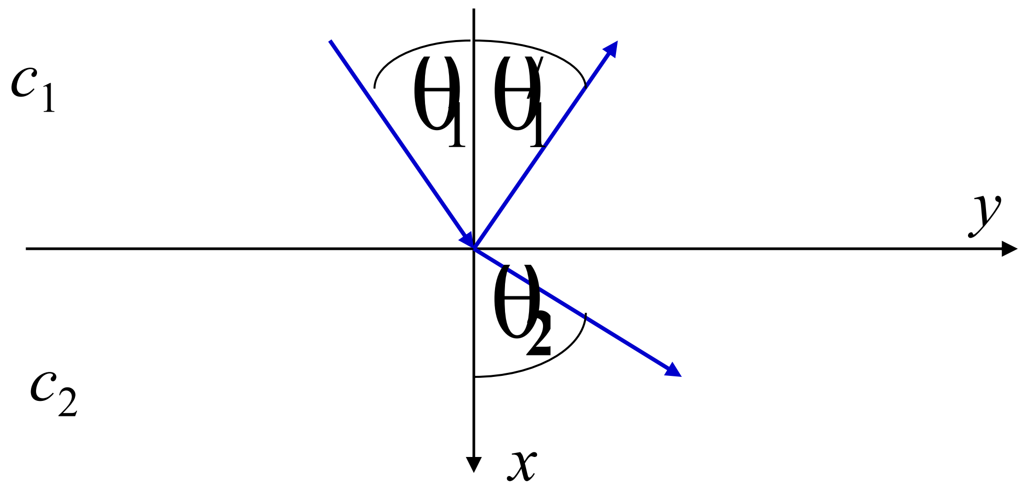
a pro místní změnu tlaku

$$\boxed{\delta p(r,t) = \rho v_m \frac{Rc}{r} \sin\omega\left(t - \frac{r-R}{c}\right)}$$

Pro intenzitu zvukové vlny (tok energie jednotkovou ploškou za jednotku času) dostáváme ve střední hodnotě

$$\boxed{I(r) = \langle v(r,t)\,\delta p(r,t)\rangle = \frac{1}{2}\rho c v_m^2 \frac{R^2}{r^2}}$$

Odraz a lom na rozhraní



Pro dopadající, odraženou a prošlou vlnu máme

$$\varphi_1 = s_1 \sin\left[\omega\left(\frac{x\cos\theta_1}{c_1} + \frac{y\sin\theta_1}{c_1} - t\right)\right]$$

$$\varphi_1' = s_1' \sin\left[\omega\left(-\frac{x\cos\theta_1}{c_1} + \frac{y\sin\theta_1}{c_1} - t\right)\right]$$

$$\varphi_2 = s_2 \sin\left[\omega\left(\frac{x\cos\theta_2}{c_2} + \frac{y\sin\theta_2}{c_2} - t\right)\right]$$

Podmínky spojitosti

Na rozhraní (x=0) musí být u všech vln stejná závislost na souřadnici y (vlastnosti prostředí se v tomto směru nemění), což vede k tomu, že úhel odrazu je roven úhlu dopadu a poměr sinů úhlů dopadu a lomu (úhel se měří od kolmice k rozhraní) je roven poměru rychlostí

$$\theta_1 = \theta_1' \;, \quad \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Dále se musí rovnat tlak a kolmá složka rychlosti na obou stranách rozhraní

$$\delta p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \;, \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

odkud

$$\rho_1 \left(s_1 + s_1' \right) = \rho_2 s_2 \;, \quad \frac{\cos\theta_1}{c_1} \left(s_1 - s_1' \right) = \frac{\cos\theta_2}{c_2} s_2$$

Intenzita odražené a lomené vlny

Řešení rovnic popisujících podmínky na rozhraní dává

$$s_1' = \frac{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 - \rho_1 c_1 \cos\theta_2}{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 + \rho_1 c_1 \cos\theta_2} s_1 \quad , \quad s_2 = \frac{2\rho_1 c_2 \cos\theta_1}{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 + \rho_1 c_1 \cos\theta_2} s_1$$

Energie dopadající na jednotkovou plošku rozhraní resp. energie odražená jednotkovou ploškou nebo propuštěná jednotkovou ploškou je

$$E_1 = \rho_1 c_1 \langle v_1^2 \rangle \cos\theta_1 \quad , \quad E_1' = \rho_1 c_1 \langle v_1'^2 \rangle \cos\theta_1 \quad , \quad E_2 = \rho_2 c_2 \langle v_2^2 \rangle \cos\theta_2$$

Koeficienty propustnosti a odrazivosti jsou definovány jako

$$R = \frac{E_1'}{E_1} \quad , \quad T = \frac{E_2}{E_1} \quad , \quad R + T = 1$$

Akustická impedance je definována jako součin hustoty prostředí a rychlosti zvuku v tomto prostředí

$$\boxed{Z = \rho c}$$

Pro kolmý dopad na rozhraní dvou prostředí

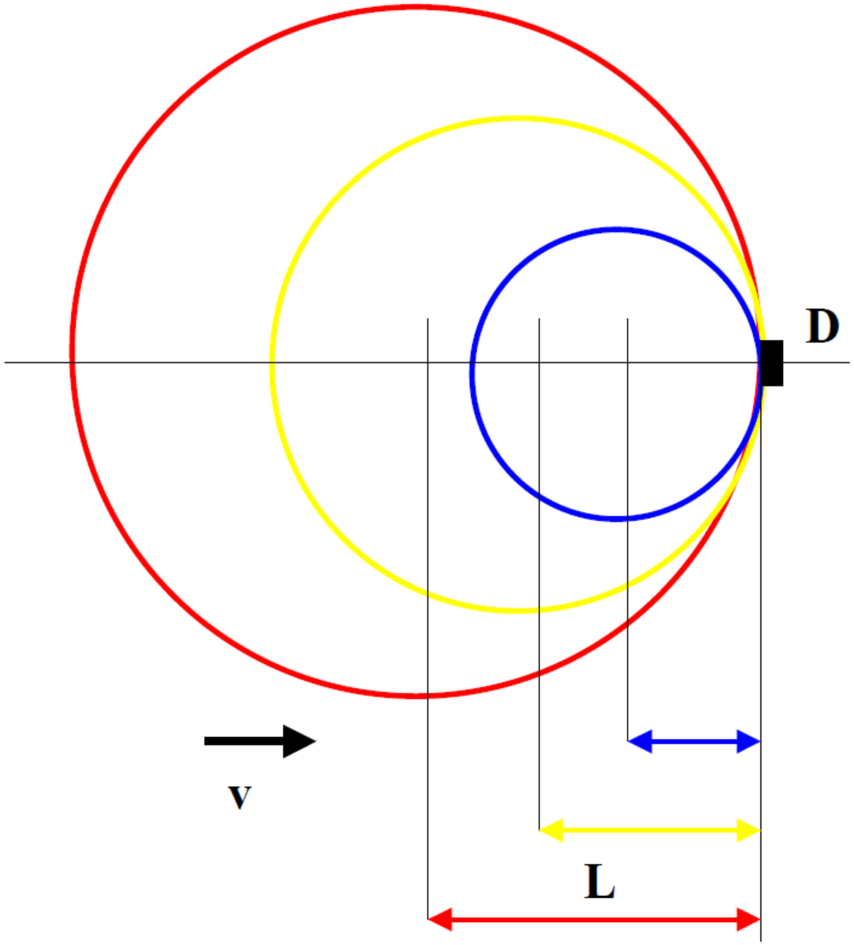
$$R = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad , \quad T = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

Akustická impedance

Jednotkou akustické impedance je rayleigh: 1 Rayl = 1 kg m^{-2} s^{-1} .Tabulka uvádí potřebné hodnoty pro některá prostředí.

prostředí	$10^3\rho$ [kg m^{-3}]	c [m s^{-1}]	Z [Rayl]
vzduch	0,0012	330	0,0004
voda	1	1430	1,43
měkká tkáň	1,1	1540	1,69
játra	1,05	1570	1,65
tuk	0,95	1450	1,38
kost	1,91	4080	7,8

Dopplerův jev I



Do detektoru přicházejí vlny v časech

$$t_1=\frac{L}{c}\ ,\ t_2=\frac{1}{f}+\frac{L-v\frac{1}{f}}{c}$$

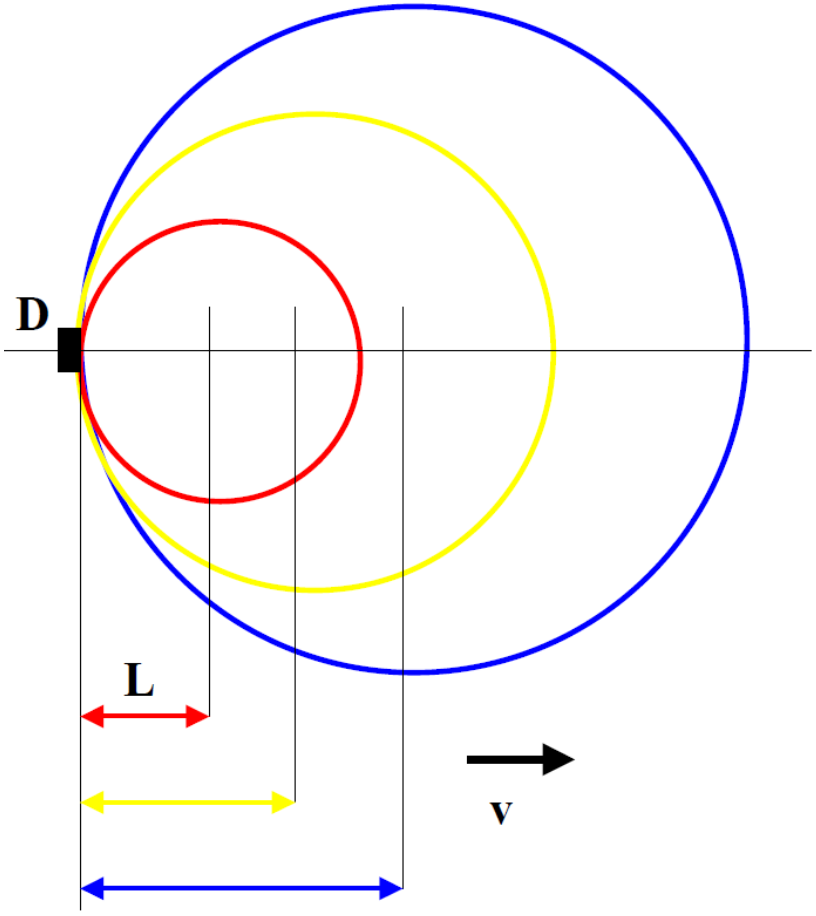
$$t_3=\frac{2}{f}+\frac{L-v\frac{2}{f}}{c}\ ,\ \ldots$$

Frekvence je tedy

$$\frac{1}{f'}=t_2-t_1=t_3-t_2=\ldots=\frac{1}{f}-\frac{v}{fc}$$

$$\boxed{f'=f\frac{c}{c-v}>f}$$

Dopplerův jev II



Do detektoru přicházejí vlny v časech

$$t_1=\frac{L}{c}\ ,\ t_2=\frac{1}{f}+\frac{L+v\frac{1}{f}}{c}$$

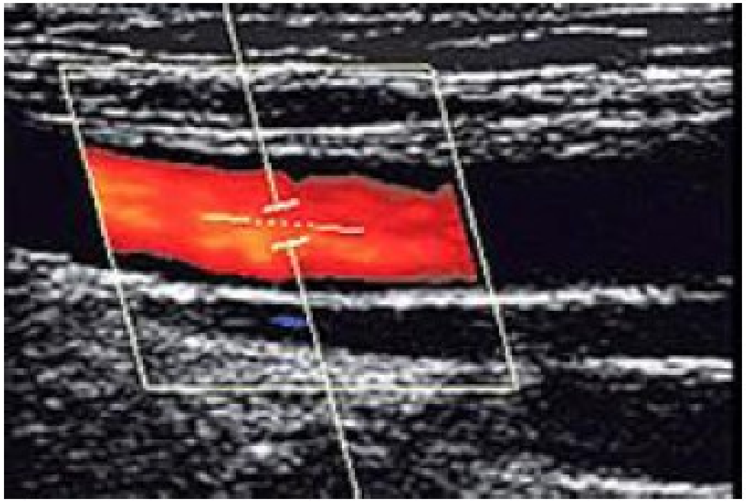
$$t_3=\frac{2}{f}+\frac{L+v\frac{2}{f}}{c}\ ,\ \ldots$$

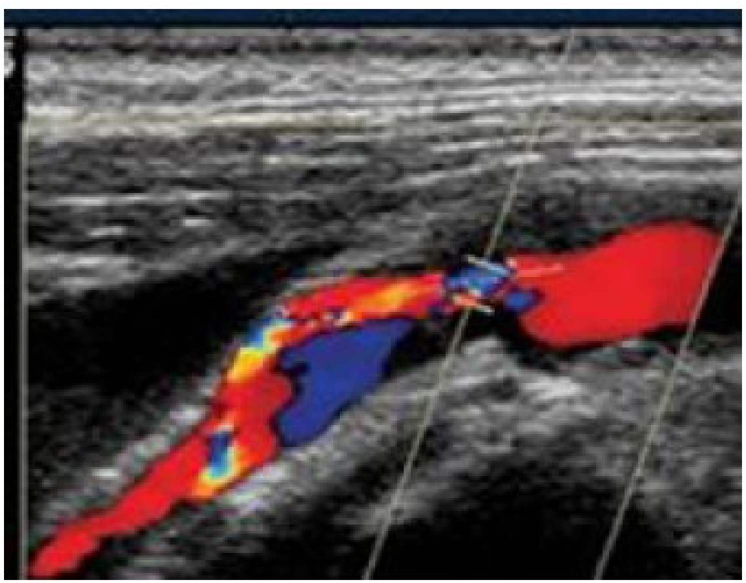
Frekvence je tedy

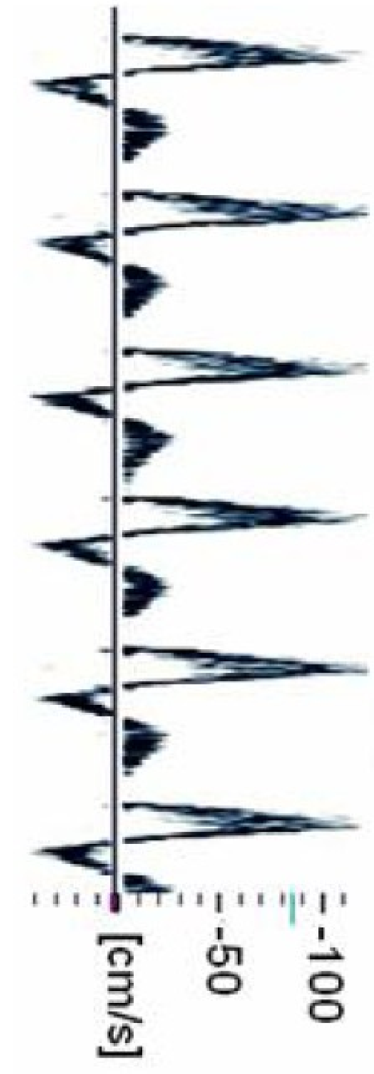
$$\frac{1}{f'}=t_2-t_1=t_3-t_2=\ldots=\frac{1}{f}+\frac{v}{fc}$$

$$\boxed{f'=f\frac{c}{c+v}<f}$$

Dopplerův jev III







Absorpce

Ultrazvukové vlnění je při šíření prostředím částečně absorbováno. Jako u jiných druhů vlnění, můžeme pro pokles intenzity psát exponenciální zákon – pokles intenzity je úměrný dráze, kterou paprsek vlnění prochází

$$dI(x) = -\mu\, dx \;\Rightarrow\; I(x) = I(0)\, e^{-\mu x}$$

U zvuku je obvyklé charakterizovat útlum nikoliv lineárním koeficientem útlumu s rozměrem [m^{-1}], ale koeficientem s rozměrem [dB.m^{-1}]. Logaritmováním zákona absorpce dostáváme

$$10 \cdot \log_{10} \frac{I(x)}{I(0)} = -10\mu x \log_{10} e = -\frac{10}{\ln 10} \mu x$$

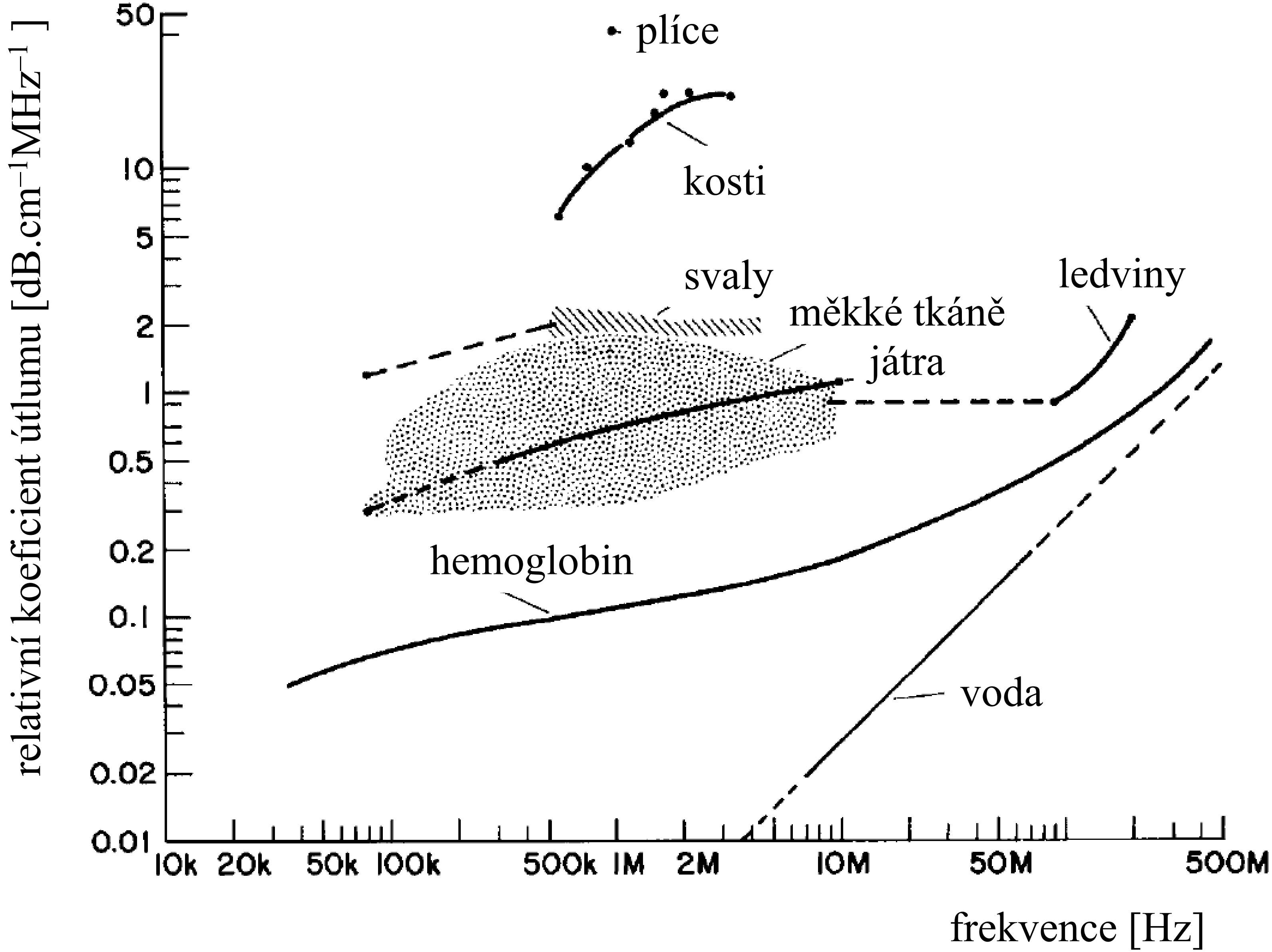
takže

$$\mu\left[\mathrm{dB\,m^{-1}}\right] = -\frac{10}{x[\mathrm{m}]} \cdot \log_{10} \frac{I(x)}{I(0)} = -\frac{10}{\ln 10} \mu\left[\mathrm{m^{-1}}\right]$$

Koeficient útlumu

prostředí	μ [dB cm^{-1}] pro f=1 Mhz
vzduch	1,61
voda	0,0025
měkká tkáň	0,5 – 1,0
játra	1,1
tuk	0,6
kost	10,0

Relativní koeficient útlumu



Zápis vln pomocí komplexních čísel

Tento zápis přináší velké zjednodušení, Platí totiž

$$\boxed{e^{ix}=\cos x+i\sin x\ ,\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x}$$

Můžeme si ověřit například triviální příklad

$$1=e^{0}=e^{ix}e^{-ix}=(\cos x+i\sin x)(\cos x-i\sin x)=(\cos x)^2+(\sin x)^2+i0=1$$

Pro zjednodušení zápisu vln je důležité, že nedochází při derivování (a integrování) k „přecházení“ od sinu ke kosinu

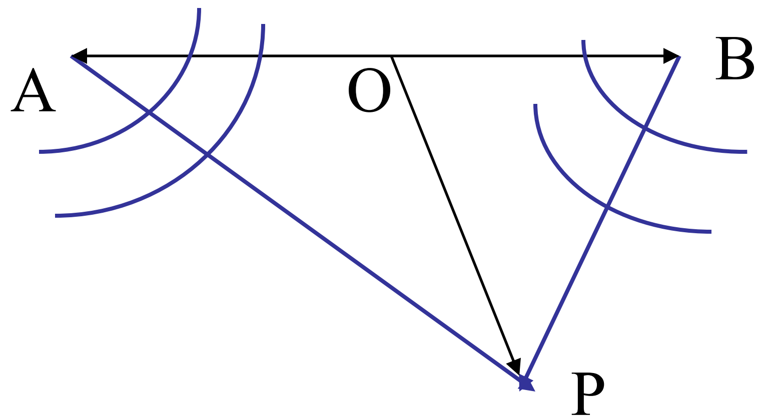
$$\boxed{\frac{d\sin x}{dx}=\cos x\ ,\quad \frac{d\cos x}{dx}=-\sin x\ ,\quad \frac{de^{ix}}{dx}=ie^{ix}}$$

Monochromatickou kulovou vlnu s frekvencí ω, která vychází z bodu $\rightarrow$ zapisujeme jako

$$\phi(\vec{\ }\ ,\ \ )$$

Skládání vln – geometrie

Dva zdroje v různých bodech kmitající ve fázi

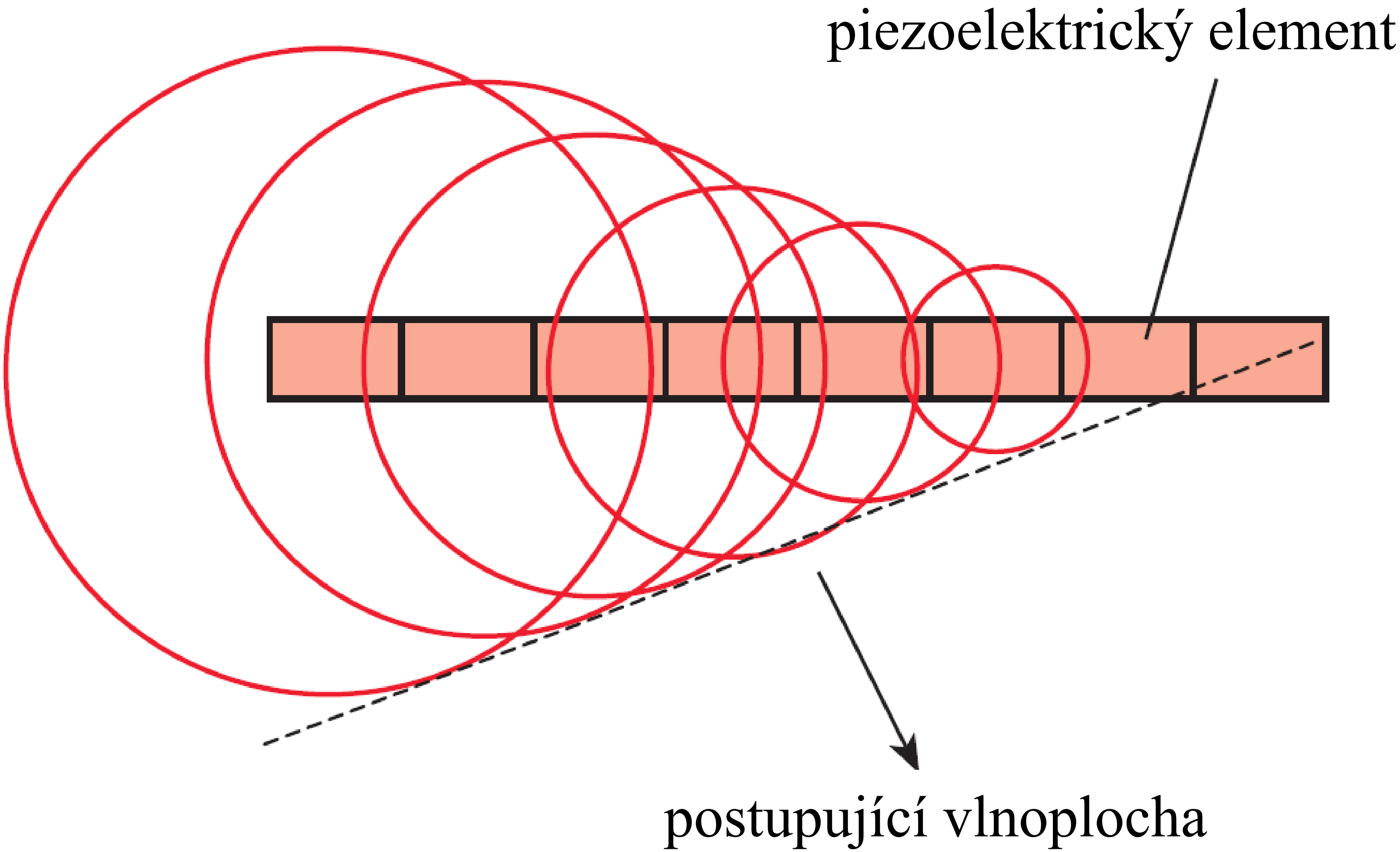


Vhodnou volbou souřadnicového systému (body A a B leží na ose x, počátek půlí jejich vzdálenost) můžeme psát

$$\left[\left(\quad \right)^2 \quad \right]^{1/2} \qquad \left[\left(\quad \right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}$$

Skládání vln

Řada zdrojů kmitajících ve fázi vytváří šířící se vlnu



Skládání vln – aproximace

Pole φ v bodě P je součtem polí φ_A a φ_B

$$\varphi(\vec{r}, \ldots \; \exp ik |\vec{r} - \vec{r}_A| \ldots \exp[-i\omega t]$$

Závislost na *d* v čitateli zanedbáme, jde o pomalou změnu amplitudy, takže

$$|\vec{r} - \vec{r}_A| \ldots$$

Totéž zanedbání nemůžeme ale provést v exponentu, protože

$$\psi_A = k[|\vec{r} - \vec{r}_A| \ldots]$$

jako součin velkého (k=2π/λ) a malého čísla nemusí být malé (ve srovnání s π, kdy při změně o tuto hodnotu se obrátí znaménko celého výrazu pro vlnu). Máme tedy

$$\varphi(\vec{r}, \ldots \exp ikr \ldots \{\exp[i\psi_A] + \exp[i\psi_B]\}\exp[-i\omega t]$$

Skládání vln – rovinný problém

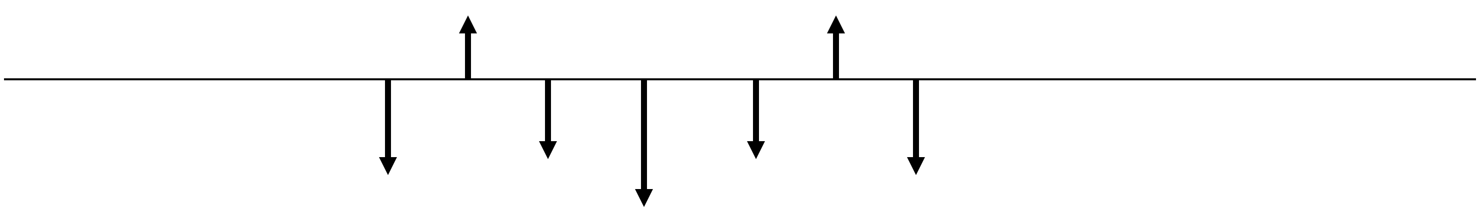
Pole φ je součtem polí od $2n+1$ zdrojů vzájemně fázově posunutých a v poloze ($x=nd$, $z=0$)

$$\varphi(x,z) = \sum_{k=-n}^{n} \exp i\left[\Phi_k(x,z)-\Phi_k(X,z)\right]$$

Fáze je

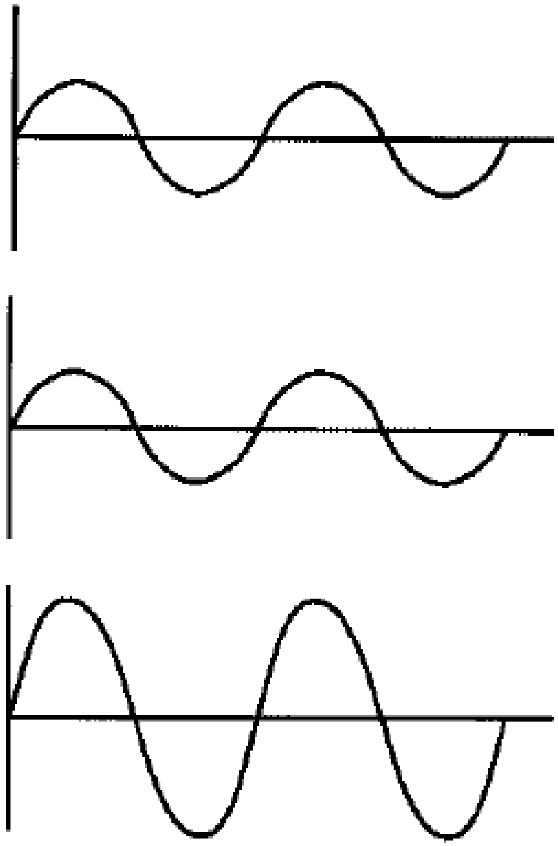
$$\Phi_k(x,z)=\frac{2\pi}{\lambda}\left[(x-kd)^2+z^2\right]^{1/2}$$

Pro $x=X$ dostáváme maximum součtu, takže volbou fázového posunutí jednotlivých zdrojů posouváme toto maximum.

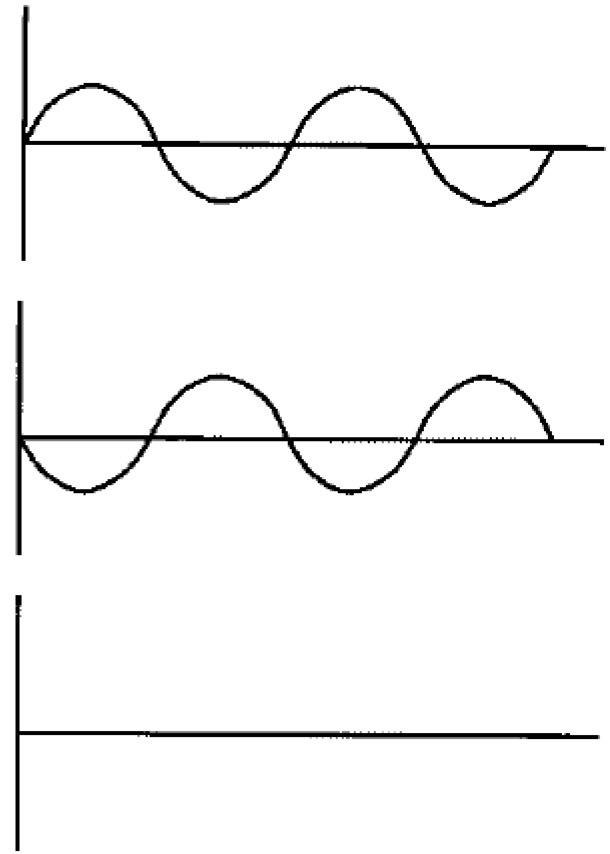


Skládání vln – rovinný problém

Dvě vlny se stejnou fází



Dvě vlny s opačnou fází



Skládání vln – rovinný problém

Celkem 21 zdrojů s d=2, λ=2 a L=100 pro X=0, 2 a 4 (všechno v mm).