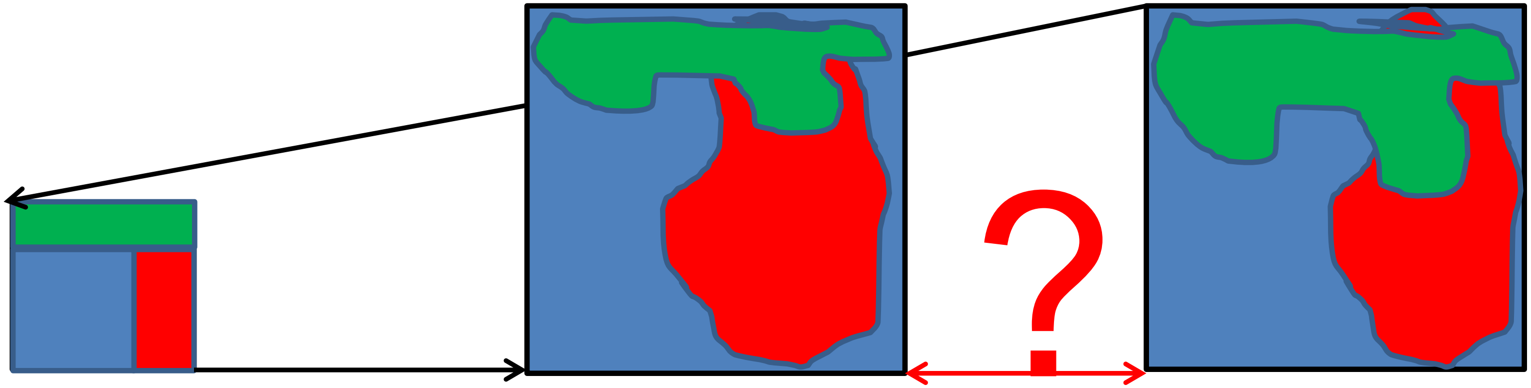
8. SEMINÁŘ

INDUKTIVNÍ STATISTIKA

1. ODHADY PARAMETRů

STATISTICKÁ INDUKCE



- Vlastnosti a složení výběrového souboru je přesně známé.
- Vlastnosti a složení základního souboru <u>odhadujeme s určitou mírou nejistoty.</u>
- Metody induktivní statistiky nejistotu neodstraňují, ale dokáží určit <u>míru této nejistoty</u>.

Pravděpodobnost náhodného jevu

- Pravděpodobnost je mírou „častosti“ výskytu tohoto jevu
- Pravděpodobnost je vlastnost náhodného jevu
- Pravděpodobnost NJ zjistíme opakováním pokusů, jejichž výsledkem může být daný jev a „měříme“ ji **relativní četností (p)** tohoto jevu v řadě opakovaných pokusů (p = k/n).

Pravděpodobnost náhodného jevu

- **Klasická definice** pravděpodobnosti – pst NJ je dána podílem příznivých a všech možných výsledků (v experimentu, jehož možné výsledky jsou stejně pravděpodobné).
- Pravděpodobnost jevů spojených s karetními hrami, (hod kostkou, mincí ..) – dle definice
- **Nelze** dle def. vypočítat pravděpodobnost jevů v medicíně, můžeme pst jen **odhadovat pomocí relativních četností**

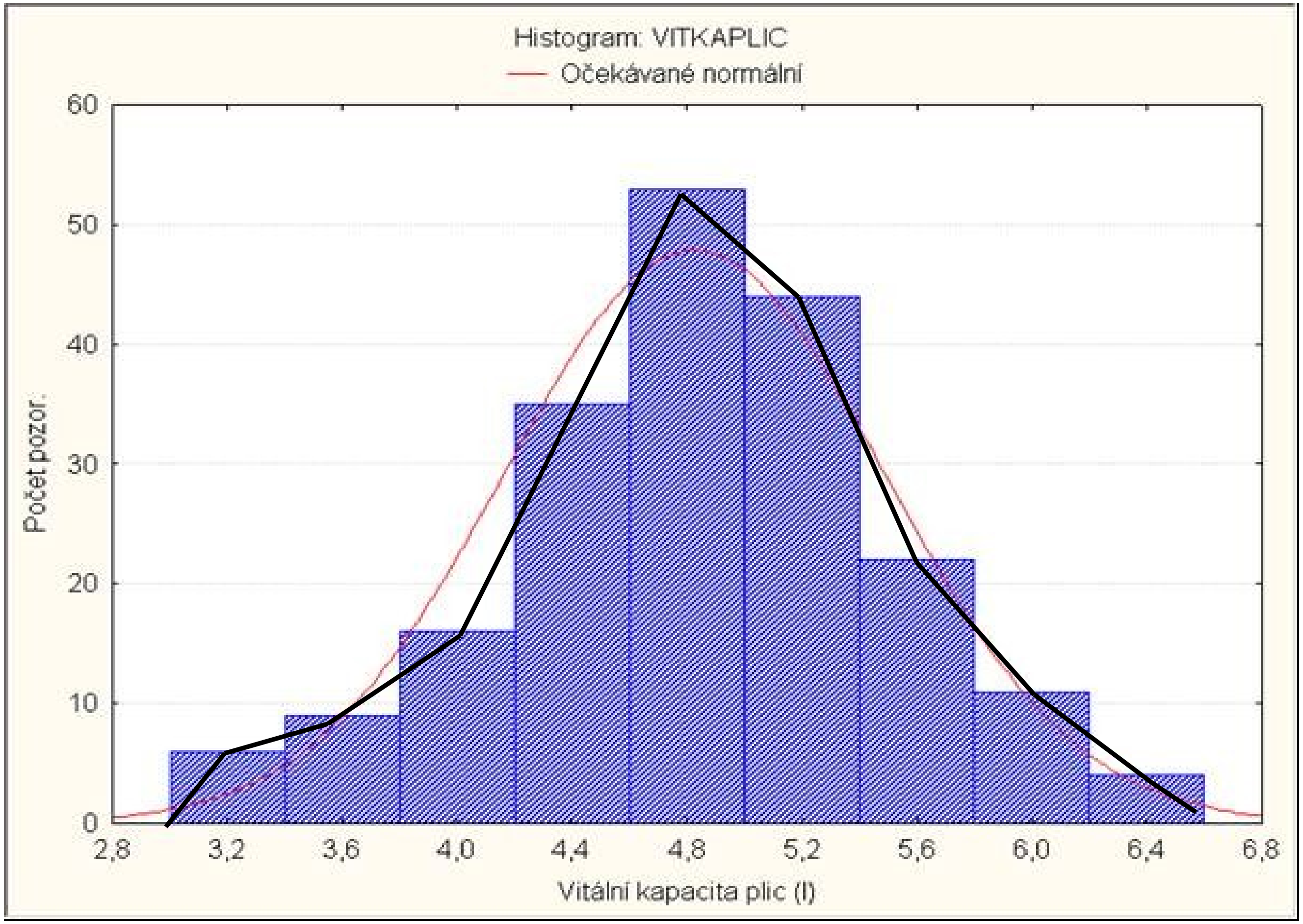
NÁHODNÁ VELIČINA (NV)

- **Spojitá NV** – její rozdělení je dáno hustotou pravděpodobností – **frekvenční křivka (funkce).**

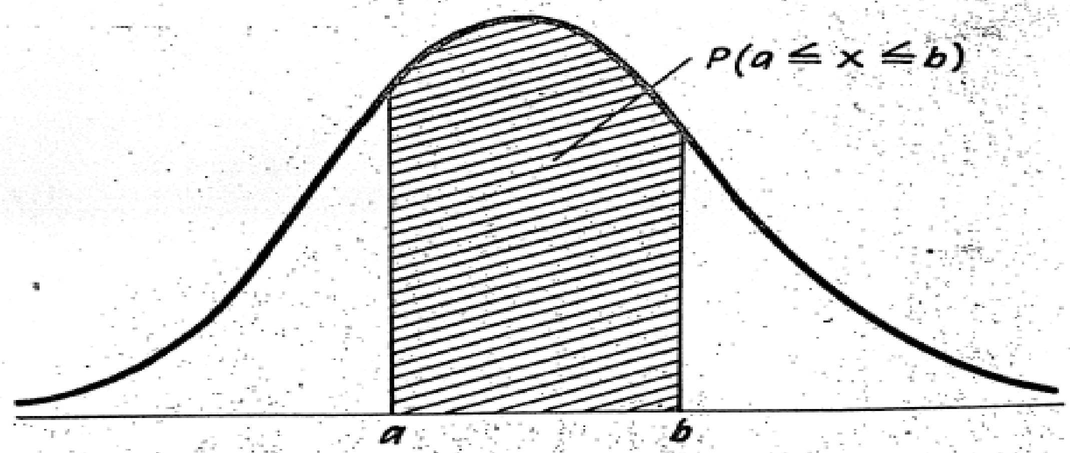
- Matematicky – rovnice frekvenční funkce

- Graficky - hladká, plynulá čára

Prezentace kvantitativních dat



Příklad frekvenční fce spojité NV



$P(a \leq x \leq b)$ - pravděpodobnost, že NV X nabývá hodnot z intervalu a,b

- Celá plocha pod frekvenční křivkou = 1 (100%)
- $P = 0 \Leftrightarrow a = b$ / pravděpodobnost znázorněna úsečkou – obsah plochy = 0/
- Pst malá – pokud $\langle a,b \rangle$ krátký

Základní a výběrový soubor

VÝBĚROVÝ SOUBOR

- reprezentativní náhodný výběr
- výběrové (empirické) rozdělení četností
- popis rozdělení:

  tabulka, graf
- stat. ukazatele = **výběrové charakteristiky**: **m, s, p** (ozn. latinkou)
- jsou to charakteristiky náhodných veličin a také se jako náhodné veličiny chovají, tzn. mění se výběr od výběru (nutno počítat s chybami)

ZÁKLADNÍ SOUBOR

- soubor, který nás zajímá
- teoretické rozdělení četností (matematický model)
- popis rozdělení: pravděpodobnostní rozdělení
- stat. ukazatele **= parametry**: **μ, σ, π** (ozn. řeckou abecedou)
- jsou to neměnné konstanty, zpravidla neznámé, pro $n \rightarrow \infty$ platí, že $m \rightarrow \mu$, $s \rightarrow \sigma$, $p \rightarrow \pi$.

Empirické a pravděpodobnostní rozdělení

- Každá veličina je ovlivňována řadou nepatrných vlivů, což způsobuje její **variabilitu** – tzn. veličina nabývá u různých subjektů různých hodnot – **náhodná veličina** (proměnná).

- Měříme-li veličinu ve výběrovém souboru, pak rozložení hodnot této veličiny znázorňujeme na základě **empiricky** zjištěných četností (histogram) = **výběrové rozdělení**.

- Každá veličina má své **pravděpodobnostní (teoretické) rozdělení**.
    - V takovém rozložení jsou **na ose x** všechny **hodnoty**, kterých může veličina potenciálně nabývat, a **na ose y** jsou **pravděpodobnosti**, se kterými se dané hodnoty vyskytují.

Empirické a pravděpodobnostní rozdělení

- **V empirickém rozdělení** (histogram,polygon četností) jsou popsány četnosti, se kterými se naměřené hodnoty vyskytovaly ve výběrovém souboru

X

- **Pravděpodobnostní rozdělení** (pravděpodobnostní křivka) vyjadřuje **očekávání**, jak často se budou jednotlivé hodnoty vyskytovat v nekonečně velkém souboru

-

- **Pravděpodobnostní rozdělení** náhodných veličin jsou teoretické (matematické) modely, jejichž pomocí popisujeme nejrůznější reálné situace. Navzdory různorodosti a mnohotvárnosti přírodních a společenských jevů vystačíme v praxi s malým počtem modelů(tj. typů rozdělení).

Typy pravděpodobnostních rozdělení

Diskrétní veličiny

- binomické rozdělení (jev – nejev)
- rovnoměrné rozdělení
- Poissonovo rozdělení (vzácné jevy)

Spojité veličiny

- **normální (Gaussovo)** rozdělení
- Studentovo t-rozdělení
- Snedecorovo F-rozdělení
- Chí-kvadrát rozdělení

Pozn.:

- S veličinou zacházíme jako s normálně rozdělenou, pokud nemáme dostatečné důvody pro vyvrácení této domněnky.
- Rozložení většiny veličin lze převést na normální rozdělení.

NORMÁLNÍ (GAUSSOVO) ROZDĚLENÍ

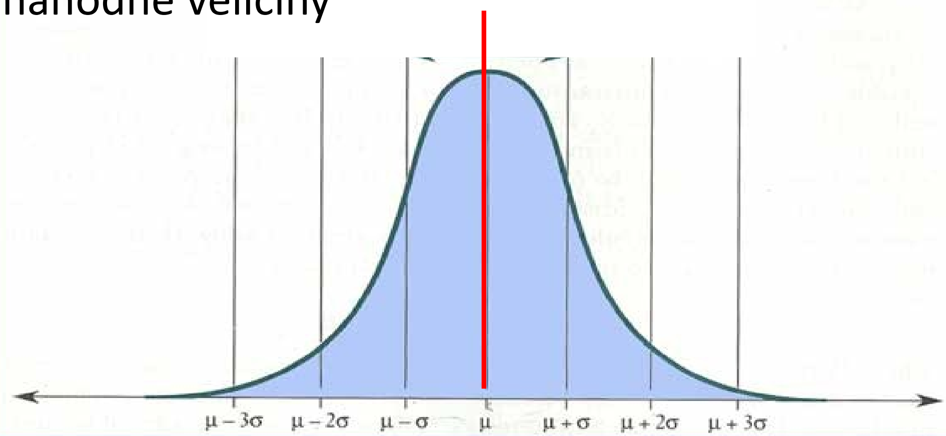
- **nejdůležitější** spojité rozdělení

- NV má normální rozdělení tehdy, je - li tvořena nahromaděním velkého počtu nepatrných nezávislých příčin nahodilé povahy.

- př.- tělesná výška

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ (GAUSSOVA KŘIVKA)

Matematický model rozdělení četností spojité náhodné veličiny

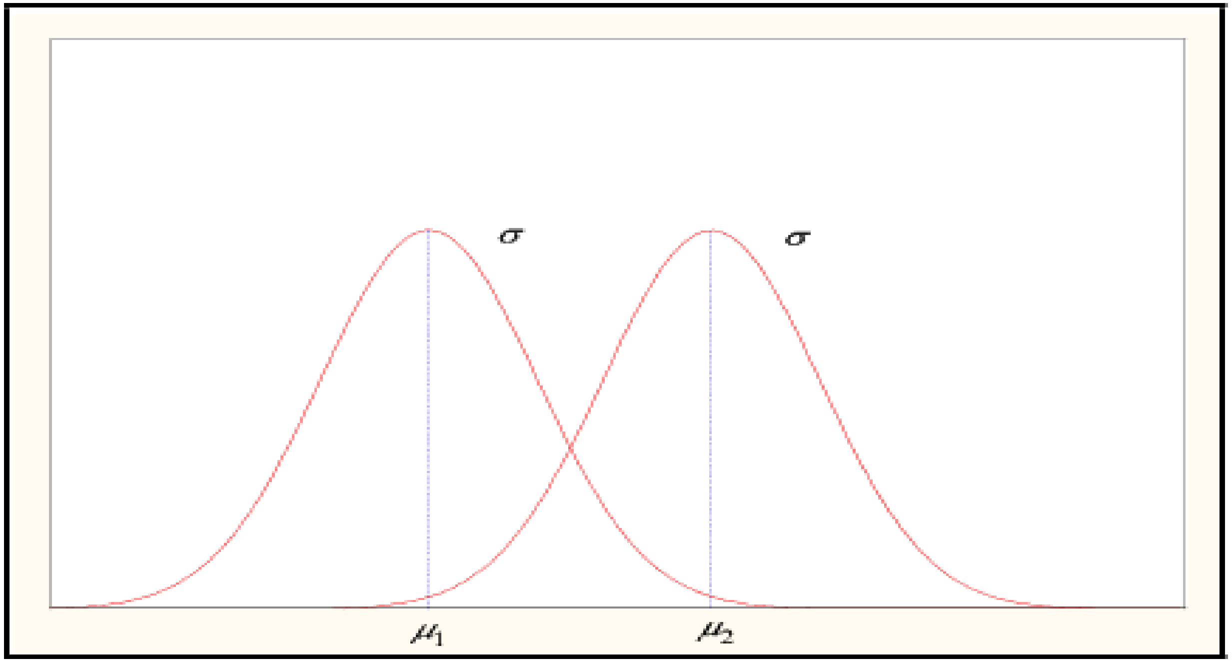


$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Frekvenční křivka NR je jednoznačně určena dvěma parametry: **μ** a **σ**.
  - μ - určuje polohu křivky na ose x (analogie m)
  - σ - určuje tvar křivky (analogie s)
- Symetrické rozdělení četností, parametr μ = průměr a zároveň nejčetnější hodnota, která půlí plochu pod křivkou na dvě stejně velké části

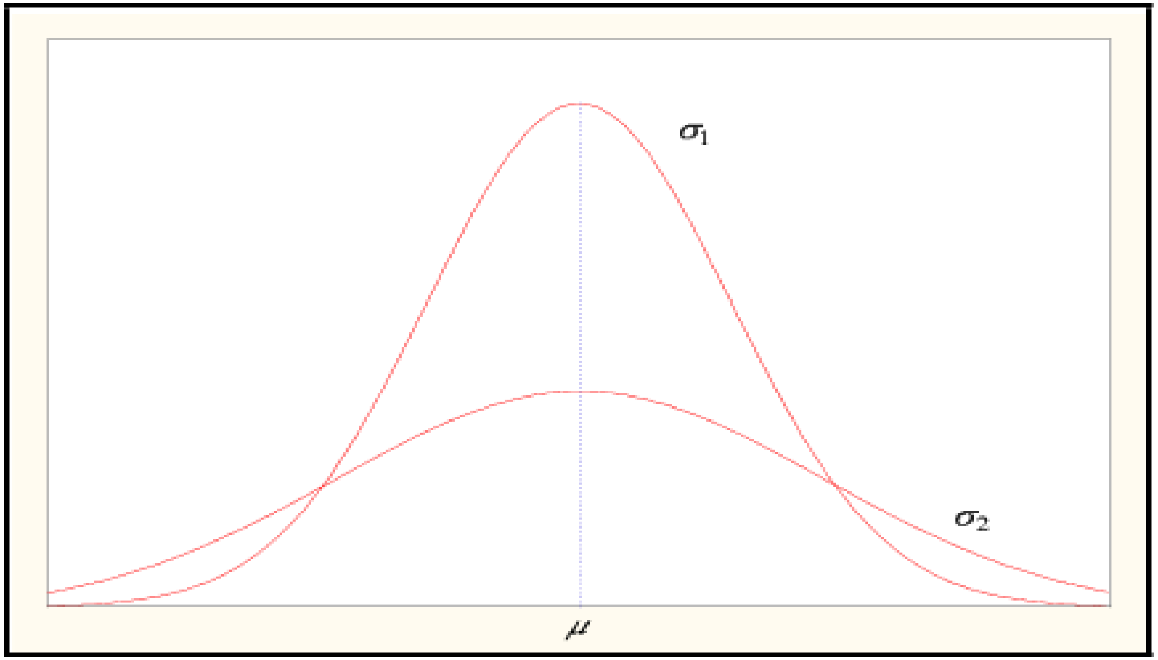
NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

- Frekvenční křivky normálního rozdělení se stejnými směrodatnými odchylkami a odlišnými průměry (μ1 ≠ μ2; σ1 = σ2)

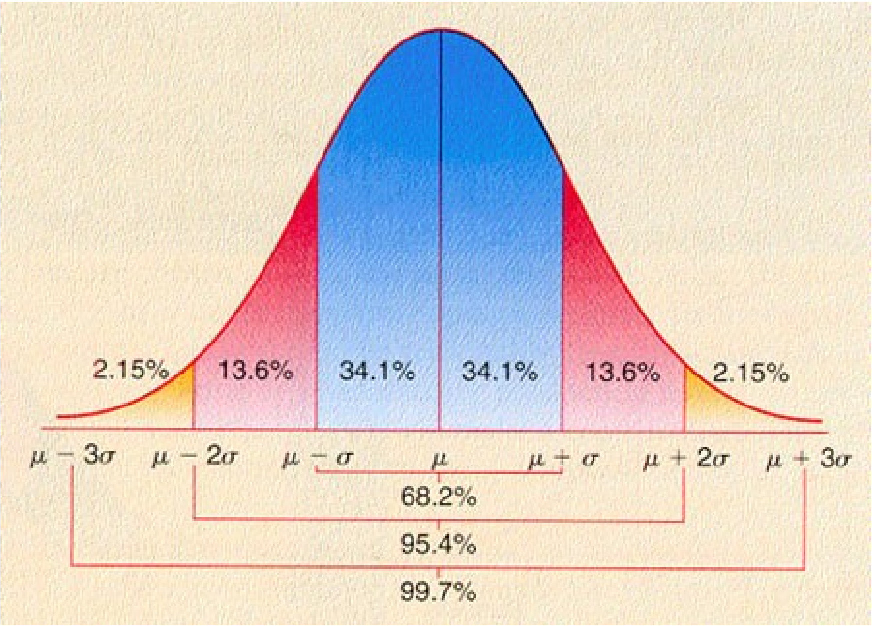


NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

- Frekvenční křivky normálního rozdělení se stejnými průměry a odlišnými směrodatnými odchylkami (μ1 = μ2; σ1≠ σ2)

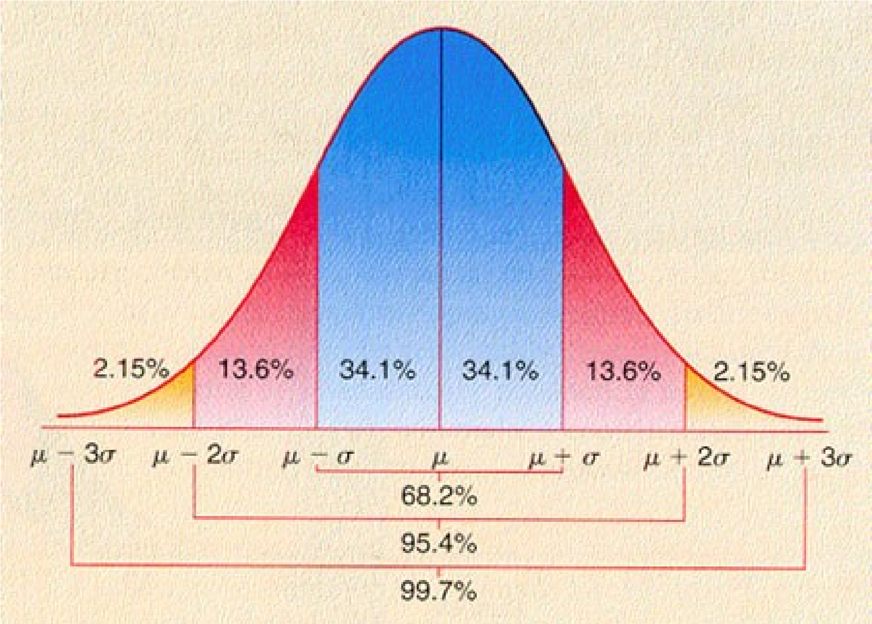


VLASTNOSTI NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ



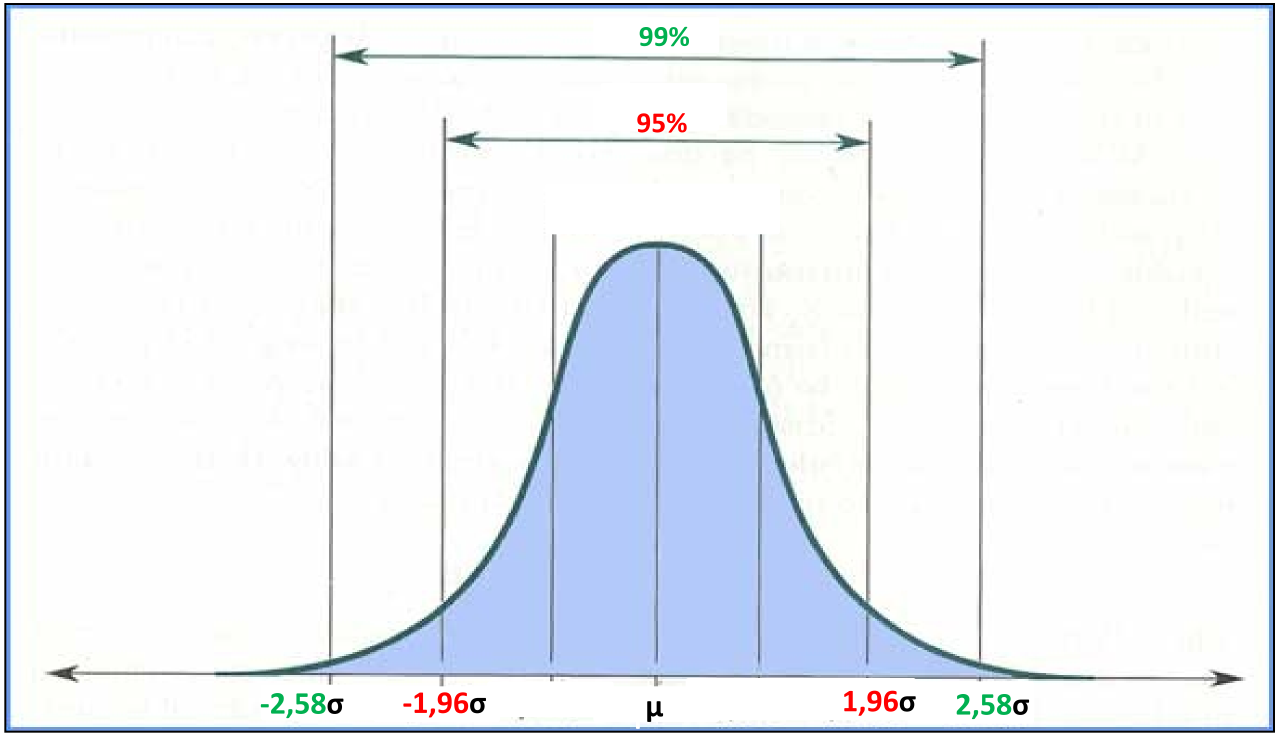
- Frekvenční křivky normálního rozdělení mají různý tvar a polohu pro různé veličiny. Pro všechny však platí, že v intervalu:
  - $\mu \pm 1\ \sigma$ leží 68,2% hodnot, kterých může daná veličina nabývat
  - $\mu \pm 2\ \sigma$ leží 95,4% hodnot, kterých může daná veličina nabývat
  - $\mu \pm 3\ \sigma$ leží 99,7% hodnot, kterých může daná veličina nabývat

VLASTNOSTI NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ



- Častěji nás ale zajímá, v <u>jakém intervalu leží 95% (99%) hodnot sledované veličiny</u>
  - pak lze tvrdit, že s pravděpodobností 95% (99%) se hodnoty sledované veličiny nacházejí právě v tomto intervalu resp., že 95% hodnot, kterých sledovaná veličina nabývá, leží v tomto intervalu
  - tento interval je vymezen tzv. **kritickými hodnotami normálního rozdělení**
- $P(\mu - 1{,}96\sigma \leq x \leq \mu + 1{,}96\sigma) = 0{,}95$
- $P(\mu - 2{,}58\sigma \leq x \leq \mu + 2{,}58\sigma) = 0{,}99$

KRITICKÉ HODNOTY NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ



- **Kritické hodnoty** normálního rozložení: **1,96**σ a **2,58**σ
- V intervalu **(μ - 1,96σ; μ + 1,96σ)** se nachází **95 %** všech možných hodnot sledované veličiny
- V intervalu **(μ – 2,58σ; μ + 2,58σ)** se nachází **99%** všech možných hodnot sledované veličiny

Tabulky normálního rozdělení

- Pro nematematiky
- Pro zvolené hranice intervalu a,b lze najít odpovídající pravděpodobnost a obráceně
- Tabelace je možná proto, že

1/ normální rozdělení je symetrické

2/ hranice a, b lze vyjádřit jako **odchylky od μ v násobcích směrodatné odchylky σ**

(zásada: plocha = pravděpodobnost!)

pravděpodobnost	násobky směrodatné odchylky
0,99	2,58
0,95	1,96
0,90	1,64
0,80	1,28
0,75	1,15
0,50	0,65

násobky směrodatné odchylky	pravděpodobnost
0,50	0,3828
1,00	0,6827
1,50	0,8664
2,00	0,9545
2,50	0,9876
3,00	0,9973

ODHADY PARAMETRŮ

- **Bodové odhady**

- **Intervalové odhady**

BODOVÉ ODHADY

- Neznámý parametr odhadujeme jedním číslem tj. **bodem.**
- Např. výběrový aritmetický průměr m je bodovým odhadem parametru μ

  ($\mu \approx m$, $\sigma \approx s$, $\pi \approx p$)
- Bodové odhady se „nestrefí" přesně do odhadovaného parametru

INTERVALOVÉ ODHADY

- Neznámý parametr odhadujeme **intervalem** vytvořeným **kolem** tzv. nejlepšího nestranného **bodového odhadu.**

- **Interval spolehlivosti** (konfidenční interval)

- **Spolehlivost** určujeme sami, obvykle 95% nebo 99%
  - jde o **pravděpodobnost**, že odhadovaný parametr se nachází v daném intervalu.

- **Hraniční hodnoty:**

  Platí (dolní hranice < **odhadovaný parametr** < horní hranice)

- zápis: **95% CI (dolní hranice ; horní hranice)**
  99% CI (dolní hranice ; horní hranice)

INTERVALOVÉ ODHADY

Doplněk spolehlivosti do jedné (do 100%) vyjadřuje **riziko odhadu** **(riziko induktivního úsudku)** – tj. pravděpodobnost, že odhadovaný parametr leží mimo interval:

- při spolehlivosti 95% je riziko odhadu 5%,
- při spolehlivosti 99% je riziko odhadu 1%.

INTERVALOVÉ ODHADY

a) **Dvoustranné** – **určujeme** horní i dolní mez intervalu (např. u cholesterolu)

$$P\,(4{,}37 < \mu < 4{,}77) = 0{,}95$$

b) **Jednostranné**

– levostranné: pouze dolní hranice intervalu

$$P\,(\mu > 4{,}37) = 0{,}975$$

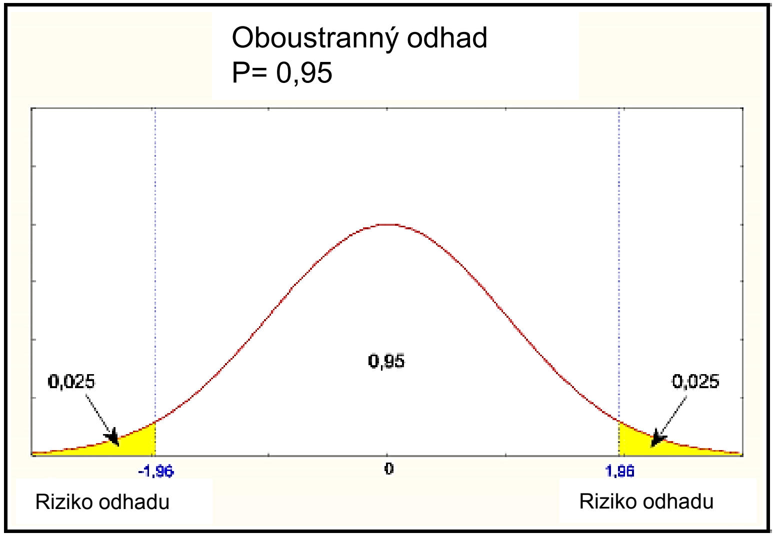
– pravostranné: pouze horní hranice intervalu

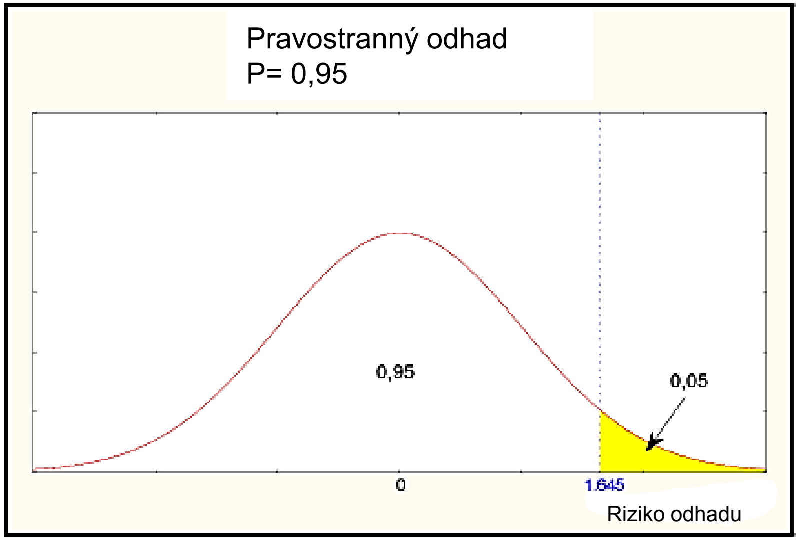
$$P\,(\mu < 4{,}77) = 0{,}975$$

U jednostranných odhadů jsou **odpovídající kritické hodnoty** pro spolehlivost:

a) 95%	**$\pm$1,645**
b) 99%	**$\pm$2,326**

Změna kritických hodnot u jednostranného odhadu pro spolehlivost 0,95





ODHAD PRŮMĚRU ZÁKLADNÍHO SOUBORU (PARAMETRU μ)

1. Nejlepší bodový odhad parametru **μ** je výběrový průměr **m.**
2. V souborech, kde **n ≥ 30**, se výběrový průměr chová jako náhodná veličina, která má **normální rozdělení,** a to i v případě, že veličina, ze které je průměr vypočítán, normální rozdělení nemá.
3. Výběrový průměr se jako náhodná veličina vyznačuje variabilitou. Variabilita výběrových průměrů je menší než variabilita veličiny, z níž jsou průměry počítány. Díky variabilitě je každý výběrový průměr zatížen chybou – jde o tzv. **standardní chybu** průměru **SE_m**, kterou odhadujeme ze vztahu:
   $$SE_m = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

Závěr: 95% CI $\quad m \pm 1,96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}$

99% CI $\quad m \pm 2,58 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}$

- V souborech, kde **n < 30**, používáme model **Studentova rozdělení** (konstanty 1,96, příp. 2,58 se nahrazují jinými – viz. skripta, str. 25).

ODHAD PRŮMĚRU ZÁKLADNÍHO SOUBORU (PARAMETRU μ)

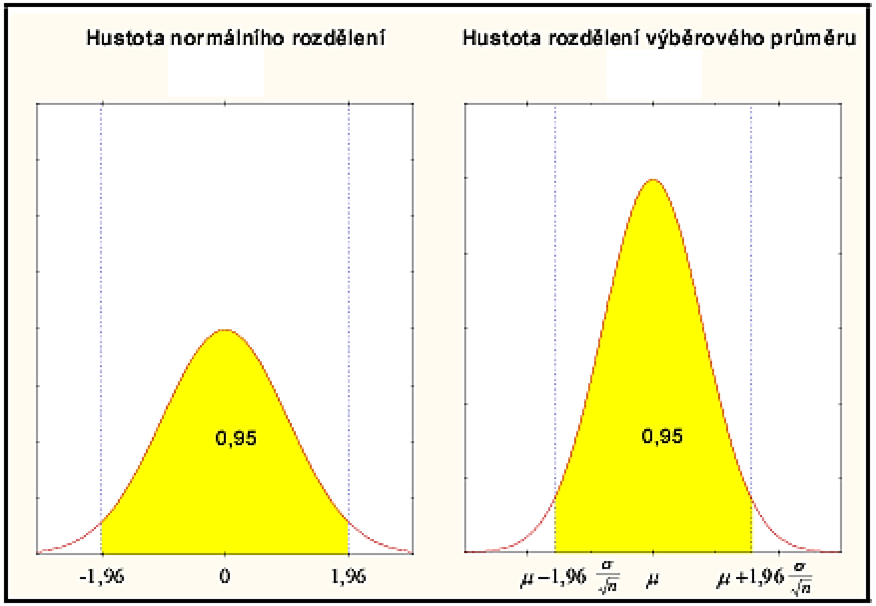
Z vlastností normálního rozdělení vyplývá:

- $P(\mu - 1{,}96\ \sigma_m \leq m \leq \mu + 1{,}96\ \sigma_m) = 0{,}95$
- $P(\mu - 2{,}58\ \sigma_m \leq m \leq \mu + 2{,}58\ \sigma_m) = 0{,}99$

úprava nerovnosti uvnitř závorky ⟶

hranice pro 95 % CI a 99% CI pro μ

	95 % CI	99% CI
dolní hranice:	$\mathbf{m - 1{,}96\ \sigma_m}$	$\mathbf{m - 2{,}58\ \sigma_m}$
horní hranice:	$\mathbf{m + 1{,}96\ \sigma_m}$	$\mathbf{m + 2{,}58\ \sigma_m}$



Když má náhodná veličina (např. VKP) normální rozložení s průměrem μ a odchylkou σ (tj. s rozptylem σ^2), pak má výběrový průměr m normální rozložení s průměrem μ a odchylkou $\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}$ (tj. s rozptylem $\frac{\sigma^2}{n-1}$).

Protože hodnotu σ neznáme, dosazujeme za ni nejlepší bodový odhad, tj. s.

- Když provedeme náhodný výběr o rozsahu **n > 30** a vypočítáme výběrový průměr **m**, pak jeho hodnota padne **s pravděpodobností 0,95** do vzdálenosti menší než $1{,}96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}$ od parametru **μ**.

JINAK ŘEČENO:

- Provedeme-li výběr o rozsahu **n > 30** a vypočítáme **m**, pak parametr μ s pravděpodobností 0,95 leží ve vzdálenosti menší než $1{,}96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}$ od **m**.

TO ZNAMENÁ, ŽE:

- Interval s krajními body $m \pm 1{,}96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}$ pokrývá hodnotu parametru μ s pravděpodobností 0,95. Tento interval se nazývá **Interval spolehlivosti** pro průměr.

Odhad průměru ZS (μ) - příklad

- Odhadněte průměrnou vitální kapacitu plic mužů ve věku 40-50 let na podkladě výběrového šetření 200 mužů s výsledky:

$m = 4{,}83$ $\quad$ $s = 0{,}66$ $\quad$ $n = 200$

Řešení

$$m \pm \boxed{1{,}96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

SE = 0,66 /√200-1 = 0,66/ 14,107= <u>0,04678</u>

<u> Pro spolehlivost 0,95</u>

a = m - 1,96 .SE   a = 4,83 – (1,96 . 0,04678)= **4,74**

b = m + 1,96.SE   b = 4,83 + (1,96 . 0,04678)= **4,92**

Přesnost = 1,96.SE = 1,96.0,04678 **= 0,09**

3 formy zápisu: 1/ μ = 4,83 ± 0,09

2/ P (4,74 ≤ μ ≤ 4,92) = 0,95

3/ 95% CI (4,74 ; 4,92)

Interpretace

- Průměrná vitální kapacita plic v ZS mužů věkové kategorie 40 - 50 let se pohybuje s pravděpodobností 0,95 v rozmezí 4,83 ± 0,09,

  tj. od 4,74 do 4,92 litrů.

Proveďte odhad se spolehlivostí 0,99.

VLASTNOSTI INTERVALOVÉHO ODHADU

1) SPOLEHLIVOST

- volí se předem, jde o stanovení pravděpodobnosti, obvykle 0,95 nebo 0,99

2) PŘESNOST

- je dána délkou intervalu
- čím kratší je interval, tím je vyšší přesnost odhadu

$$m \pm \underbrace{1,96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}}_{\text{přesnost}}$$

- **OBĚ VLASTNOSTI SPOLU SOUVISEJÍ**
- **PŘESNOST ODHADU LZE OVLIVNIT:**

  a) snížením či zvýšením **P** (spolehlivosti)

  b) snížením či zvýšením **n** (velikost souboru)

  c) snížením či zvýšením **s** (homogenita souboru)

Vlastnosti odhadu

- 95%CI (4,74 ; 4,92)   přesnost ± 0,09
- 99%CI (4,71; 4,95)   přesnost ± 0,12
- Porovnejme spolehlivost, délku a přesnost intervalů

Příklad: Kolik musíme / nejméně / vyšetřit osob, abychom odhadli průměrnou vitální kapacitu plic s přesností na ± 0,1 litru při 99% spolehlivosti ?

Řešení: <u>přesnost (0,1)</u> = <u>2,58 . SE_m</u> =

$$= 2{,}58 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} = 2{,}58 \cdot \frac{0{,}66}{\sqrt{n-1}}$$

$$n - 1 = 2{,}58^2 \cdot \frac{0{,}66^2}{0{,}1^2} = 289{,}9$$

<u>**n = 291**</u>

Interpretace: Musíme vyšetřit nejméně 291 osob, abychom odhadli průměrnou vitální plic s přesností ± 0,1 při 99% spolehlivosti.

ODHAD NEZNÁMÉ PRAVDĚPODOBNOSTI NÁHODNÉHO JEVU (PARAMETRU π)

1. Nejlepší bodový odhad pravděpodobnosti je relativní četnost

$$p = \frac{k}{n} \rightarrow \pi$$

   n = počet pozorování

   k = počet pozorování, u nichž nastal sledovaný jev

2. Pro pravděpodobnosti sice platí binomické rozdělení, ale pokud platí $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$, můžeme vycházet z normálního rozdělení.

3. Standardní chybu SE odhadujeme ze vztahu:

$$SE = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \text{nebo} \quad SE = \sqrt{\frac{p(100-p)}{n}} \text{ v } \%$$

Závěr: 95% CI $p \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

99% CI $p \pm 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Příklad:

Odhadněte pravděpodobnost výskytu zrakové vady u studentů LF na základě výběrového šetření u 200 studentů.

$n = 200 \quad k = 80 \qquad p = 0{,}40\ (40\%)$

- **Než začnete počítat hranice konfidenčního intervalu pomocí kritických hodnot normálního rozložení, nezapomeňte ověřit splnění podmínky, tj. platnost nerovnosti $n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$.**

1, Platnost podmínky

$n \cdot p \cdot (1-p) > 9$

$200 \cdot 0{,}4 \cdot (1-0{,}4) > 9$

$200 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 > 9$

$$\underline{\underline{48 > 9}}$$

2, $SE = \sqrt{\dfrac{0{,}4 \cdot (1-0{,}4)}{200}} = 0{,}03464 \doteq 0{,}035$

$0{,}035 \times 1{,}96 = 0{,}0686 \doteq 0{,}069$

CI 95% $(0{,}33 ; 0{,}47)$

$p = 0{,}4 \pm 0{,}069$

s 95% pravděpodobností bude zrak. vadou trpět (33-47%)

Příklad:

Ve výběru 100 šestiměsíčních zdravých dětí náhodně vybraných z brněnské populace byl sledován hemoglobin v g%.

n = 100 m = 13,10 s = 1,9

1. Určete interval, ve kterém se pohybuje hemoglobin u 95% vyšetřených dětí.
2. Odhadněte průměrné množství hemoglobinu v základním souboru se spolehlivostí 0,95. Jaká je přesnost tohoto odhadu?
3. U kolika dětí musíme provést šetření, aby přesnost odhadu průměru byla při spolehlivosti 0,95 nejméně $\pm$ 0,2.

Řešení:

1. Určete interval, ve kterém se pohybuje hemoglobin u 95% vyšetřených dětí.

$m \pm 2s$ $\quad$ 9,3 – 16,9 $\quad$ $13{,}10 \pm 2 \cdot 1{,}9 \;\dots\; 13{,}10 \pm 3{,}8$

2. Odhadněte průměrné množství hemoglobinu v základním souboru se spolehlivostí 0,95. Jaká je přesnost tohoto odhadu?

$m \pm 1{,}96SE \qquad SE = \frac{1{,}9}{\sqrt{99}} = 0{,}19 \qquad$ 95% CI (12,73; 13,47)

PŘESNOST $= \pm 1{,}96\, SE_m = \pm 1{,}96 \cdot 0{,}19 = \pm 0{,}37$

3. U kolika dětí musíme provést šetření, aby přesnost odhadu průměru byla při spolehlivosti 0,95 nejméně $\pm$ 0,2.

$$1{,}96SE = 0{,}2$$

$$1{,}96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} = 0{,}2$$

$$1{,}96 \cdot \frac{1{,}90}{\sqrt{n-1}} = 0{,}2$$

$$n-1 = 1{,}96^2 \cdot \frac{1{,}9^2 \cdot 1}{0{,}2^2}$$

$$n-1 = 346{,}7$$

$$n \doteq 346{,}7 + 1$$

$$n \doteq 348 \quad (\text{cca } 350)$$

ODHADY PARAMETRŮ - SHRNUTÍ

- **Parametry** jsou charakteristiky základního souboru, odhadují se z výběrových charakteristik.
- **Výběrové charakteristiky** se chovají jako **náhodné veličiny,** výběr od výběru se liší.
- Pomocí výpočtu standardní chyby (SE) výběrové charakteristiky **určujeme interval,** ve kterém se hodnota odhadovaného parametru bude s určitou pravděpodobností pohybovat

μ: 95% CI (m – 1,96SE ; m + 1,96SE)

99% CI (m – 2,58SE ; m + 2,58SE)

$$SE_m = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

- **1,96 a 2,58 jsou konstanty normálního rozložení** a vymezují plochu pod frekvenční křivkou, která představuje 95%, resp. 99% pravděpodobnost, že odhadovaný parametr bude spadat do výše uvedených intervalů

π: 95% CI (p – 1,96SE ; p + 1,96SE)

99% CI (p – 2,58SE ; p + 2,58SE)

$$SE = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Děkuji za pozornost