Taylorův polynom

Lenka Přibylová

28. července 2006

Obsah

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

$f(x) = \quad e^{-x+3} \qquad f(3) = 1$

Vypočteme funkční hodnotu funkce $f(x)$ v bodě x_0:

$$f(3) = e^{-3+3} = e^0 = 1.$$

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

$$f(x) = e^{-x+3} \qquad f(3) = 1$$
$$f'(x) = e^{-x+3} \cdot (-1) \qquad f'(3) = -1$$

Spočítáme první derivaci. Funkční hodnota se liší pouze znaménkem.

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x+3} & f(3) &= 1 \\
f'(x) &= e^{-x+3} \cdot (-1) & f'(3) &= -1 \\
f''(x) &= -e^{-x+3} \cdot (-1) & f''(3) &= 1
\end{aligned}
$$

Spočítáme druhou derivaci. Funkční hodnota se od první liší zase pouze znaménkem.

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x+3} & f(3) &= 1 \\ f'(x) &= e^{-x+3} \cdot (-1) & f'(3) &= -1 \\ f''(x) &= -e^{-x+3} \cdot (-1) & f''(3) &= 1 \\ f'''(x) &= e^{-x+3} \cdot (-1) & f'''(3) &= -1 \end{aligned}$$

Další derivace se budou chovat podobně. Derivace lichého řádu budou mít v bodě $x_0 = 3$ hodnotu -1 a sudé $+1$.

Najděte Tayl. polynom st. $2n$ pro $f(x) = e^{-x+3}$ v bodě $x_0 = 3$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x+3} & f(3) &= 1 \\
f'(x) &= e^{-x+3} \cdot (-1) & f'(3) &= -1 \\
f''(x) &= -e^{-x+3} \cdot (-1) & f''(3) &= 1 \\
f'''(x) &= e^{-x+3} \cdot (-1) & f'''(3) &= -1
\end{aligned}$$

Taylorův polynom sudého stupně je tvaru:

$$T_{2n} = 1 + \frac{-1}{1!}(x-3) + \frac{1}{2!}(x-3)^2 + \frac{-1}{3!}(x-3)^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{-1}{(2n-1)!}(x-3)^{2n-1} + \frac{1}{(2n)!}(x-3)^{2n}.$$

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$f(x) =$ e^{-x^2} $f(0) = 1$

Vypočteme funkční hodnotu funkce $f(x)$ v bodě x_0:

$$f(0) = e^0 = 1.$$

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = \quad e^{-x^2} \quad f(0) = 1$$
$$f'(x) = \quad e^{-x^2}(-2x) \quad f'(0) = 0$$

Spočítáme první derivaci a její funkční hodnotu.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2)$$

Druhou derivaci počítáme jako součin.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x^2} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^{-x^2}(-2x) & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) \\ &= e^{-x^2}(4x^2 - 2) \end{aligned}$$

Upravíme.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x^2} && f(0) = 1 \\
f'(x) &= e^{-x^2}(-2x) && f'(0) = 0 \\
f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) && \\
&= e^{-x^2}(4x^2 - 2) && f''(0) = -2
\end{aligned}
$$

Dosadíme $x = x_0 = 0$.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x^2} & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= e^{-x^2}(-2x) & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) & & \\
&= e^{-x^2}(4x^2 - 2) & f''(0) &= -2 \\
f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) & &
\end{aligned}
$$

Třetí derivaci počítáme také jako součin.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x^2} && f(0) = 1 \\
f'(x) &= e^{-x^2}(-2x) && f'(0) = 0 \\
f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) && \\
&= e^{-x^2}(4x^2 - 2) && f''(0) = -2 \\
f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) && \\
&= e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) &&
\end{aligned}
$$

Upravíme.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x^2} && f(0) = 1 \\
f'(x) &= e^{-x^2}(-2x) && f'(0) = 0 \\
f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) && \\
&= e^{-x^2}(4x^2 - 2) && f''(0) = -2 \\
f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) && \\
&= e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) && f'''(0) = 0
\end{aligned}
$$

Dosadíme $x = x_0 = 0$.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x^2} && f(0) = 1 \\
f'(x) &= e^{-x^2}(-2x) && f'(0) = 0 \\
f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) && \\
&= e^{-x^2}(4x^2 - 2) && f''(0) = -2 \\
f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) && \\
&= e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) && f'''(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) &= e^{-x^2}(-2x)(-8x^3 + 12x) + && \\
&\quad + e^{-x^2}(-24x^2 + 12) &&
\end{aligned}
$$

Čtvrtou derivaci počítáme také jako součin.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x^2} & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= e^{-x^2}(-2x) & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) & & \\
&= e^{-x^2}(4x^2 - 2) & f''(0) &= -2 \\
f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) & & \\
&= e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) & f'''(0) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= e^{-x^2}(-2x)(-8x^3 + 12x) + & & \\
&\quad + e^{-x^2}(-24x^2 + 12) & & \\
&= e^{-x^2}(16x^4 - 48x^2 + 12) & &
\end{aligned}
$$

Upravíme.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x^2} && f(0) = 1 \\
f'(x) &= e^{-x^2}(-2x) && f'(0) = 0 \\
f''(x) &= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2) && \\
&= e^{-x^2}(4x^2 - 2) && f''(0) = -2 \\
f'''(x) &= e^{-x^2}(-2x)(4x^2 - 2) + e^{-x^2}(8x) && \\
&= e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) && f'''(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) &= e^{-x^2}(-2x)(-8x^3 + 12x) + && \\
&\quad + e^{-x^2}(-24x^2 + 12) && \\
&= e^{-x^2}(16x^4 - 48x^2 + 12) && {\color{blue} f^{(4)}(0) = 12}
\end{aligned}
$$

Dosadíme $x = x_0 = 0$.

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

Víme tedy, že

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -2,\ f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 12.$$

Najděte Tayl. polynom st. 4 pro $f(x) = e^{-x^2}$ v počátku.

Víme tedy, že

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -2,\ f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 12.$$

Taylorův polynom 4.stupně v počátku je tedy tvaru:

$$T_4 = 1 + \frac{0}{1!}(x-0) + \frac{-2}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 + \frac{12}{4!}(x-0)^4$$

$$T_4 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$