

Radiologická fyzika

Michal Lenc, Jana Musilová
podzim 2008

Matematické a fyzikální základy radiologie

Záření: částice a vlny. Spektrum elektromagnetického pole.

Struktura látek. Atomy. Jádra. Zákony zachování.

Soustava SI, převody k jiným jednotkám. Terminologie.

Matematika: funkce, rovnice.

Matematika: základy diferenciálního počtu.

Matematika: pravděpodobnost, měření a zpracování dat.

Radioaktivita.

Rentgenové záření.

Zdroje a detektory záření.

Interakce záření s hmotou.

Ultrazvuk.

Matematika: principy tomografických metod.

Repetitorium.

Moderní diagnostické metody

MRI – zobrazení pomocí jaderné magnetické resonance

(magnetic resonance imaging)

CT – zobrazení pomocí absorpce rentgenového záření

(computer tomography)

PET – zobrazení pomocí positronů emitovaných při β^+ rozpadu (positron emission tomography)

USI – zobrazení pomocí absorpce, odrazu nebo frekvenčního posuvu ultrazvukových vln (ultrasound imaging)

Co je to za zařízení?



CT



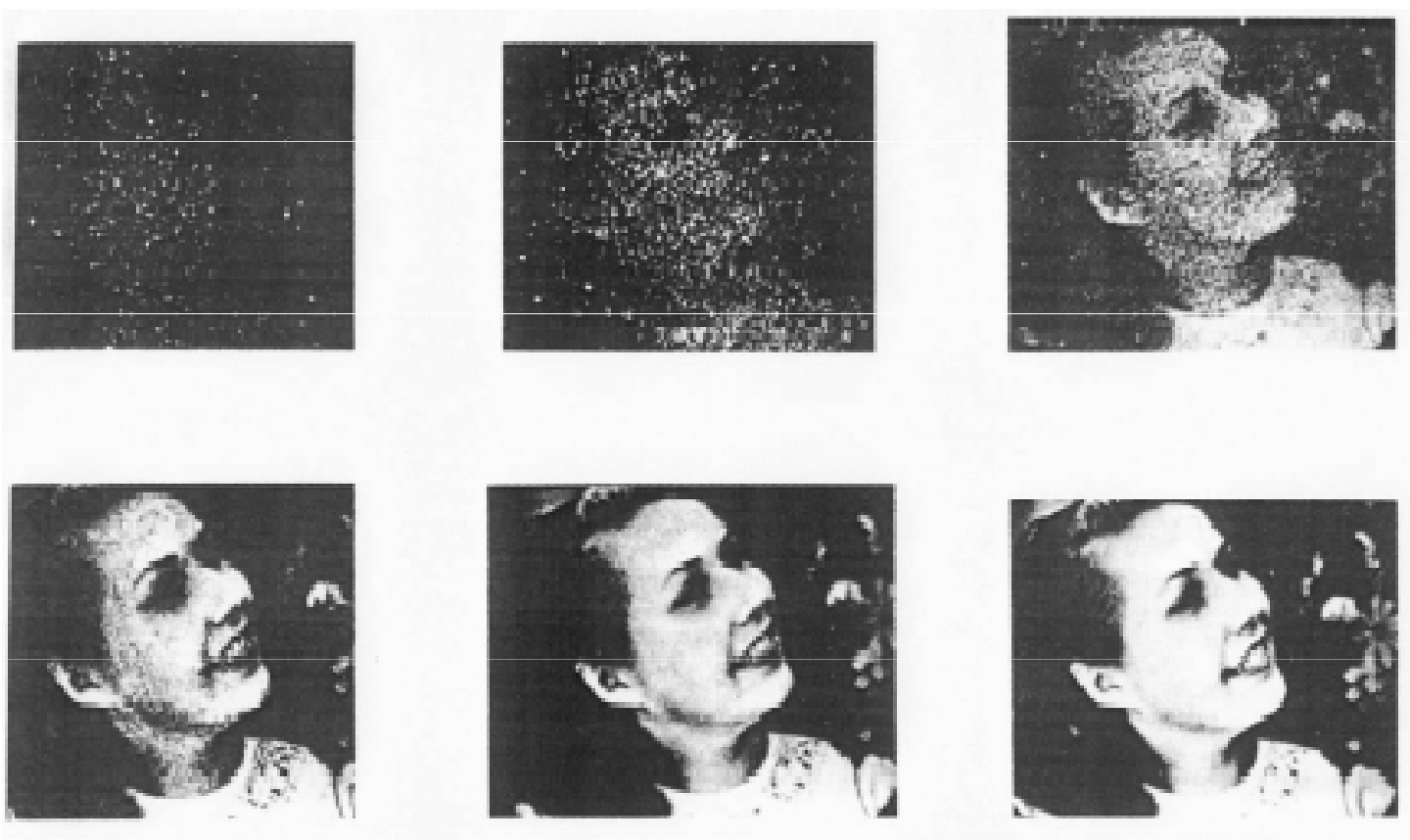
MRI

Typický problém

Ionizující elektromagnetické záření ($f > 3 \cdot 10^{15}$ Hz neboli $\lambda < 100$ nm - UV, rtg a gama) má dostatek energie pro ionizaci atomů tvořících naše tělo. Ionty způsobují tvorbu volných radikálů (H, OH) a vysoce chemicky reaktivních sloučenin (H_2O_2), které vyvolávají změny biologicky významných molekul (DNA) a vedou k biologickým účinkům jako je kancerogeneze a mutageneze. Čím vyšší je počet fotonů absorbovaných tělem a čím vyšší je energie těchto fotonů, tím vyšší je počet vytvářených volných radikálů, tím vyšší je riziko. **Ale...**

Kvalita obrazu souvisí s dávkou

Obecně platí, že lepší obraz vyžaduje více fotonů a tím i vyšší dávku.



Něco jaderné terminologie

Pokud se o jádra atomů zajímáme jen z hlediska různých jaderných vlastností, nikoli jako o části atomů, nazýváme je obecně **nuklidy**.

Jádro se skládá z protonů a neutronů. Počet protonů v jádře (**atomové číslo** nebo také **protonové číslo** jádra) je označováno symbolem **Z**; počet neutronů (**neutronové číslo**) symbolem **N**. Celkovému počtu neutronů a protonů v jádře říkáme **hmotnostní číslo A**. Máme-li na mysli jak neutrony, tak protony, používáme společného pojmenování **nukleony**.

$$A = Z + N$$

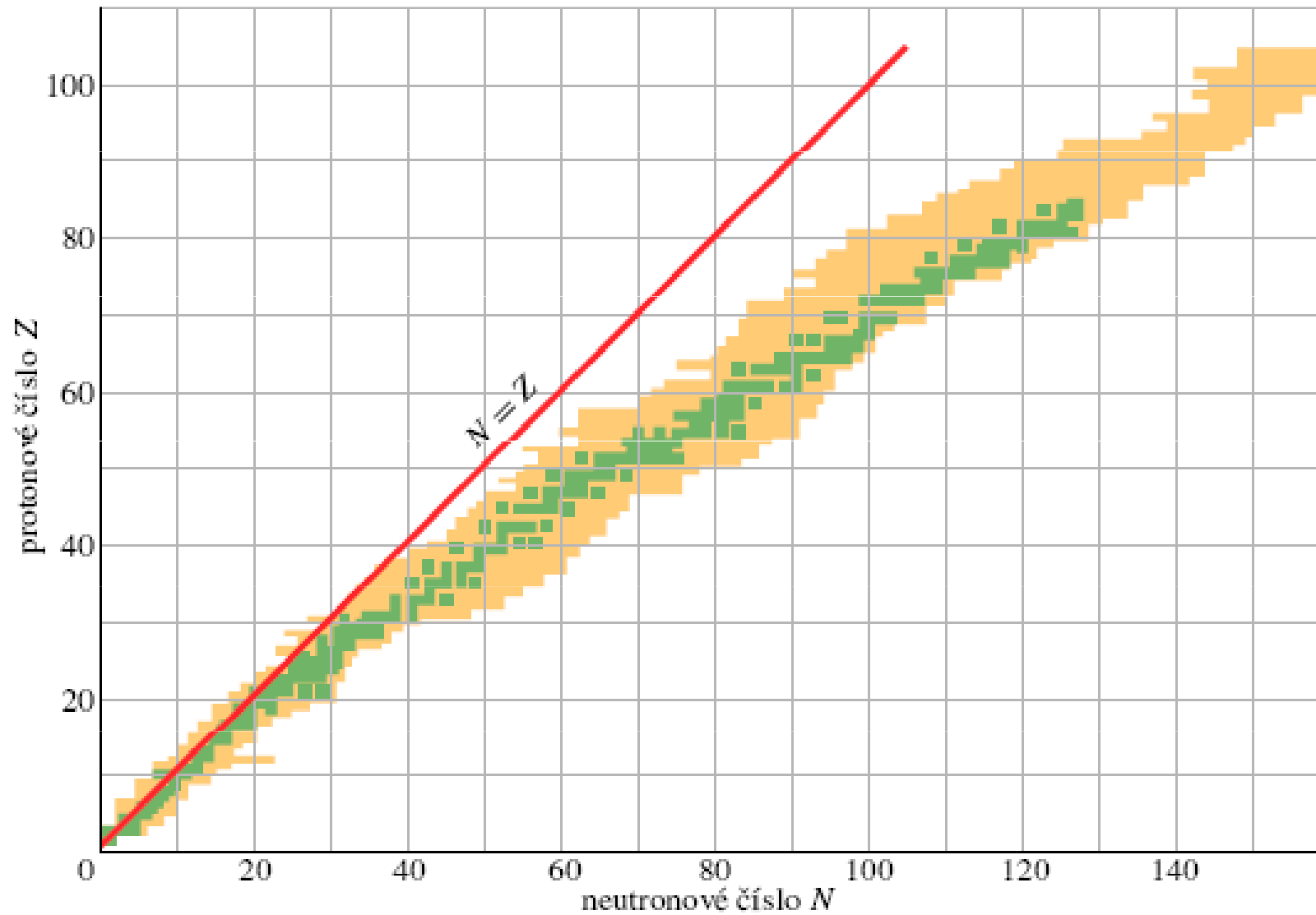
Značení nuklidů

NUKLID	Z	N	A
${}^1\text{H}$	1	0	1
${}^7\text{Li}$	3	4	7
${}^{31}\text{P}$	15	16	31
${}^{84}\text{Kr}$	36	48	84
${}^{120}\text{Sn}$	50	70	120
${}^{157}\text{Gd}$	64	93	157
${}^{197}\text{Au}$	79	118	197
${}^{227}\text{Ac}$	89	138	227
${}^{239}\text{Pu}$	94	145	239

A X

A X
 Z

Známé nuklidy (zeleně stabilní)



Nuklidy v okolí zlata

The chart displays isotopes of elements near gold (Z=79) with a diagonal line representing $A = 198$. The y-axis is the proton number Z (76-82) and the x-axis is the neutron number N (115-121). The diagonal line $A = 198$ passes through the ^{198}Au isotope.

Z	$N=115$	$N=116$	$N=117$	$N=118$	$N=119$	$N=120$	$N=121$
82	^{197}Pb 43 min	^{198}Pb 2,4 h	^{199}Pb 1,5 h	^{200}Pb 21,5 h	^{201}Pb 9,33 h	^{202}Pb 53 000 y	^{203}Pb 2,16 d
81	^{196}Tl 1,84 h	^{197}Tl 2,83 h	^{198}Tl 5,3 h	^{199}Tl 7,4 h	^{200}Tl 26,1 h	^{201}Tl 72,9 h	^{202}Tl 12,2 d
80	^{195}Hg 9,5 h	^{196}Hg 0,15 %	^{197}Hg 64,1 h	^{198}Hg 10,0 %	^{199}Hg 16,9 %	^{200}Hg 23,1 %	^{201}Hg 13,2 %
79	^{194}Au 39,4 h	^{195}Au 186 d	^{196}Au 6,18 d	^{197}Au 100 %	^{198}Au 2,69 d	^{199}Au 3,14 d	^{200}Au 48,4 min
78	^{193}Pt 60 y	^{194}Pt 32,9 %	^{195}Pt 33,8 %	^{196}Pt 25,3 %	^{197}Pt 18,3 h	^{198}Pt 7,2 %	^{199}Pt 30,8 min
77	^{192}Ir 73,8 d	^{193}Ir 62,7 %	^{194}Ir 19,2 h	^{195}Ir 2,8 h	^{196}Ir 52 s	^{197}Ir 5,8 min	^{198}Ir ≈ 8 s
76	^{191}Os 15,4 d	^{192}Os 41,0 %	^{193}Os 30,5 h	^{194}Os 6,0 y	^{195}Os 6,5 min	^{196}Os 35 min	—

„Klasické“ třídění na α , β a γ rozpad

α rozpad

Radium se změní na radon při emisi α částice (jádra helia)



obecně

Nuklid X se změní na nuklid Y při emisi α částice (jádra helia)



„Klasické“ třídění na α , β a γ rozpad

β rozpad

Kobalt se změní na nikl (v nabuzeném stavu) při emisi elektronu a antineutrína



obecně

Nuklid X se změní na nuklid Y při emisi elektronu a antineutrína



„Klasické“ třídění na α , β a γ rozpad

γ rozpad

Nikl v nabuzeném stavu přejde do základního stavu při emisi dvou fotonů



obecně

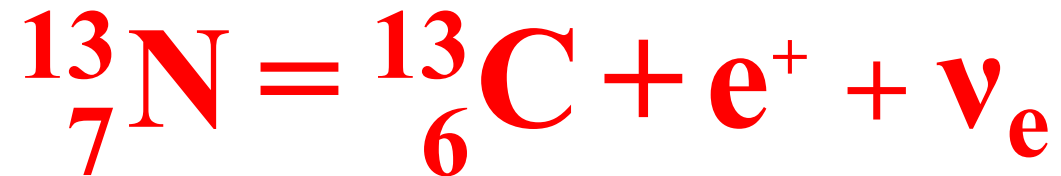
Nuklid v nabuzeném stavu X^* přejde do základního stavu X při emisi dvou fotonů



Další typy přechodů

β^+ rozpad

Dusík se změní na uhlík při emisi pozitronu a neutrina



obecně

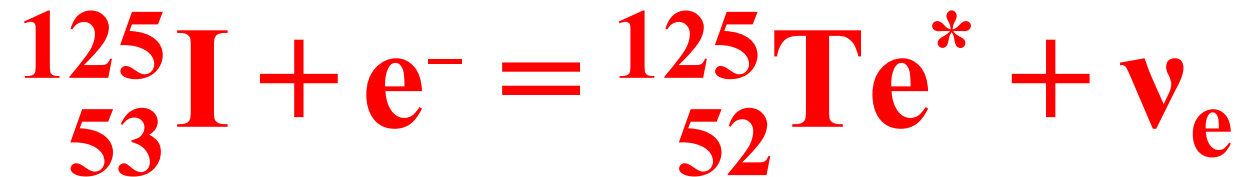
Nuklid X se změní na nuklid Y při emisi pozitronu a neutrina



Další typy přechodů

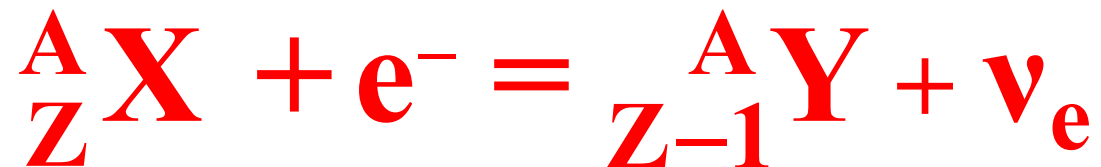
Elektronový záchyt

Jod se přemění na tellur v nabuzeném stavu při emisi neutrina



obecně

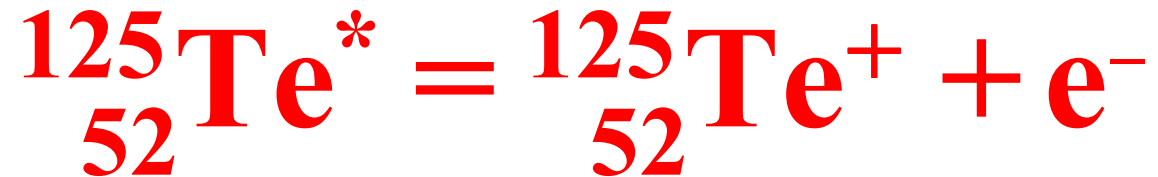
Elektron z vnitřní hladiny „se sloučí“ s protonem jádra na neutron při emisi neutrina



Další typy přechodů

Vnitřní konverse

Tellur z nabuzeného stavu přejde do jedenkrát ionizovaného stavu při emisi elektronu



obecně

Prvek uvolní energii nabuzeného stavu emisí vnitřního elektronu



Jak podrobný popis je potřeba pro porozumění jevu?

Dva příklady:

1) Stručný:

Jak je popisován na různých úrovních β rozpad

2) Podrobnější:

Proč jsou při α rozpadu emitovány právě nuklidy helia

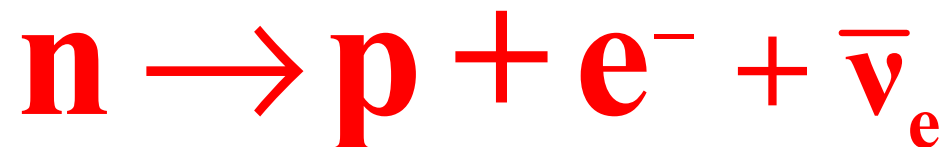
Popis β - rozpadu

fosfor se změní na síru
při emisi elektronu a neutrina



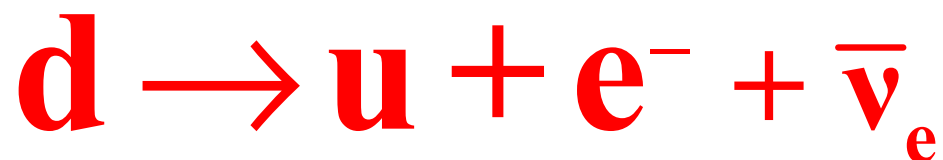
Zákon zachování počtu nukleonů (32=32) a elektrického náboje (15=16-1)

neutron se změní na proton
při emisi elektronu a
elektronového antineutrina



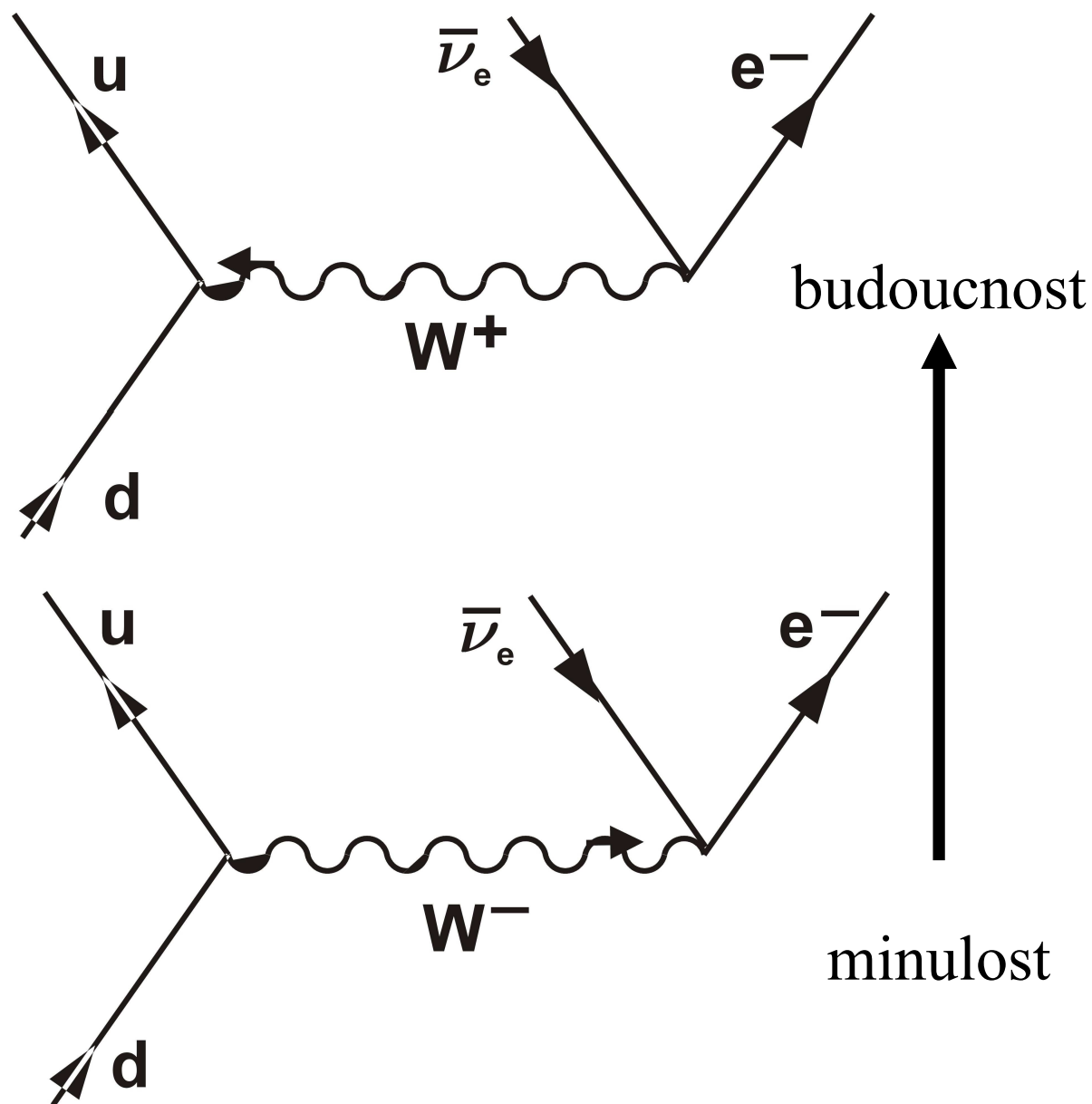
Zákon zachování baryonového (1=1), leptonového (0=1-1)
a elektrického náboje (0=1-1)

d-kvark se změní na u-kvark
při emisi elektronu a
elektronového antineutrina



Zákon zachování baryonového ($1/3=1/3$), leptonového (0=1-1)
a elektrického náboje ($-1/3=2/3-1$)

Popis β - rozpadu



V každém vrcholu
Feynmanova diagramu
jsou splněny zákony
zachování:

baryonového náboje
leptonového náboje
elektrického náboje
energie a hybnosti

Einsteinovy vztahy I

Vztah mezi energií E a hmotností m částice

$$E = m c^2$$

Pokud se částice pohybuje rychlostí velikosti v , platí

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Einsteinovy vztahy II

Vztah mezi energií fotonu E a frekvencí elmg. záření ω

$$E = \hbar \omega$$

Vztah mezi energií fotonu E a vlnovou délkou elmg. záření λ

$$E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$$

Fundamentální konstanty

Rychlost světla ve vakuu c

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$

Planckova konstanta \hbar

$$\hbar = 1,054\,571\,628(53) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

Elementární náboj e

$$e = 1,602\,176\,487(40) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Newtonova gravitační konstanta G

$$G = 6,674\,28(67) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Jednotky pro vyjádření hmotnosti

V soustavě SI je touto jednotkou kilogram. Díky Einsteinově vztahu mezi energií a hmotností částice v klidu můžeme vyjadřovat hmotnost pomocí jednotek pro energii nebo si zvolit nějakou hmotnost jako normál, se kterým budeme ostatní hmotnosti porovnávat. Pro atomovou a jadernou fyziku je vhodnou jednotkou energie elektronvolt (eV) a jeho násobky, tj. 1 eV je energie získaná nebo ztracená elementárním nábojem při překonání potenciálového rozdílu 1 V. Hmotnosti se většinou vyjadřují v MeV/c^2 ($1 \text{ MeV}=10^6 \text{ eV}$) nebo v atomových jednotkách hmotnosti u.

$$1 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 1,782\,661\,758(44) \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

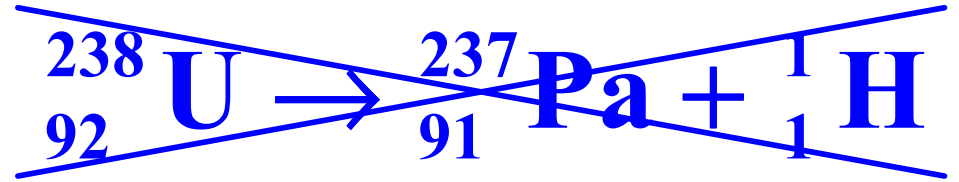
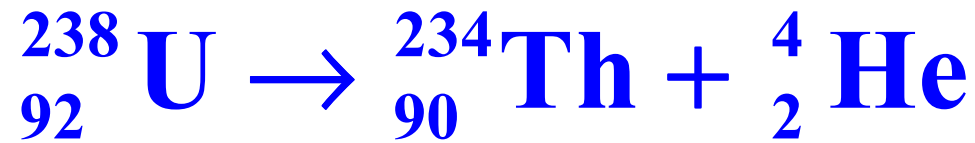
$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} m({}^{12}\text{C}) = 1,660\,538\,782(83) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Hmotnostní přebytek nuklidu

$$\frac{\Delta}{u} = \left(\frac{m}{u} - A \right)$$

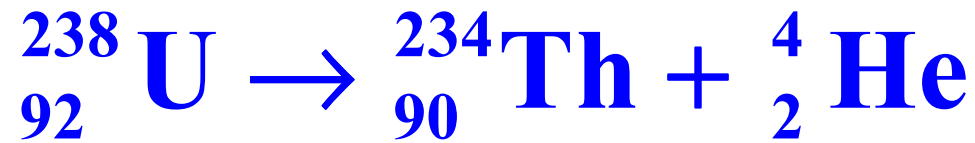
	Z	A	Δ/u
proton	1	1	0,007 276
neutron	0	1	0,008 665
deuteron	1	2	0,013 553
triton	1	3	0,015 501
helion	2	3	0,014 932
α částice	2	4	0,001 506

Přirozený α rozpad uranu



atom	Z	A	$m[\text{u}]$
uran	92	238	238,050 79
protaktinium	91	237	237,051 21
thorium	90	234	234,043 63
helium	2	4	4,002 60
vodík	1	1	1,007 83

Spontánní α rozpad uranu

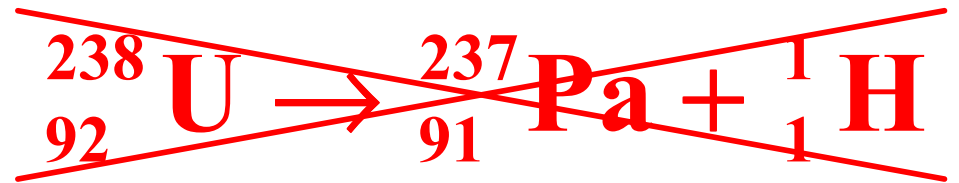


$$\Delta m c^2 =$$

$$(238,050\ 79 - 234,043\ 63 - 4,002\ 60) \text{u} c^2 =$$

$$0,004\ 56 \text{u} c^2 = \boxed{4,25 \text{MeV}}$$

Spontánní rozpad nastává, poločas rozpadu je $4,47 \cdot 10^9$ let.



$$\Delta m c^2 =$$

$$(238,050\ 79 - 237,051\ 21 - 1,007\ 83) \text{u} c^2 =$$

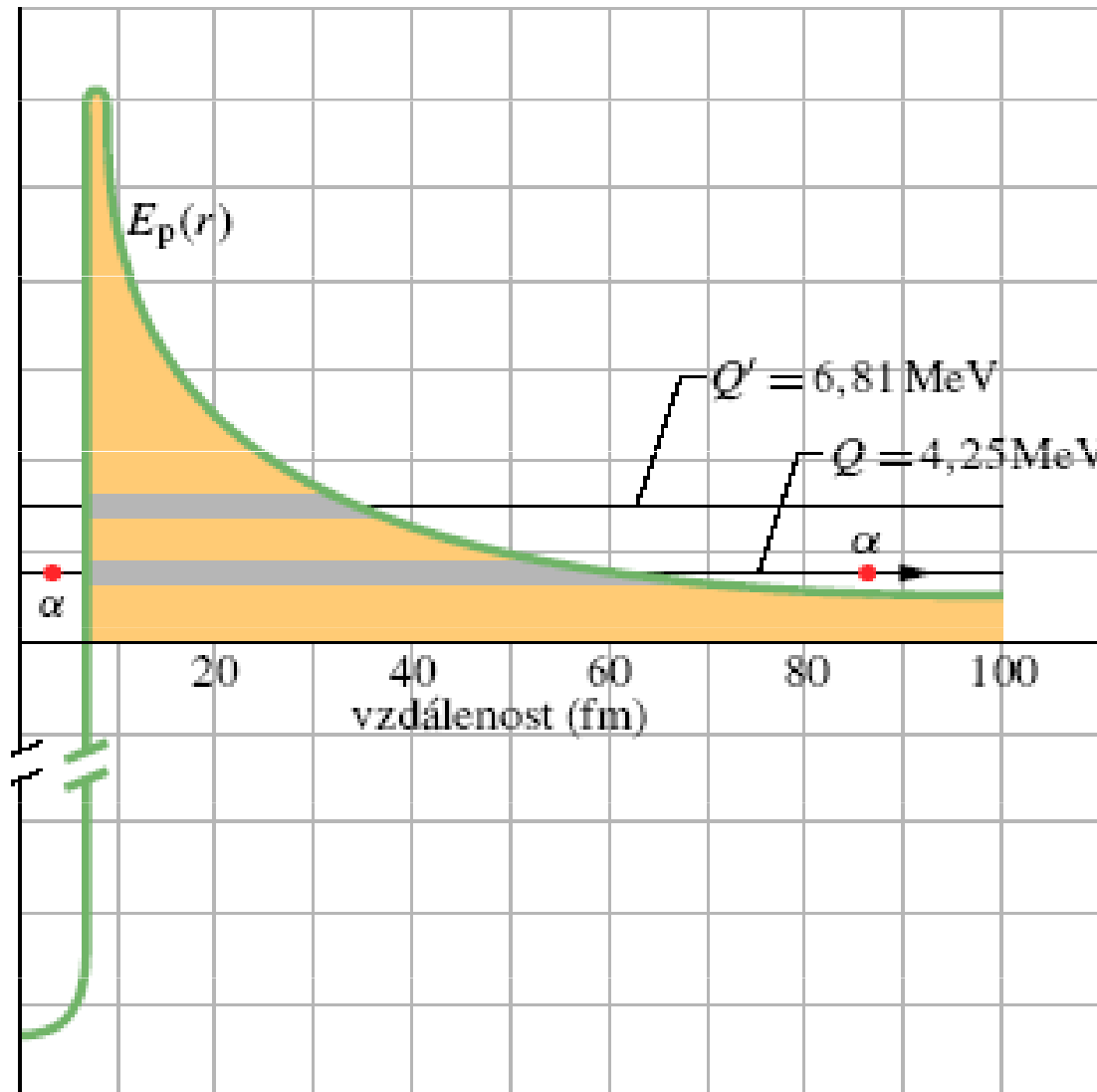
$$-0,008\ 25 \text{u} c^2 = \boxed{-7,68 \text{MeV}}$$

Spontánní rozpad nemůže nastat.

Tunelování při α rozpadu uranu

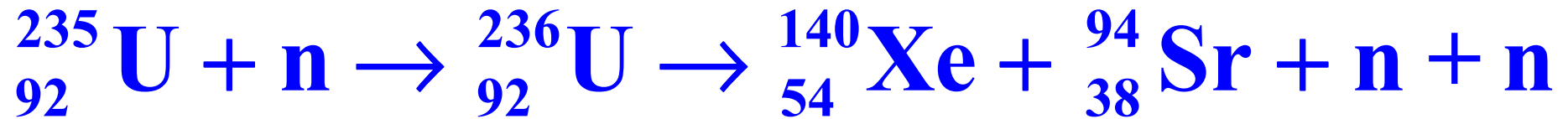


$4,5 \cdot 10^9$ let



9,1 min

Štěpení uranu



	${}^{140}\text{Xe}$	\rightarrow	${}^{140}\text{Cs}$	\rightarrow	${}^{140}\text{Ba}$	\rightarrow	${}^{140}\text{La}$	\rightarrow	${}^{140}\text{Ce}$
τ	14 s		64 s		13 d		40 h		stabilní
Z	54		55		56		57		58

	${}^{94}\text{Sr}$	\rightarrow	${}^{94}\text{Y}$	\rightarrow	${}^{94}\text{Zr}$
τ	75 s		19 min		stabilní
Z	38		39		40



Záření: částice nebo vlny?

Obecná odpověď je „ani částice, ani vlny“ nebo „někdy částice, někdy vlny“.

Elektrony, pozitrony, protony, neutrony, ...nebo vlnové funkce

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Hmotnost, rychlost,
impuls (= hybnost),
energie

$$\lambda = \frac{2\pi \hbar}{|\vec{p}|} \quad , \quad \omega = 2\pi f = \frac{E}{\hbar}$$

Vlnová délka,
frekvence

Záření: částice nebo vlny?

Obecná odpověď je „ani částice, ani vlny“ nebo „někdy částice, někdy vlny“.

Elektromagnetické vlnění nebo fotony

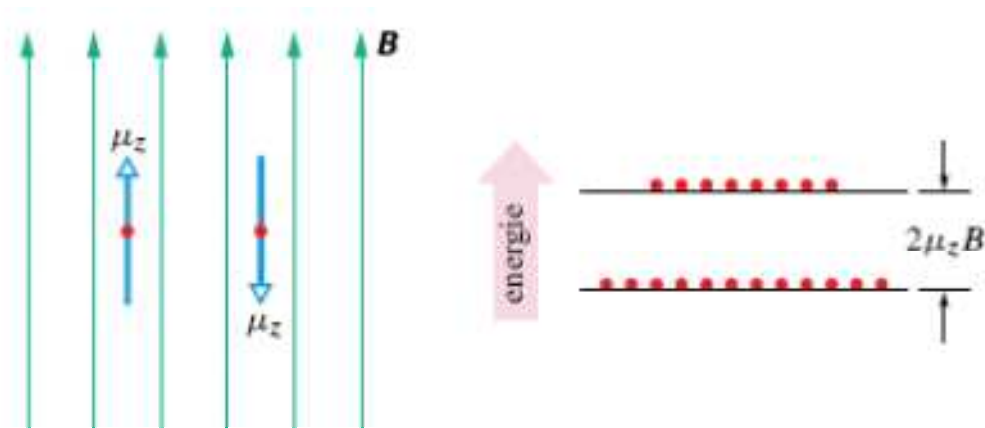
$$\lambda \quad , \quad \omega = 2\pi f$$

Vlnová délka,
frekvence

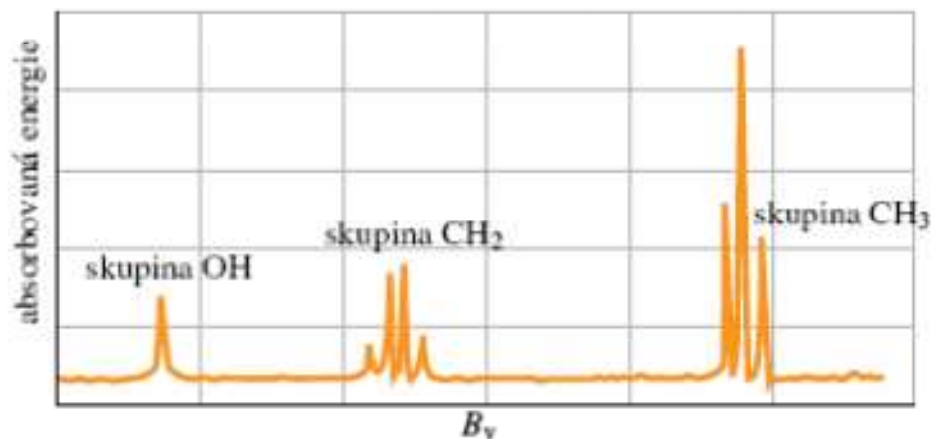
$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad , \quad E = \hbar\omega$$

Impuls (= hybnost),
energie

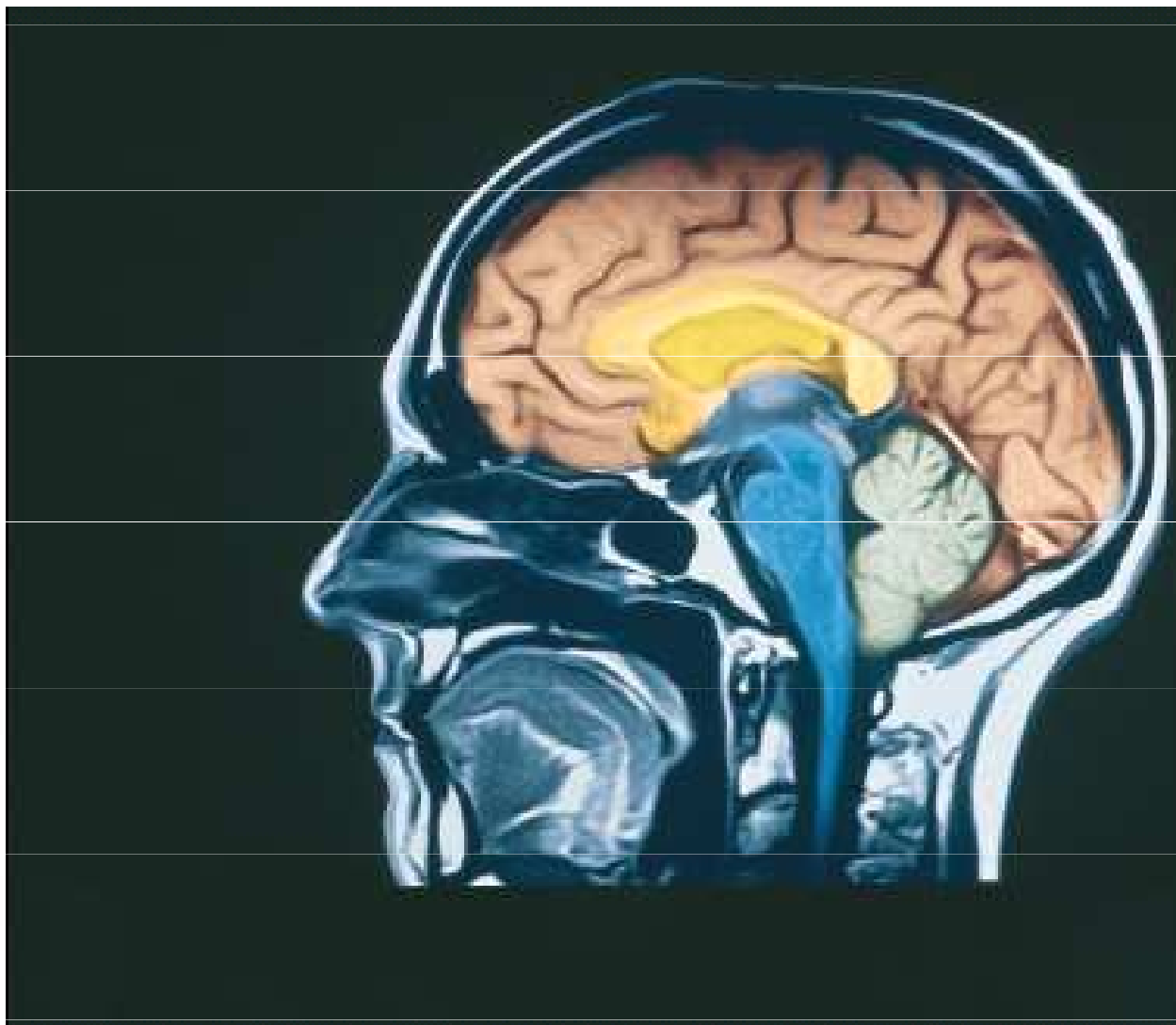
Příklad: jaderná magnetická rezonance



$$\hbar \omega = 2 \mu_z (B_{\text{vnější}} + B_{\text{vnitřní}})$$



Příklad: jaderná magnetická rezonance



Příklad: jaderná magnetická rezonance

Kapka vody je vložena do stálého magnetického pole \mathbf{B} o velikosti 1,80 T a střídavého elektromagnetického pole takové frekvence, aby došlo k překlápění spinů protonů. Složka μ_z magnetického dipólového momentu protonu ve směru vektoru \mathbf{B} má velikost $1,41 \cdot 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$. Předpokládejme, že lokální magnetické pole můžeme proti \mathbf{B} zanedbat. Jaká musí být frekvence f a vlnová délka λ střídavého magnetického pole?

ŘEŠENÍ: Z rov. (41.13) plyne

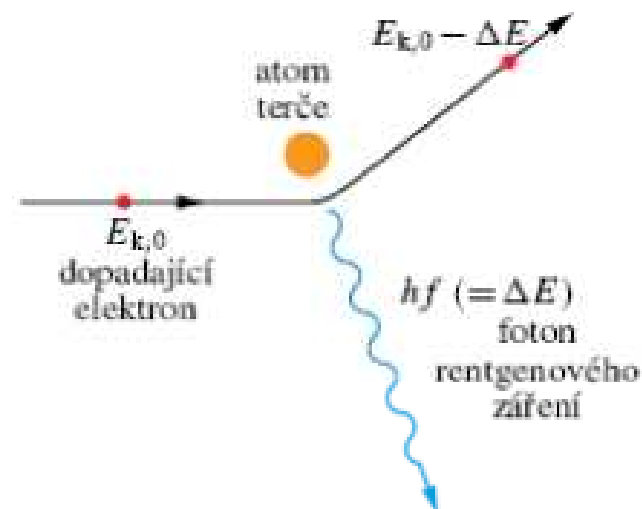
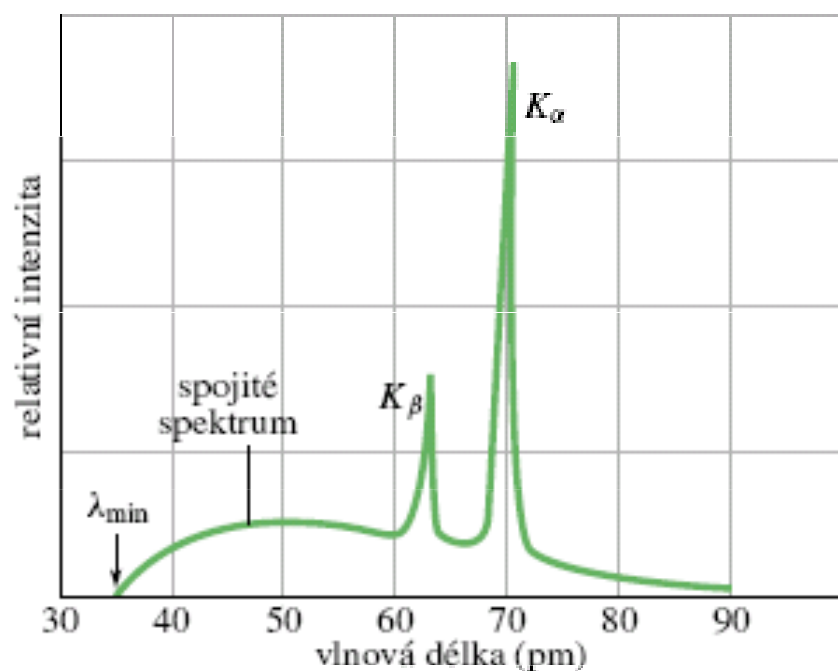
$$\begin{aligned} f &= \frac{2\mu_z B}{h} = \frac{2(1,41 \cdot 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1})(1,80 \text{ T})}{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})} = \\ &= 7,66 \cdot 10^7 \text{ Hz} = 76,6 \text{ MHz}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Odpovídající vlnová délka je

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{(3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})}{(7,66 \cdot 10^7 \text{ Hz})} = 3,92 \text{ m}. \quad (\text{Odpověď})$$

Tyto hodnoty frekvence a vlnové délky leží v krátkovlnné rádiové oblasti elektromagnetického spektra.

Příklad: rentgenové záření



Svazek elektronů o energii 35,0 keV dopadá na molybdenový terč a vytváří tak rentgenové záření, jehož spektrum je znázorněno na obr. 41.15.

(a) Jaká je prahová vlnová délka?

ŘEŠENÍ: Z rov. (41.15) plyne

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} &= \frac{hc}{E_{k,0}} = \frac{(4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})}{(35,0 \cdot 10^3 \text{ eV})} = \\ &= 3,55 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 35,5 \text{ pm.} \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$