

# **Radiologická fyzika**

**Zákony zachování**

**Soustava SI**

**Jednotky v radiologii**

podzim 2008, třetí přednáška

# **Zákon zachování energie**

# Richard Feynman o energii

Je důležité si uvědomit, že dnešní fyzika neví, co energie je. Netvrdíme, že se energie vyskytuje v nějakých malých dávkách o přesně dané velikosti. Tak to prostě není. Nicméně máme vzorce pro výpočet určitých číselných hodnot, a když ta čísla všechna sečteme, dají vždycky totéž.

Když vypočítáváme energii, občas její část systém opouští a občas zase zvenku přichází. Když chceme zákon zachování ověřit, musíme si dát pozor, aby žádná energie ani zvenku nepřišla, ani ven neodešla.

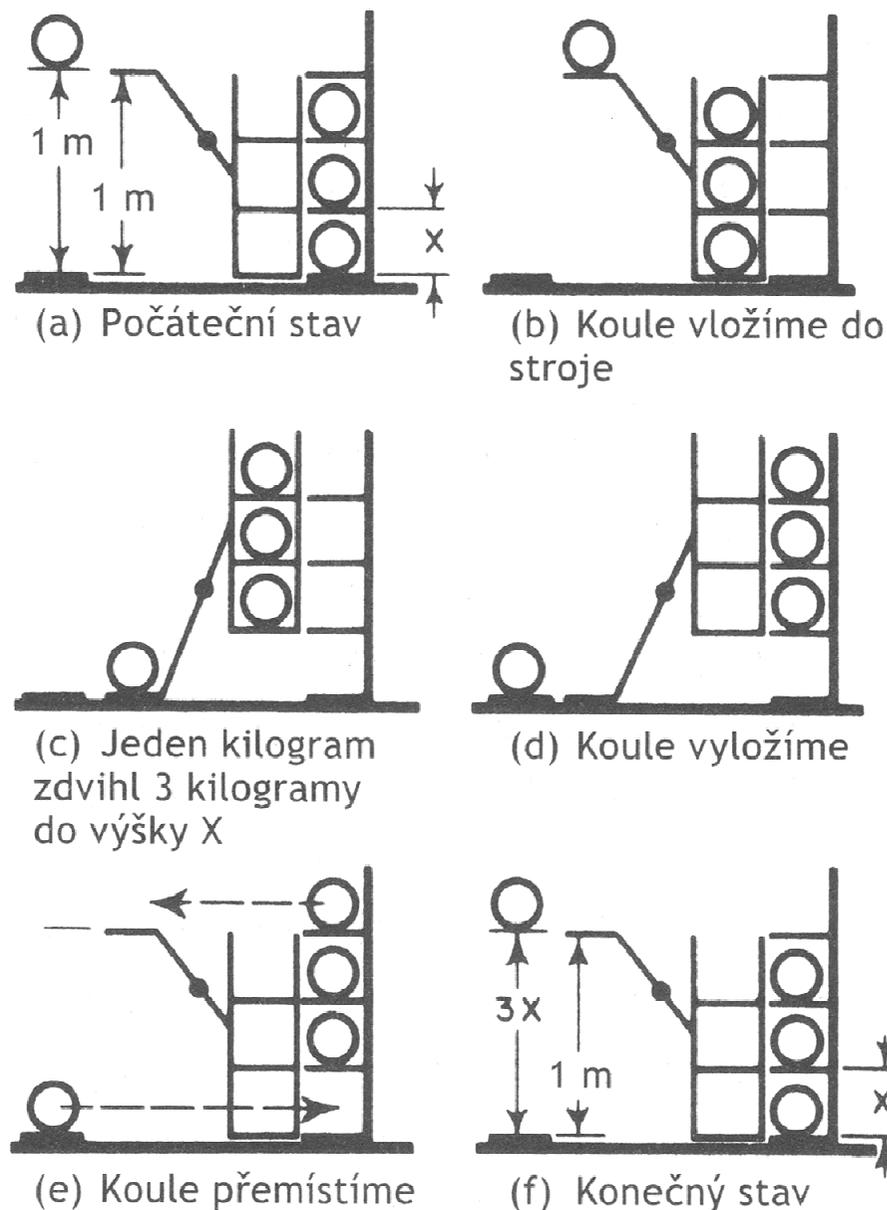
Energie má řadu různých podob, a každá z nich se počítá z jiného vzorce. Existuje gravitační energie, elektromagnetická energie, kinetická energie, tepelná energie, elastická energie, jaderná energie a energie spojená s hmotností. Když sečteme výrazy pro všechny tyto druhy energie, bude součet vždy stejný.

# Gravitační potenciální energie

**Vratný stroj A:** jednotkové závaží spustí o jednotkovou vzdálenost a přitom tři jednotková závaží zvedne o vzdálenost  $X$ .

**Nevratný stroj B:** jednotkové závaží spustí o jednotkovou vzdálenost a přitom tři jednotková závaží zvedne o vzdálenost  $Y$ .

$$Y \leq X$$



# Důkaz

Předpokládejme opak našeho tvrzení, tedy  $Y > X$ . Jednotkové závaží spustíme strojem B o jednotkovou vzdálenost a tři jednotková závaží vystoupí o  $Y$  výše. Pak můžeme snížit tři závaží závaží z  $Y$  na  $X$  a získat „zadarmo“ výkon, neboť v této situaci pak vratný stroj A s obráceným chodem by snížil tři jednotková závaží o vzdálenost  $X$  a zdvihl jednotkové závaží o jednotkovou vzdálenost, čímž by se závaží dostala do původního stavu a oba stroje by mohly opakovat popsanou akci. Kdyby tedy bylo  $Y$  větší jak  $X$ , dostali bychom věčný pohyb, jehož existenci považujeme za vyloučenou.

$$0 = 1\text{kg} \times (-1\text{m}) + 3\text{kg} \times X\text{m}$$

$$\left( \begin{array}{c} \text{gravitační potenciální} \\ \text{energie} \end{array} \right) = (\text{tíha}) \times (\text{výška})$$

**Zákon zachování energie a  
hybnosti na příkladu  
Comptonova jevu**

# Charakteristiky elektronu a fotonu

Elektron charakterizujeme hmotností, nábojem a vektorem rychlosti (případně spinem)

$$m, e, \vec{v}, (s)$$

Foton charakterizujeme frekvencí (vlnovou délkou) a jednotkovým vektorem směru šíření (případně jednotkovým vektorem polarizace)

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda}, \vec{n}, (\vec{e})$$

# Hybnost a energie elektronu a fotonu

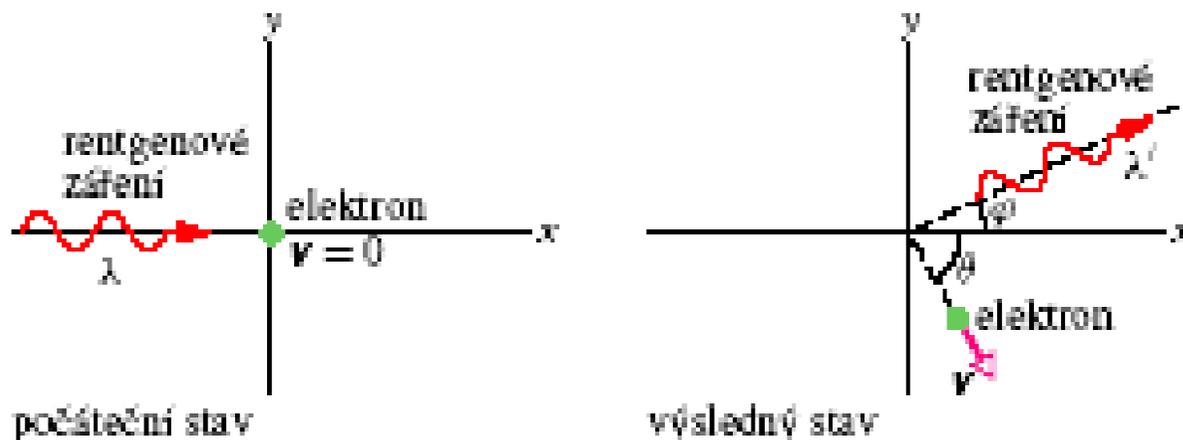
Volný elektron má hybnost a energii

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Foton má hybnost a energii

$$\vec{p} = \frac{\hbar \omega}{c} \vec{n} \quad , \quad E = \hbar \omega$$

# Comptonův rozptyl



Rentgenové záření o vlnové délce  $\lambda$  interaguje s elektronem v klidu. Rentgenový svazek je rozptýlen do úhlu  $\varphi$  a jeho vlnová délka vzroste na  $\lambda'$ . Elektron se pohybuje s rychlostí  $v$  pod úhlem  $\theta$ .

# Zápis zákonů zachování

Energie

$$\hbar \omega + m c^2 = \hbar \omega' + \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Složka hybnosti ve směru osy  $x$

$$\frac{\hbar \omega}{c} + 0 = \frac{\hbar \omega'}{c} \cos \varphi + p \cos \theta$$

Složka hybnosti ve směru osy  $y$

$$0 + 0 = \frac{\hbar \omega'}{c} \sin \varphi - p \sin \theta$$

# Změna vlnové délky a energie

Po výpočtu dostaneme

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos\varphi)$$

kde  $\lambda_C$  je Comptonova vlnová délka

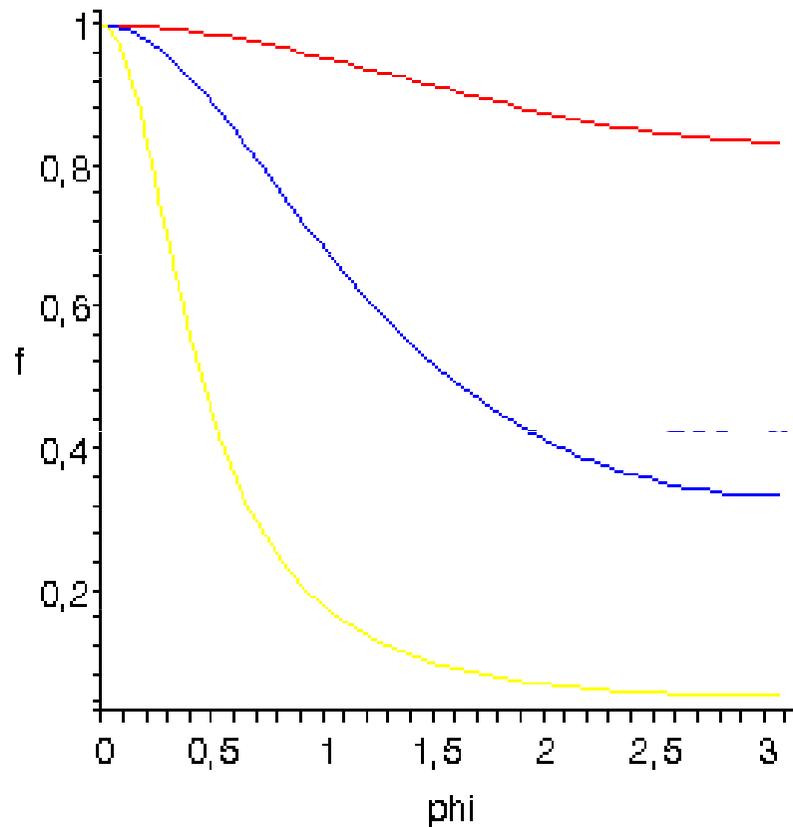
$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$

Pro energii fotonu po rozptylu dostaneme

$$\hbar\omega' = \frac{\hbar\omega}{1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos\varphi)}$$

# Množství fotonem předané energie

$$f = \frac{\hbar \omega'}{\hbar \omega} \quad , \quad k = \frac{\hbar \omega}{m c^2}$$



**Zákon zachování energie:  
kinetická a potenciální  
energie**

# Pohyb částice s malou hmotností v poli částice s velkou hmotností

V takovém případě můžeme s dobrým přiblížením považovat částici s velkou hmotností za nehybnou

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{q Q}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

Elektron hmotnosti  $m$  s nábojem  $q=-e$  v elektrickém poli protonu s nábojem  $Q=e$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m M}{r}$$

Částice s hmotností  $m$  v gravitačním poli Země hmotnosti  $M$

# Znaménko potenciální energie

$$U = + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Souhlasné náboje se odpuzují, náboje opačného znaménka se přitahují

$$U = - G \frac{mM}{r}$$

Gravitační působení je vždy přitažlivé

# Jak je to s potenciální energií v gravitačním poli země

$$U = -G \frac{m M}{r} = -G \frac{m M}{R+h}$$

Úprava

$$-\frac{1}{R+h} = -\frac{1}{R} + \left( -\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R} + \frac{h}{(R+h)R}$$

Výsledek

$$U \approx -G \frac{m M}{R} + m \frac{G M}{R^2} h = konst + m g h$$

## Zkratky pro různé jednotky energie

Btu = British thermal unit

erg = erg

ft.lb = foot - pound

hp.h = horse power hour

J = Joule

cal = kalorie

kW.h = kilowatthodina

eV = elektrovolt

kg = kilogram

u = atomová hmotnostní jednotka

## Převodní vztahy jednotek pro energii

	Btu	erg	ft·lb	hp·h	J	cal	kW·h	eV	kg	u
Btu	1	$1,055 \cdot 10^{10}$	777,9	$3,929 \cdot 10^{-4}$	1055	252,0	$2,930 \cdot 10^{-4}$	$6,585 \cdot 10^{21}$	$1,174 \cdot 10^{-14}$	$7,070 \cdot 10^{12}$
erg	$9,481 \cdot 10^{-11}$	1	$7,376 \cdot 10^{-8}$	$3,725 \cdot 10^{-14}$	$10^{-7}$	$2,389 \cdot 10^{-8}$	$2,778 \cdot 10^{-14}$	$6,242 \cdot 10^{11}$	$1,113 \cdot 10^{-24}$	670,2
ft·lb	$1,285 \cdot 10^{-3}$	$1,356 \cdot 10^7$	1	$5,051 \cdot 10^{-7}$	1,356	0,323 8	$3,766 \cdot 10^{-7}$	$8,464 \cdot 10^{18}$	$1,509 \cdot 10^{-17}$	$9,037 \cdot 10^9$
hp·h	2 545	$2,685 \cdot 10^{13}$	$1,980 \cdot 10^6$	1	$2,685 \cdot 10^6$	$6,413 \cdot 10^5$	0,745 7	$1,676 \cdot 10^{25}$	$2,988 \cdot 10^{-11}$	$1,799 \cdot 10^{16}$
J	$9,481 \cdot 10^{-4}$	$10^7$	0,737 6	$3,725 \cdot 10^{-7}$	1	0,238 9	$2,778 \cdot 10^{-7}$	$6,242 \cdot 10^{18}$	$1,113 \cdot 10^{-17}$	$6,702 \cdot 10^9$
cal	$3,969 \cdot 10^{-3}$	$4,186 \cdot 10^7$	3,088	$1,560 \cdot 10^{-6}$	4,186	1	$1,163 \cdot 10^{-6}$	$2,613 \cdot 10^{19}$	$4,660 \cdot 10^{-17}$	$2,806 \cdot 10^{10}$
kW·h	3 413	$3,600 \cdot 10^{13}$	$2,655 \cdot 10^6$	1,341	$3,600 \cdot 10^6$	$8,600 \cdot 10^5$	1	$2,247 \cdot 10^{25}$	$4,007 \cdot 10^{-11}$	$2,413 \cdot 10^{16}$
eV	$1,519 \cdot 10^{-22}$	$1,602 \cdot 10^{-12}$	$1,182 \cdot 10^{-19}$	$5,967 \cdot 10^{-26}$	$1,602 \cdot 10^{-19}$	$3,827 \cdot 10^{-20}$	$4,450 \cdot 10^{-26}$	1	$1,783 \cdot 10^{-36}$	$1,074 \cdot 10^{-9}$
kg	$8,521 \cdot 10^{13}$	$8,987 \cdot 10^{23}$	$6,629 \cdot 10^{16}$	$3,348 \cdot 10^{10}$	$8,987 \cdot 10^{16}$	$2,146 \cdot 10^{16}$	$2,497 \cdot 10^{10}$	$5,610 \cdot 10^{35}$	1	$6,022 \cdot 10^{26}$
u	$1,415 \cdot 10^{-13}$	$1,492 \cdot 10^{-3}$	$1,101 \cdot 10^{-10}$	$5,559 \cdot 10^{-17}$	$1,492 \cdot 10^{-10}$	$3,564 \cdot 10^{-11}$	$4,146 \cdot 10^{-17}$	$9,320 \cdot 10^8$	$1,661 \cdot 10^{-27}$	1

# **Mezinárodní soustava jednotek SI**

# Základní jednotky SI m, kg, s

**Délka**                      **metr**                      **m**

Metr je délka dráhy proběhnuté světlem ve vakuu za dobu  $1/299\,792\,458$  sekundy

**Hmotnost**                      **kilogram**                      **kg**

Kilogram je jednotka hmotnosti; rovná se hmotnosti mezinárodního prototypu kilogramu

**Čas**                                      **sekunda**                      **s**

Sekunda je trvání  $9\,192\,631\,770$  period záření odpovídajícího přechodu mezi dvěma velmi jemnými hladinami základního stavu atomu cesia 133

# Základní jednotky SI A, K

**Elektrický proud**

**ampér**

**A**

Ampér je stálý elektrický proud, který při průtoku dvěma přímými nekonečně dlouhými rovnoběžnými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1 metru, vyvolá mezi nimi sílu  $2 \cdot 10^{-7}$  newtonu na metr délky

**Termodynamická teplota**

**kelvin**

**K**

Kelvin, jednotka termodynamické teploty, je  $1/273,16$  termodynamické teploty trojného bodu vody

# Základní jednotky SI mol, cd

**Látkové množství**

**mol**

**mol**

Mol je látkové množství soustavy, která obsahuje tolik elementárních entit, kolik je atomů v 0,012 kg uhlíku 12. Při užití molu musí být elementární entity specifikovány. Mohou to být atomy, molekuly, ionty, elektrony, jiné částice nebo specifikované skupiny takových částic

**Svítivost**

**kandela**

**cd**

Kandela je svítivost zdroje v daném směru, který vysílá monochromatické záření s kmitočtem  $540 \cdot 10^{12}$  hertzů a má v tomto směru zářivost  $1/683$  wattů na steradián

# Odvozené jednotky SI (1)

plocha	čtverečný metr	$m^2$	
objem	krychlový metr	$m^3$	
rychlost		$m \cdot s^{-1}$	
zrychlení		$m \cdot s^{-2}$	
rovinný úhel	radián	rad	
prostorový úhel	steradián	sr	
úhlová rychlost		$rad \cdot s^{-1}$	
úhlové zrychlení		$rad \cdot s^{-2}$	
frekvence, kmitočet	hertz	Hz	$s^{-1}$
hustota		$kg \cdot m^{-3}$	
síla	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
tlak	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$
práce, energie, teplo	joule	J	N·m
výkon	watt	W	$J \cdot s^{-1}$

# Odvozené jednotky SI (2)

elektrický náboj	coulomb	C	A·s
potenciál, napětí	volt	V	W·A <sup>-1</sup>
intenzita elektrického pole		V·m <sup>-1</sup>	N·C <sup>-1</sup>
elektrický odpor	ohm	Ω	V·A <sup>-1</sup>
elektrická vodivost	siemens	S	Ω <sup>-1</sup>
kapacita	farad	F	A·s·V <sup>-1</sup>
magnetická indukce	tesla	T	Wb·m <sup>-2</sup>
magnetický tok	weber	Wb	V·s
indukčnost	henry	H	V·s·A <sup>-1</sup>
intenzita magnetického pole		A·m <sup>-1</sup>	
entropie		J·K <sup>-1</sup>	
měrná tepelná kapacita		J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>	
tepelná vodivost		W·m <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>	
Celsiova teplota	stupeň Celsia	°C	
světelný tok	lumen	lm	cd·sr
osvětlení	lux	lx	lm·m <sup>-2</sup>
zářivost		W·sr <sup>-1</sup>	

# **Jednotky v radiologii**

# Pohlčená dávka

**Pohlčená dávka** je míra radiační dávky (energie na jednotku hmotnosti) skutečně pohlčené určitým objektem, například pacientovou rukou nebo hrudníkem. Jednotkou v soustavě SI je **gray** (Gy). Stále se však užívá i starší jednotky **rad** (radiation absorbed dose - pohlčená radiační dávka). Jednotky jsou definovány jako

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J kg}^{-1} = 100 \text{ rad}$$

# Ekvivalentní dávka

**Ekvivalentní dávka.** Ačkoli různé druhy záření (například záření gama a neutrony) mohou tělu dodat stejné množství energie, nemusí mít stejný biologický účinek. Ekvivalentní dávka nám umožňuje určit biologický účinek záření tak, že vynásobíme pohlcenou dávku (udanou v jednotkách gray nebo rad) číselným **RBE** faktorem relativní biologické účinnosti (relative biological effectiveness). Pro rentgenové záření a elektrony je  $RBE=1$ , pro pomalé neutrony  $RBE=5$ , pro  $\alpha$ -částice  $RBE=10$  atd. Běžné osobní měřicí pomůcky registrují právě ekvivalentní dávku. Jednotkou pro ekvivalentní dávku v soustavě SI je **sievert (Sv)**. Užívá se i starší jednotky **rem**. Platí

$$1\text{ Sv} = 100\text{ rem}$$

# Aktivita

**Aktivita.** Celková rychlost rozpadu vzorku radionuklidu se nazývá **aktivita** vzorku. Jednotkou aktivity v soustavě SI je **becquerel**, podle objevitele radioaktivity Henriho Becquerela

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$$

1 Bq tedy odpovídá jednomu rozpadu za sekundu. Starší, ale stále používanou jednotkou je **curie**

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

# Příklady použití

**Pohlčená dávka:** „Celotělová, krátkodobá dávka gama záření 3 Gy (300 rad) zapříčiní smrt 50% populace, která jí byla vystavena.“ Pro uklidnění uveďme, že dnešní střední roční absorbovaná dávka záření ze zdrojů přírodních i vytvořených lidskou činností je asi  $2 \text{ mGy} = 0,2 \text{ rad}$ .

**Ekvivalentní dávka:** „Národní úřad pro ochranu před zářením doporučuje, aby nikdo vystavený působení záření (kromě osob pracujících se zářením) neobdržel v žádném roce ekvivalentní dávku větší než  $5 \text{ mSv} = 0,5 \text{ rem}$ .“

**Aktivita:** „Aktivita vyhořelé palivové tyče číslo 5 658 dne 15. ledna 1997 činila  $3,5 \cdot 10^{15} \text{ Bq}$ .“