ASTAc/02 Biostatistika
3. cvičení

Opakování
Modelová rozložení náhodné veličiny
Normální rozložení dat
Základy testování hypotéz

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

Opakování

Základy popisné statistiky
Vizualizace dat

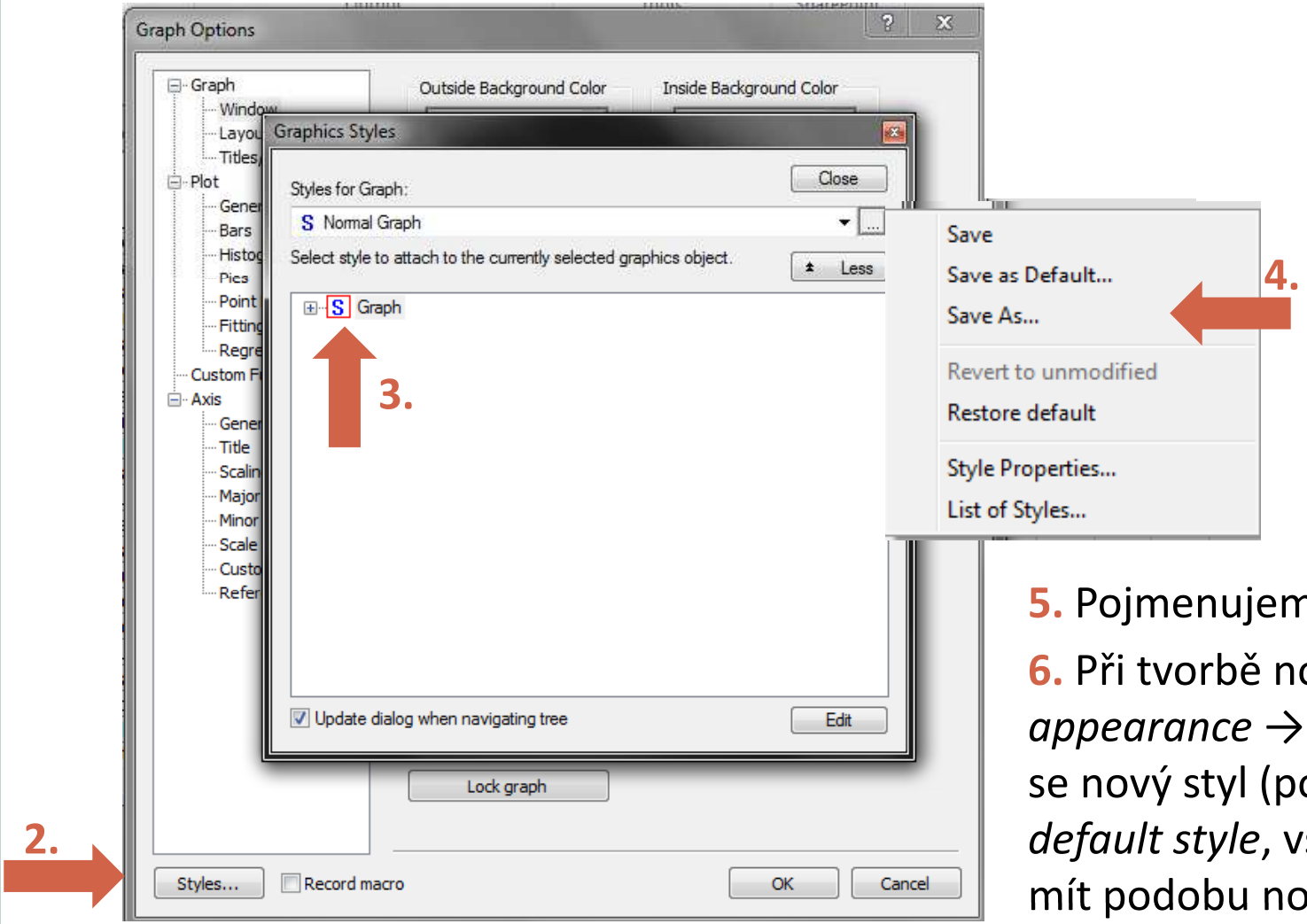
Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

Opakování

1. Co jsou **kvalitativní** a **kvantitativní data**?
2. Jaký je rozdíl mezi **spojitými** a **diskrétními daty**?
3. Uveďte **příklady binárních / nominálních / ordinálních dat**.
4. Uveďte **příklady spojitých** a **diskrétních dat**.
5. Jakými charakteristikami **popisujeme kvalitativní data**?
6. Jakými charakteristikami **popisujeme kvantitativní data**?
7. Jak správně **vizualizujeme kvalitativní data**?
8. Jak správně **vizualizujeme kvantitativní data**?

Doplnění – jak uložit námi definovaný vzhled grafu

1. Dvakrát poklikáme v oblasti grafu



5. Pojmenujeme nový styl → *Save.*

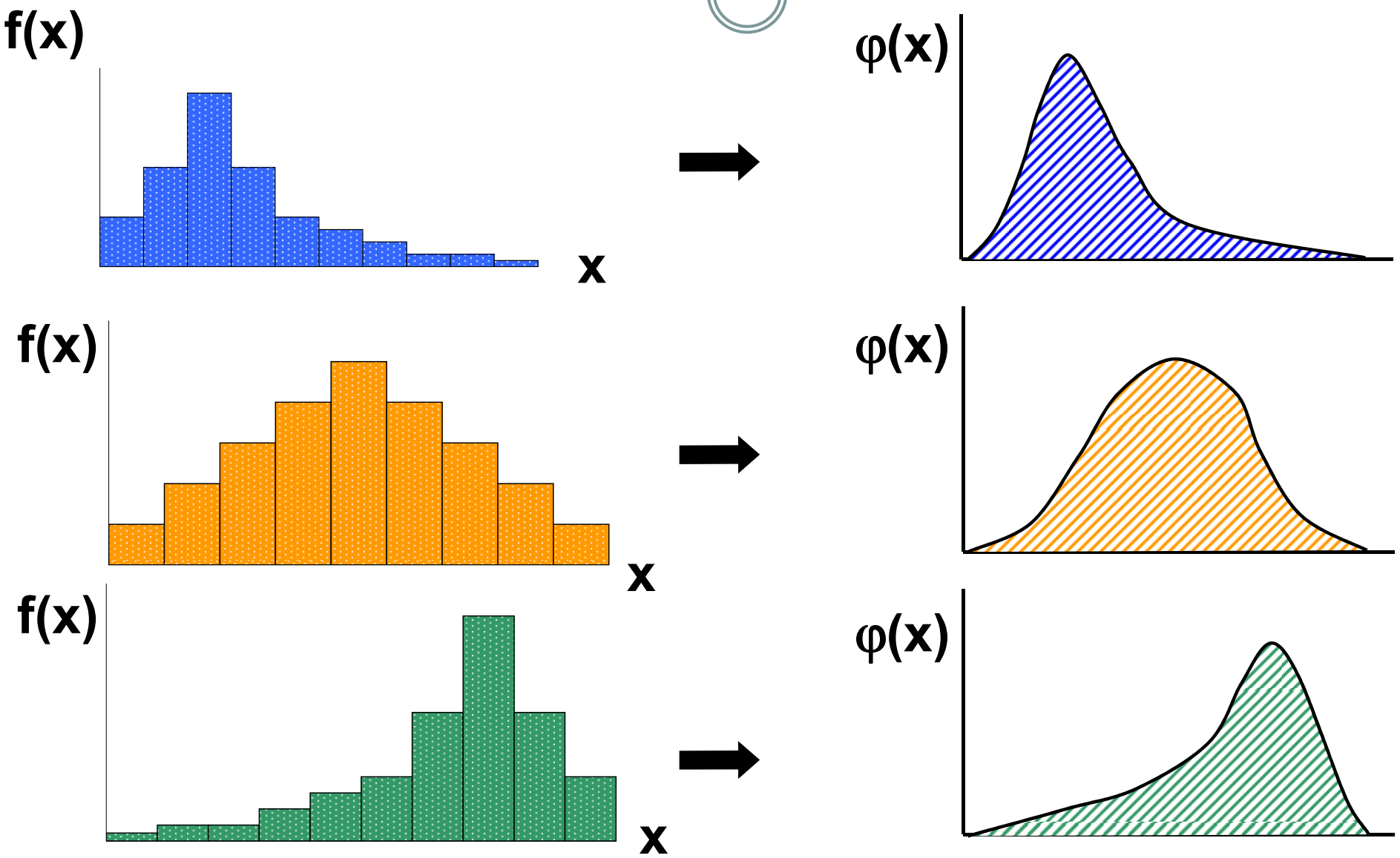
6. Při tvorbě nového grafu záložka *appearance* → *Use graph style*: vybere se nový styl (pokud zaškrtneme *set as default style*, všechny nové grafy budou mít podobu nově definovaného stylu).

Modelová rozložení

Parametry rozložení
Přehled modelových rozložení
Logaritmicko-normální rozložení

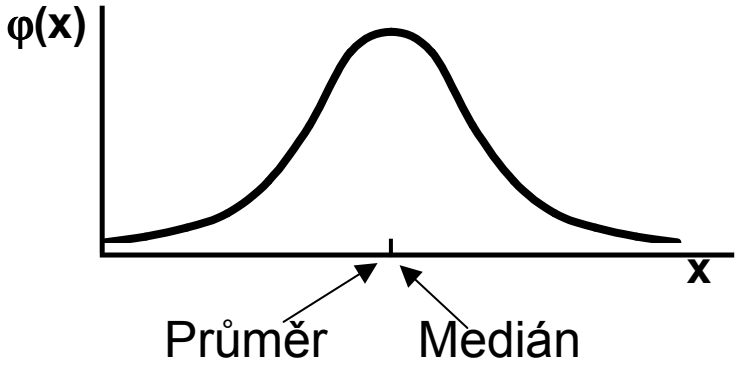
Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

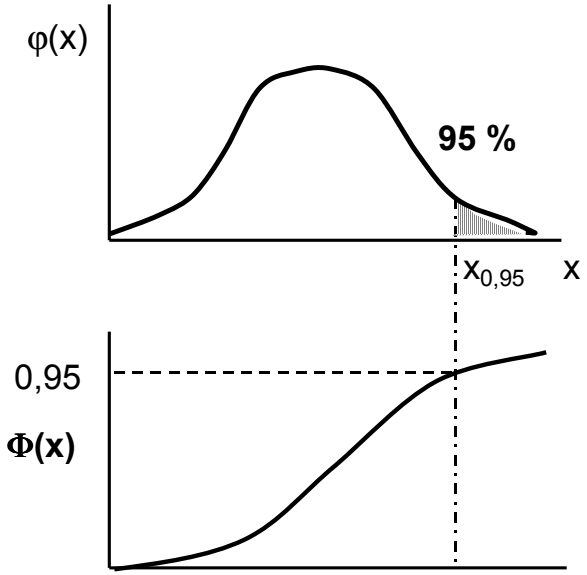
Výběrové rozložení hodnot lze modelově popsat a definovat tak pravděpodobnost výskytu X



Parametry rozložení

- Soubor dat (řada čísel) můžeme charakterizovat parametry jeho rozložení
- Hlavní skupiny těchto parametrů můžeme charakterizovat jako ukazatele:
  - **Středu** (medián, průměr, geometrický průměr)
  - **Šířky rozložení** (rozsah hodnot, rozptyl, směrodatná odchylka)
  - **Tvaru rozložení** (skewness, kurtosis)
  - **Kvantily rozložení** – kolik % řady dat leží nad a pod kvantilem





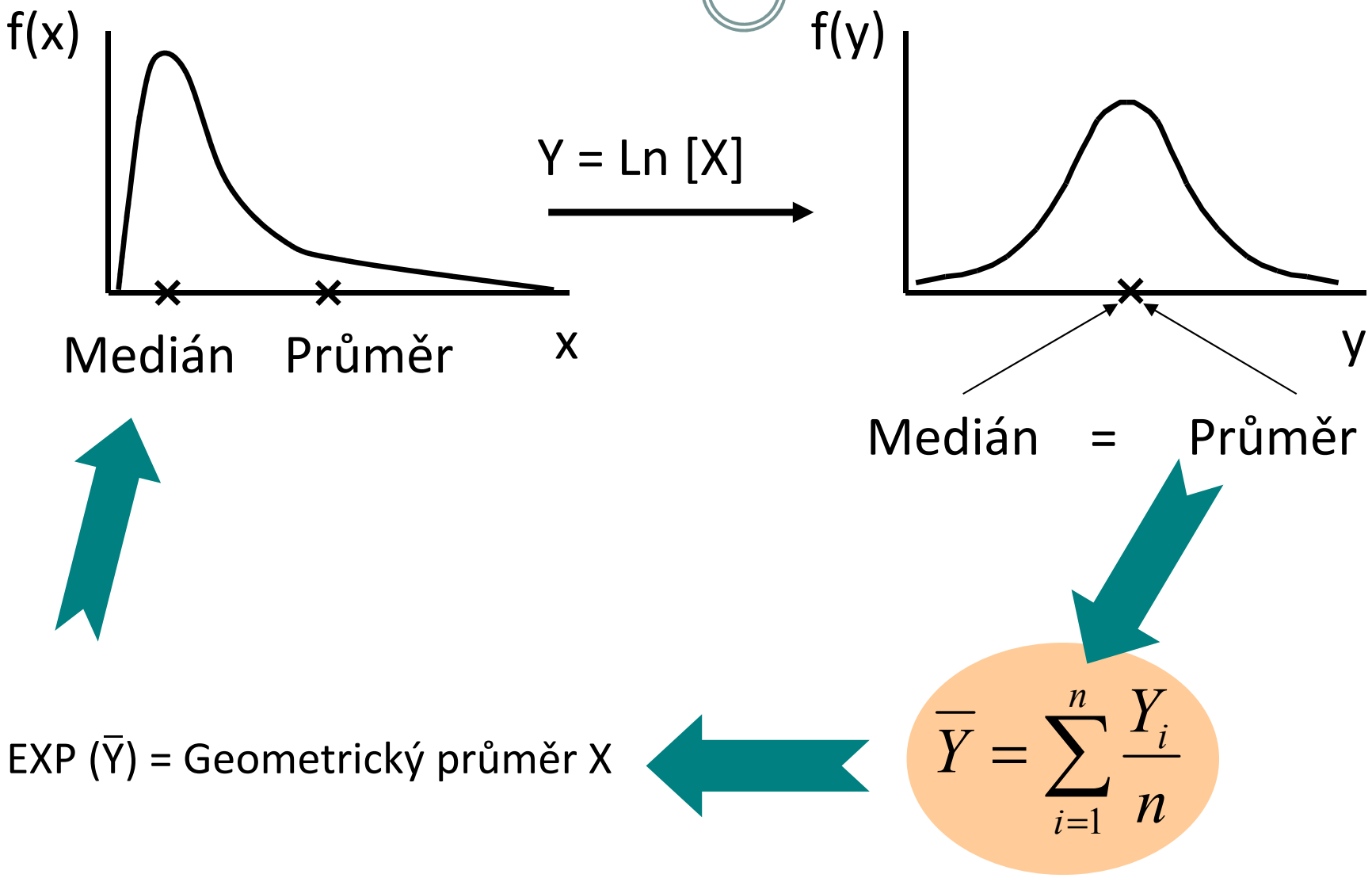
Stručný přehled modelových rozložení I.

Rozložení	Parametry	Stručný popis
Normální	Průměr (μ) Rozptyl (σ^2)	Symetrická funkce popisující intervalovou hustotu četnosti; nejpravděpodobnější jsou průměrné hodnoty znaku v populaci.
Log-normální	Medián Geometrický průměr Rozptyl (σ^2)	Funkce intervalové hustoty četnosti, která po logaritmické transformaci nabude tvaru normálního rozložení.
Weibullovo	α - parametr tvaru β - parametr rozsahu hodnot	Změnou parametru a lze modelovat distribuci doby přežití, např. stresovaného organismu. Rozložení využívané i jako model k odhahu LC_{50} nebo EC_{50} u testů toxicity.
Rovnoměrné	Medián Geometrický průměr Rozptyl (σ^2)	Funkce intervalové hustoty četnosti, která po logaritmické transformaci nabude tvaru normálního rozložení.
Triangulární	$f(x) = [b - ABS(x - a)] / b^2$ $a - b < x < a + b$	Pravděpodobnostní funkce pro typ rozložení, kdy jsou střední hodnoty výrazně pravděpodobnější než hodnoty okrajové.
Gamma	Parametry distribuční funkce: α - parametr tvaru β - parametr rozsahu hodnot	Umožňuje flexibilně modelování distribučních funkcí nejrůznějších tvarů. Např. χ^2 rozložení je rozložení typu Gamma. Gamma rozložení s a = 1 je známo jako exponenciální rozložení.

Stručný přehled modelových rozložení II.

Rozložení	Parametry	Stručný popis
Beta	Parametry distribuční funkce: α - parametr tvaru β - parametr rozsahu hodnot	Pravděpodobnostní funkce pro proměnnou omezenou rozsahem do intervalu [0; 1]. Je matematicky komplikovanější, ale velmi flexibilní při popisu změn hodnot proměnné v ohraničeném intervalu.
Studentovo	Stupně volnosti - uvažuje velikost vzorku Průměr Rozptyl	Simuluje normální rozložení pro menší vzorky čísel. Pro větší soubory (n > 100) se limitně blíží k normálnímu rozložení.
Pearsonovo	Stupně volnosti - uvažuje velikost vzorku	Slouží především k porovnání četností jevů ve dvou a více kategoriích. Používá se k modelování rozložení odhadu rozptylu normálně rozložených dat.
Fisher-Snedecorovo	Dvojí stupně volnosti - uvažuje velikost dvou vzorků	Používá se k testování hodnot průměrů - F test pro porovnání dvou výběrových rozptylů; F test, ANOVA atd.

Log-normální rozložení lze jednoduše transformovat



Normální rozložení

Normální rozložení
Pravidlo 3 sigma
Parametry normálního rozložení
Vizuální ověření normality dat

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

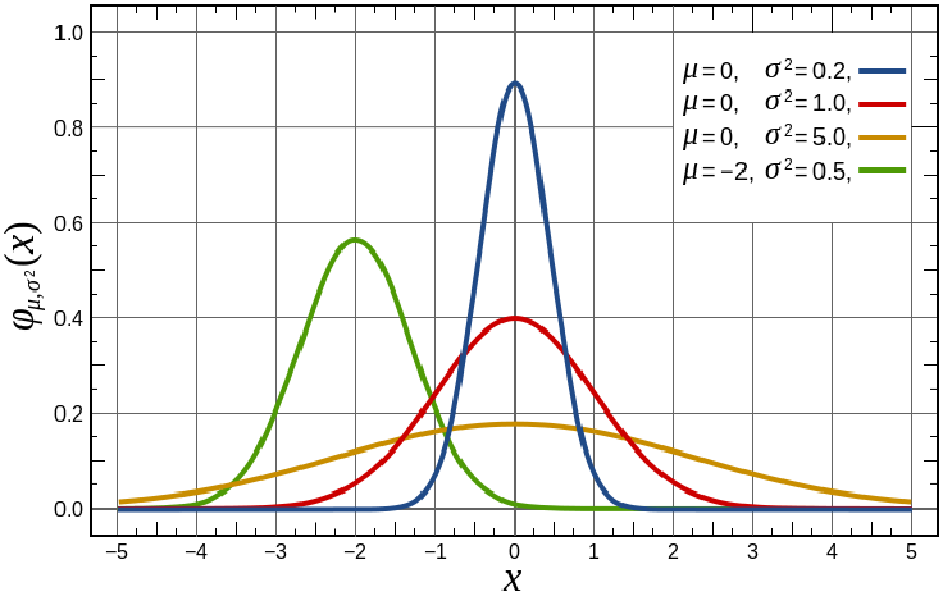
Normální rozdělení

- Nejklasičtějším modelovým rozložením, od něhož je odvozena celá řada statistických analýz je tzv. **normální rozložení**, známé též jako **Gaussova křivka**.
- Popisuje rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny: např. výška v populaci, chyba měření…
- Je kompletně popsáno dvěma parametry:

  μ – střední hodnota

  σ^2 – rozptyl

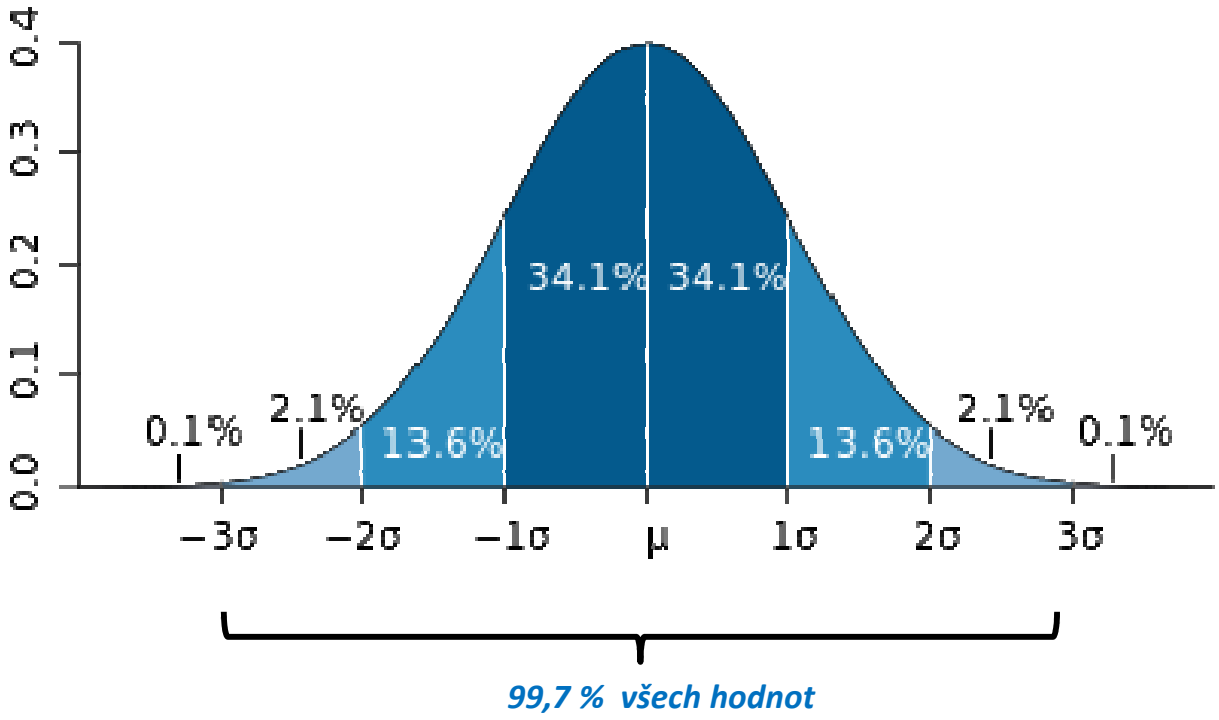
  Označení: **N(μ, σ^2)**



- Normalita je klíčovým předpokladem řady statistických metod
- Pro ověření normality existuje řada testů a grafických metod

Pravidlo 3 sigma

- V rozmezí μ ± 3σ by se mělo vyskytovat 99,7 % všech hodnot

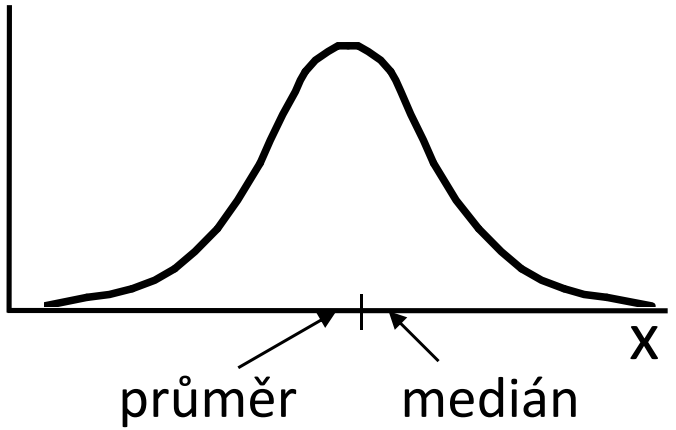


- Použití: zhodnotíme tvar rozdělení (pouze orientačně) a přítomnost odlehlých hodnot

Parametry charakterizující normální rozložení a jejich význam

$E(x) \sim \bar{x} \sim \mu$

$D(x) \sim s^2 \sim \sigma^2$



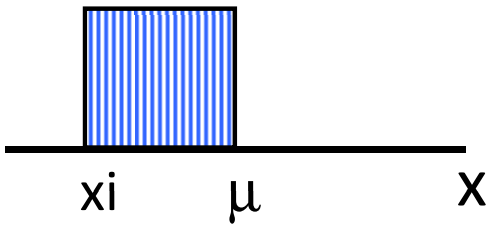
a) $\mu \sim \bar{x}$

průměr - ukazatel středu

b) $\sigma^2 \sim s^2$

rozptyl

$$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$



c) $\sigma \sim s$

směrodatná odchylka

$$s = \sqrt{s^2}$$

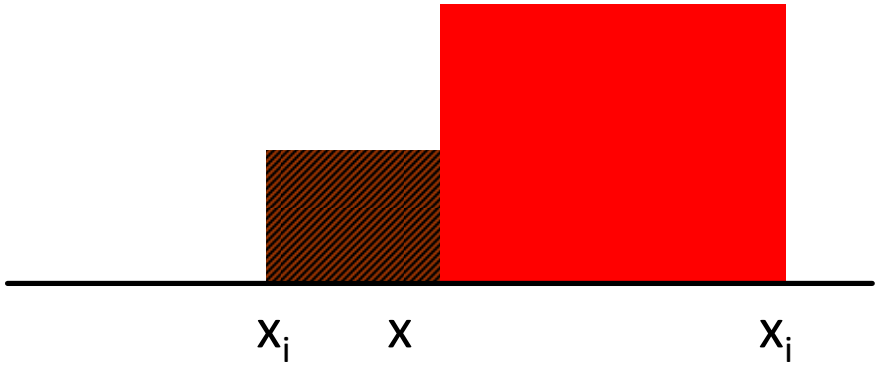
Pravidlo ± 3s

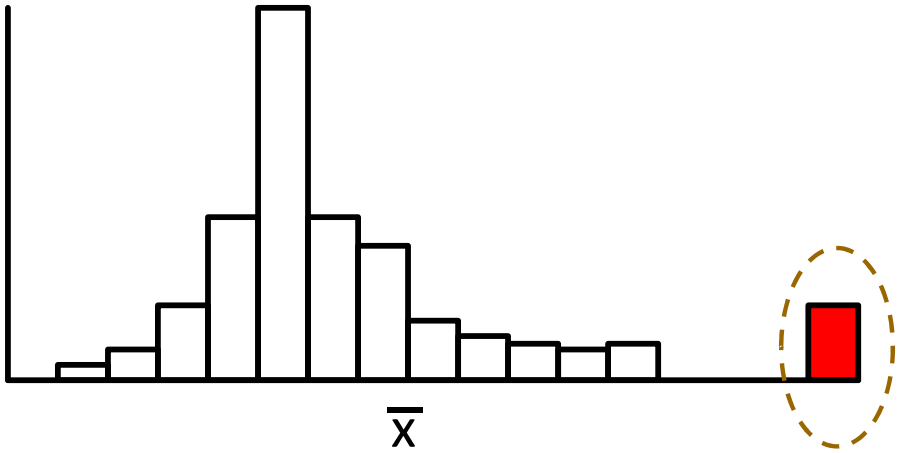
d) koeficient variance

$$c = s / \bar{x}$$

Rozptyl není univerzálním ukazatelem variability

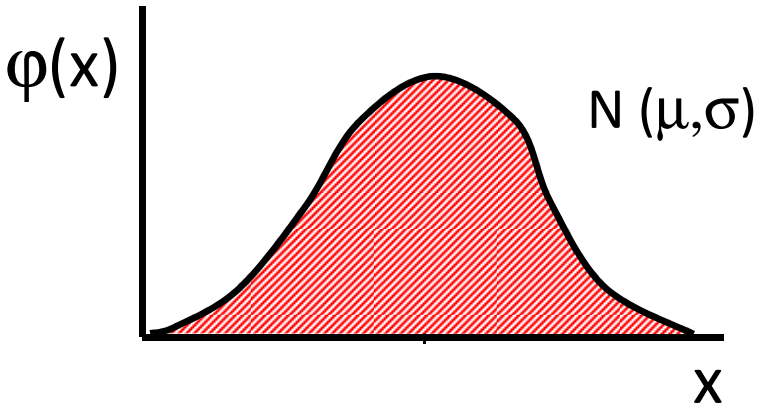
$$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$





$\Rightarrow$ neúměrně zvýší s^2

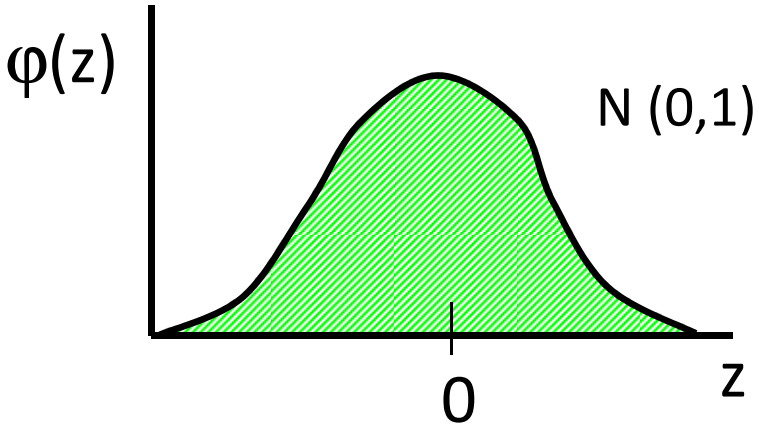
Rozložení hodnot jako model: Normální rozložení



$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Standardizovaná forma

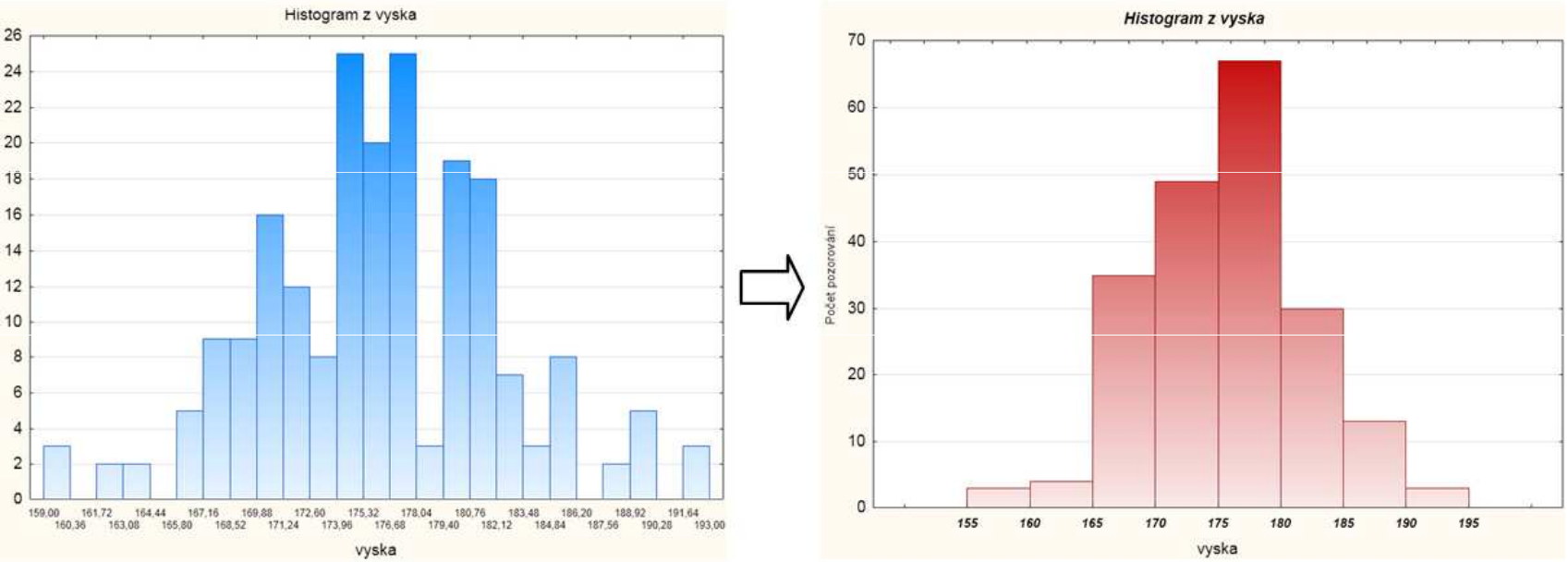


$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Tabelovaná podoba

Vizuální ověření normality

- Pro hodnocení tvaru rozložení lze využít histogram
  (nevýhoda: nutné určit „vhodný“ počet sloupců)



- Vhodnější jsou:
  1. **Q-Q graf** (kvantil-kvantilový graf)
  2. **P-P graf** (pravděpodobnostně-pravděpodobnostní graf)
  3. **N-P graf** (normální-pravděpodobnostní graf)

Řešení v softwaru Statistica

• *V menu Graphs zvolíme 2D Graphs*

1

Normal Probability Plots...

Quantile-Quantile Plots...

Probability-Probability Plots...

2

Quantile-Quantile Plots

Quick | Advanced | Appearance | Categorized | Options 1 | Options 2

Variables:

none

Výběr rozdělení

Distribution:

Normal

Beta

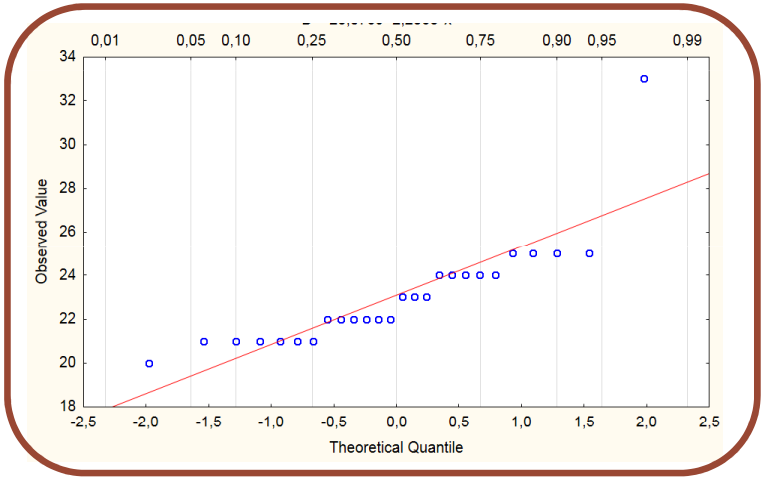
Plot layout

Multiple plots in one graph

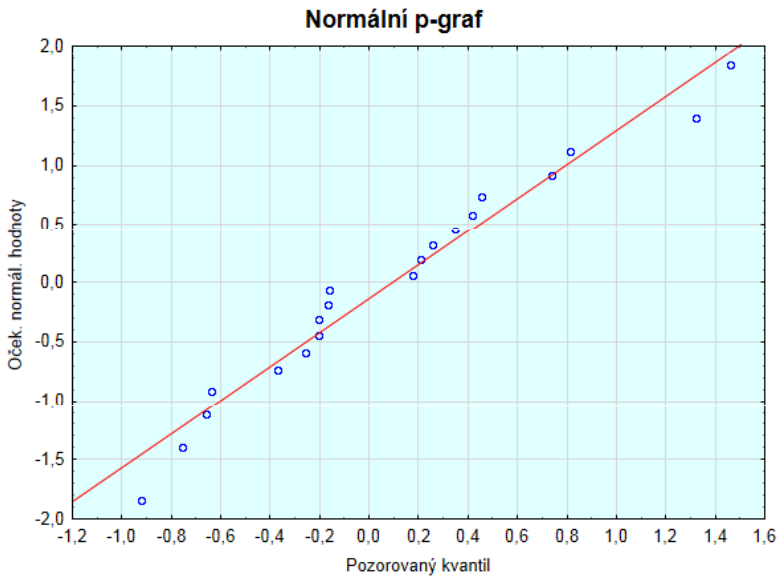
Do not assign average ranks to tied observations

• *V případě, že máme v datech několik stejných hodnot, je vhodné odškrtnout Neurčovat průměrnou pozici svázaných pozorování*

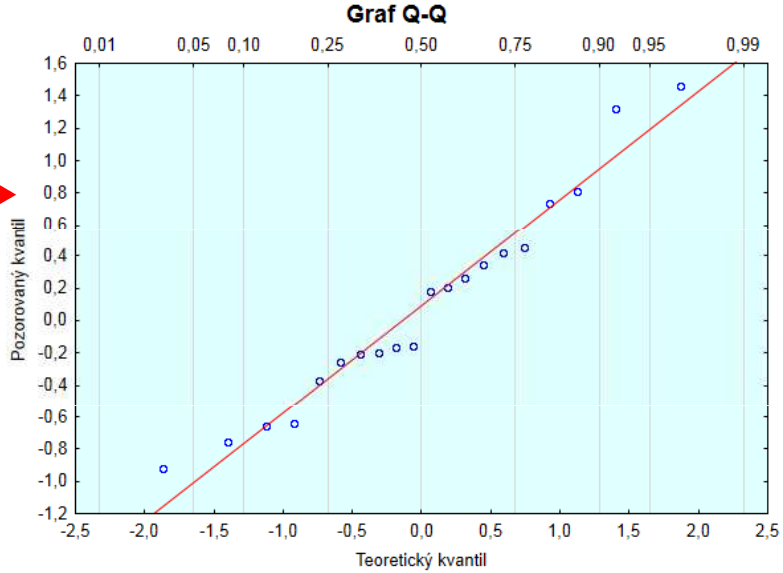
3



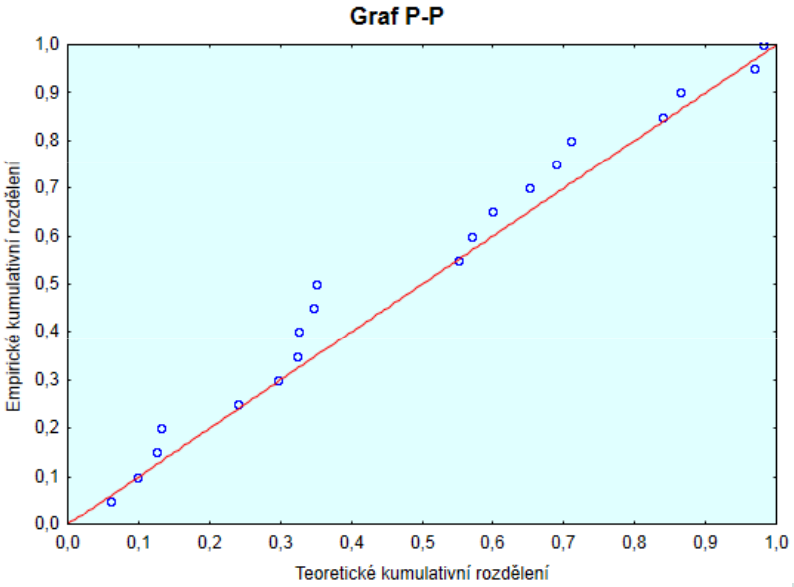
Rozdíl mezi N-P, Q-Q, P-P grafem



???



- *Pouze výměna os*
- *Znázorněn pozorovaný a teoretický kvantil*

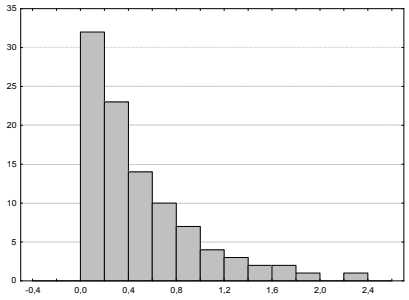
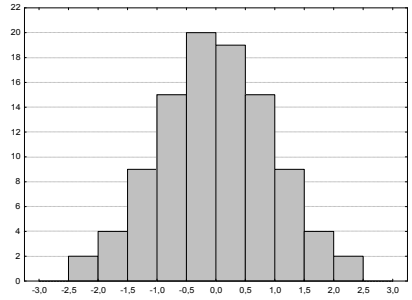
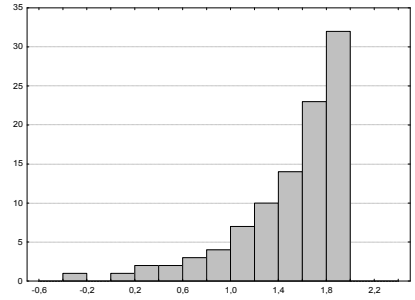
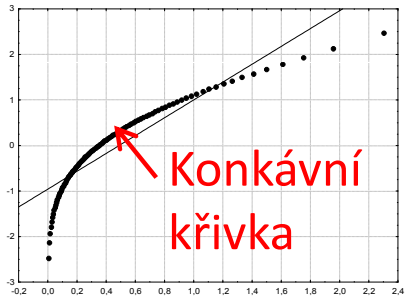
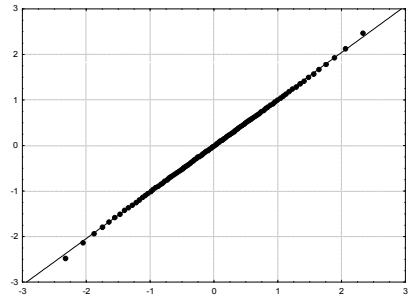
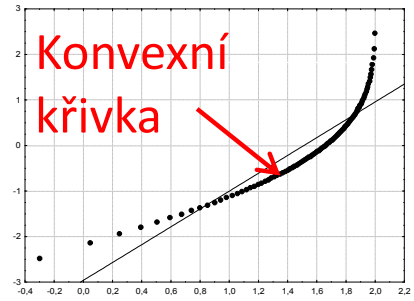
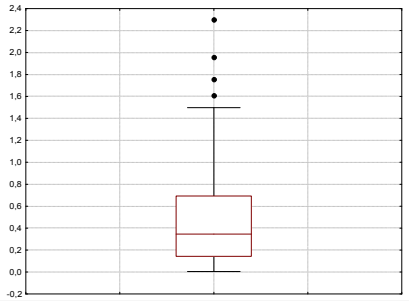
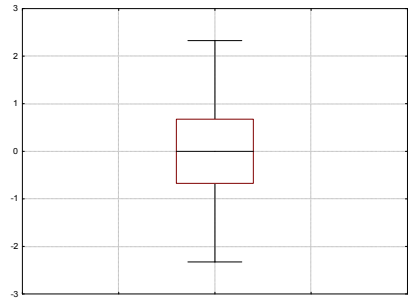
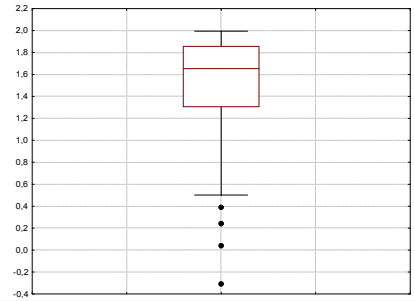


- *Vykresleno kumulativní rozdělení*

PAMATUJ:

Pocházejí-li data z normálního rozložení, pak body budou ležet okolo přímky

Jak se projeví asymetrie dat v diagnostických grafech?

Rozložení s kladnou šikmostí	Normální rozložení	Rozložení se zápornou šikmostí
Histogram	Histogram	Histogram
		
NP plot	NP plot	NP plot
		
Krabicový diagram	Krabicový diagram	Krabicový diagram
		

Výukové materiály: Výpočetní statistika, RNDr. Marie Budíková, Dr., 2011

Základy testování hypotéz

Princip statistického testování hypotéz

Pojmy statistických testů

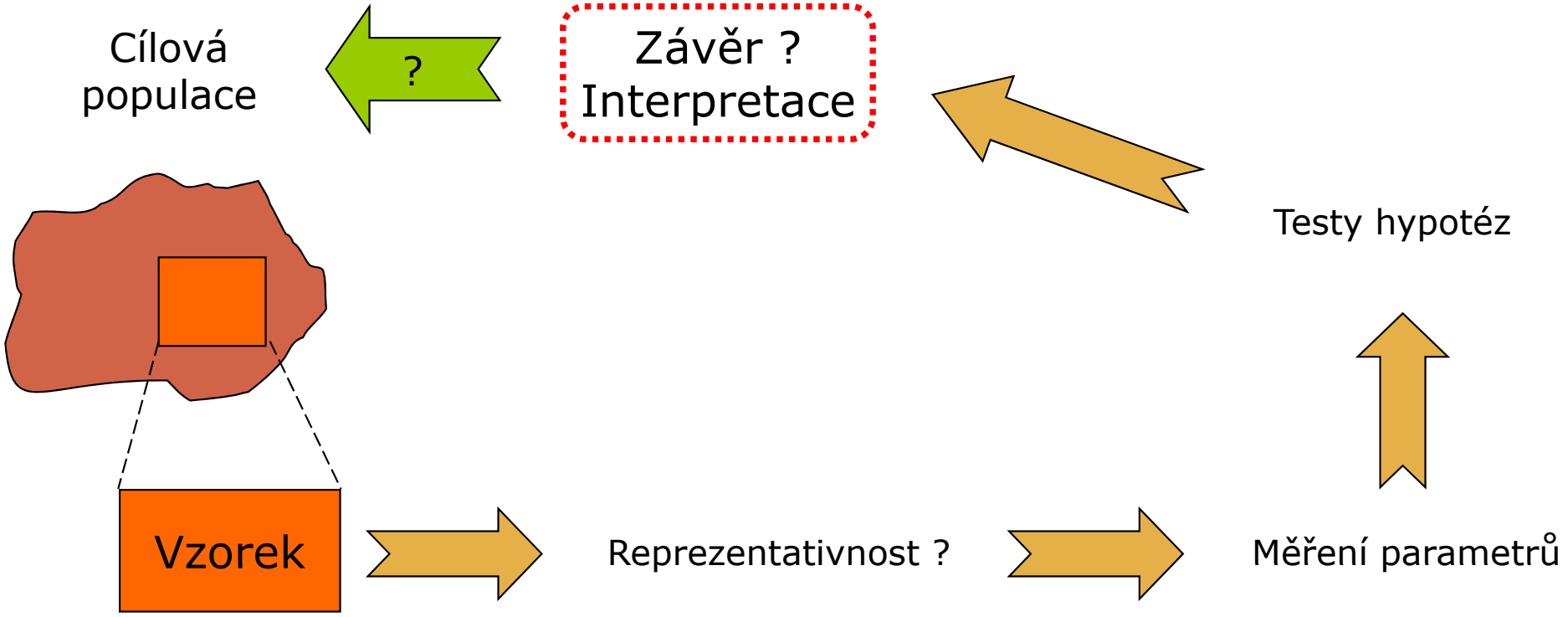
Normalita dat a její význam pro testování

Ověření normality dat pomocí testu

Vytvořil Institut biostatistiky a analýz, Masarykova univerzita
J. Jarkovský, L. Dušek

Princip testování hypotéz

- **Formulace hypotézy**
- **Výběr cílové populace a z ní reprezentativního vzorku**
- **Měření sledovaných parametrů**
- **Použití odpovídajícího testu** → **závěr testu**
- **Interpretace výsledků**

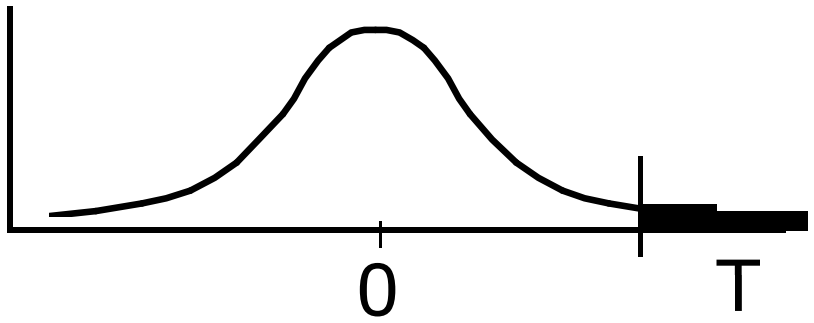


Statistické testování – základní pojmy

- Nulová hypotéza H_O — H_O: sledovaný efekt je nulový
- Alternativní hypotéza H_A — H_A: sledovaný efekt je různý mezi skupinami
- Testová statistika

$$\text{Testová statistika} = \frac{\text{Pozorovaná hodnota} - \text{Očekávaná hodnota}}{\text{Variabilita dat}} * \sqrt{\text{Velikost vzorku}}$$

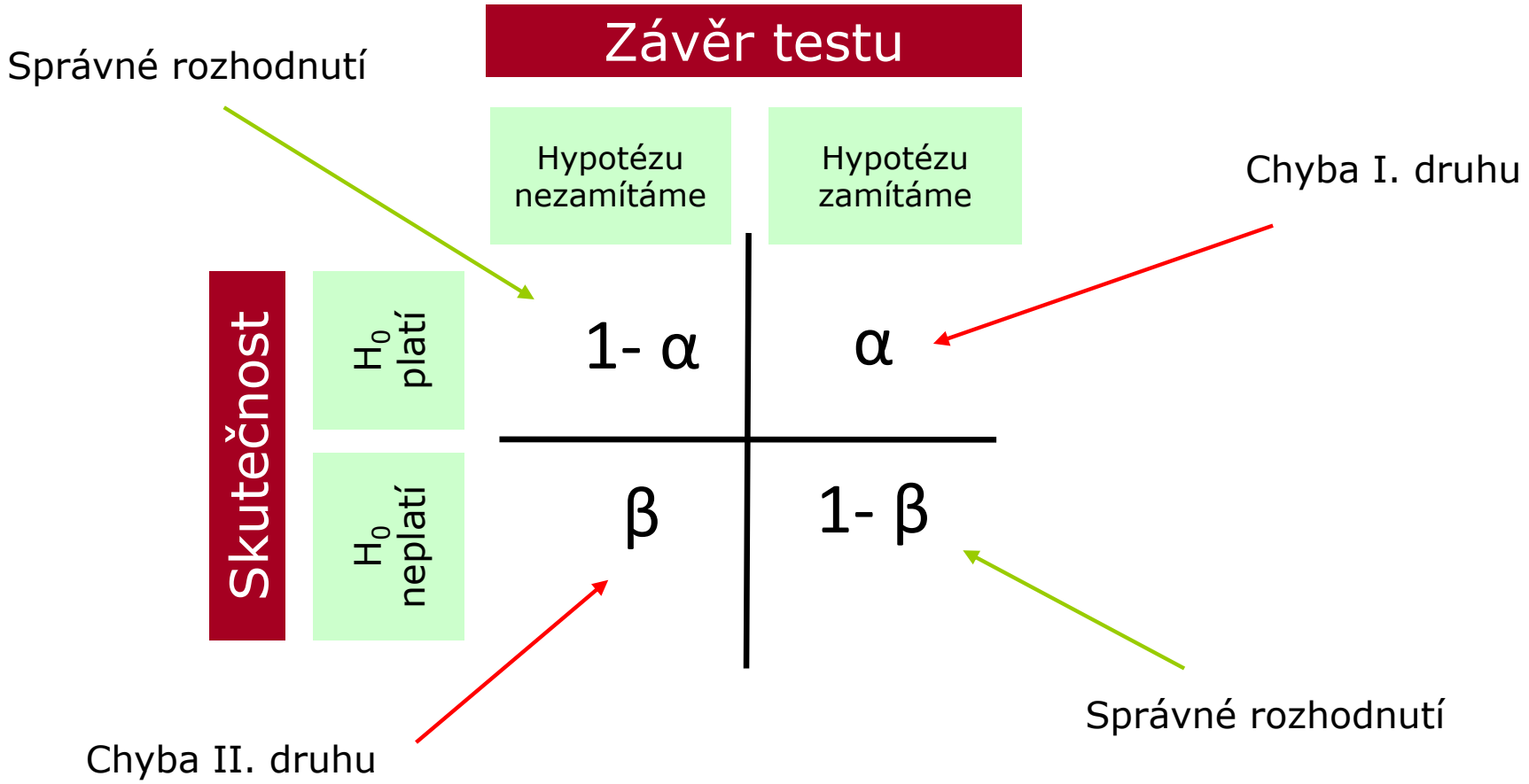
- Kritický obor testové statistiky



Statistické testování odpovídá na otázku zda je pozorovaný rozdíl náhodný či nikoliv. K odpovědi na otázku je využit statistický model – testová statistika.

Možné chyby při testování hypotéz

- **I přes dostatečnou velikost vzorku a kvalitní design experimentu se můžeme při rozhodnutí o zamítnutí/nezamítnutí nulové hypotézy dopustit chyby.**



Význam chyb při testování hypotéz

Pravděpodobnost chyby 1. druhu

α → Pravděpodobnost nesprávného zamítnutí nulové hypotézy, **hladina významnosti**

Pravděpodobnost chyby 2. druhu

β → Pravděpodobnost nerozpoznání neplatné nulové hypotézy

Síla testu

$1-\beta$ → Pravděpodobnostně vyjádřená schopnost rozpoznat neplatnost hypotézy

Způsoby testování

Testování H_0 proti H_A na hladině významnosti α můžeme provést třemi různými způsoby:

1. **Kritický obor** (označení W) neboli obor zamítnutí H_0,
2. **Interval spolehlivosti**,
3. **P-hodnota**.

P-hodnota

Významnost hypotézy hodnotíme dle získané tzv. ***p-hodnoty***, která vyjadřuje pravděpodobnost, s jakou číselné realizace výběru podporují H_0, je-li pravdivá.

P-hodnotu porovnáme s α (***hladina významnosti***, stanovujeme ji na 0,05, tzn., že připouštíme 5% chybu testu, tedy, že zamítneme H_0, ačkoliv ve skutečnosti platí).

P-hodnotu získáme při testování hypotéz ve statistickém softwaru.

- Je-li p-hodnota $\leq \alpha$, pak H_0 zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme H_A.
- Je-li p-hodnota $> \alpha$, pak H_0 nezamítáme na hladině významnosti α.

P-hodnota vyjadřuje pravděpodobnost za platnosti H_0, s níž bychom získali stejnou nebo extrémnější hodnotu testové statistiky.

Parametrické vs. neparametrické testy

Parametrické testy

- Mají předpoklady o rozložení vstupujících dat (např. normální rozložení)
- Při stejném N a dodržení předpokladů mají vyšší sílu testu než testy neparametrické
- Pokud nejsou dodrženy předpoklady parametrických testů, potom jejich síla testu prudce klesá a výsledek testu může být zcela chybný a nesmyslný

Neparametrické testy

- Nemají předpoklady o rozložení vstupujících dat, lze je tedy použít i při asymetrickém rozložení, odlehlých hodnotách, či nedetekovatelném rozložení
- Snížená síla těchto testů je způsobena redukcí informační hodnoty původních dat, kdy neparametrické testy nevyužívají původní hodnoty, ale nejčastěji pouze jejich pořadí

One-sample vs. two-sample testy

Jedno-výběrové testy (one-sample)

- Srovnávají jeden vzorek (one sample, jednovýběrové testy) s referenční hodnotou (popřípadě se statistickým parametrem cílové populace)
- V testu je tedy srovnáváno rozložení hodnot (vzorek) s jediným číslem (referenční hodnota, hodnota cílové populace)
- Otázka položená v testu může být vztažena k průměru, rozptylu, podílu hodnot i dalším statistickým parametrům popisujícím vzorek

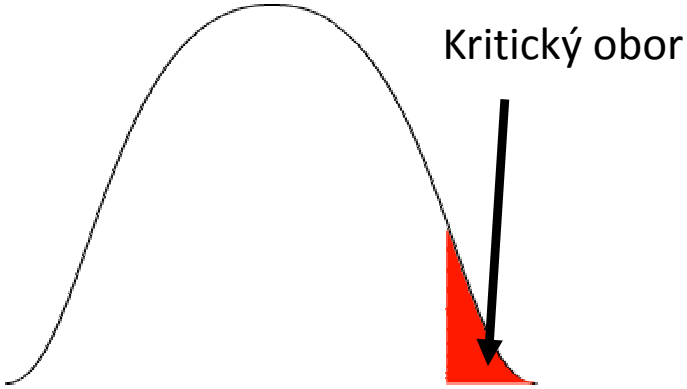
Dvou-výběrové testy (two-sample)

- Srovnávají navzájem dva vzorky (two sample, dvouvýběrové testy)
- V testu jsou srovnávány dvě rozložení hodnot
- Otázka položená v testu může být opět vztažena k průměru, rozptylu, podílu hodnot i dalším statistickým parametrům popisujícím vzorek
- Kromě testů pro dvě skupiny hodnot existují samozřejmě i testy pro více skupin dat

One-tailed vs. two-tailed testy

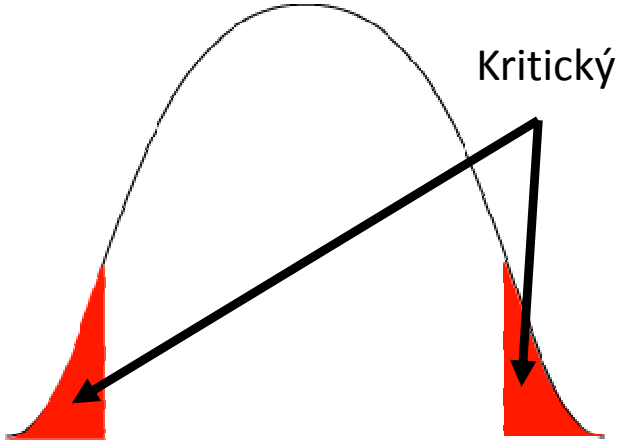
Jednostranné testy (one–tailed)

- Hypotéza testu je postavena asymetricky, tedy ptáme se na větší než/ menší než
- Test může mít pouze dvojí výstup – jedna z hodnot je větší (menší) než druhá a všechny ostatní případy



Oboustranné testy (two–tailed)

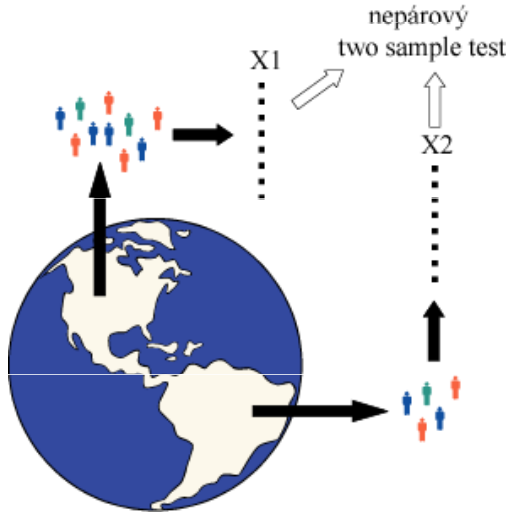
- Hypotéza testu se ptá na otázku rovná se/nerovná se
- Test může mít trojí výstup – menší - rovná se – větší než
- Situace nerovná se je tedy souhrnem dvou možných výstupů testu (menší+větší)



Nepárový vs. párový design

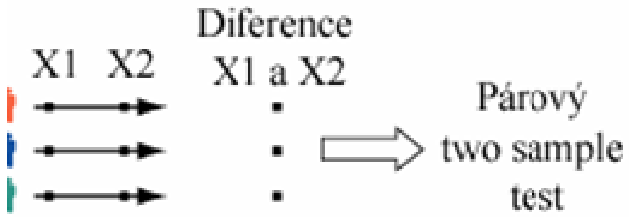
Nepárový design

- Skupiny srovnávaných dat jsou na sobě zcela nezávislé (též nezávislý, independent design), např. lidé z různých zemí, nezávislé skupiny pacientů s odlišnou léčbou atd.
- Při výpočtu je nezbytné brát v úvahu charakteristiky obou skupin dat



Párový design

- Mezi objekty v srovnávaných skupinách existuje vazba, daná např. člověkem před a po operaci, reakce stejného kmene krys atd.
- Vazba může být buď přímo dána nebo pouze předpokládána (v tom případě je nutné ji ověřit)
- Test je v podstatě prováděn na diferencích skupin, nikoliv na jejich původních datech



Důležité poznámky k testování hypotéz

- **Nezamítnutí nulové hypotézy neznamená automaticky její přijetí!** Může se jednat o situaci, kdy pro zamítnutí nulové hypotézy nemáme dostatečné množství informace.
- **Dosažená hladina významnosti testu** (ať už 5 %, 1 % nebo 10 %) **nesmí být slepě brána jako hranice pro existenci / neexistenci testovaného efektu.**
- **Malá p-hodnota nemusí znamenat velký efekt.** Hodnota testové statistiky a p-hodnota mohou být ovlivněny velkou velikostí vzorku a malou variabilitou pozorovaných dat.
- **Na výsledky testování musí být nahlíženo kriticky** – jedná se o závěr založeny „pouze“ na jednom výběrovém souboru.
- **Statistická významnost** indikuje, že pozorovaný rozdíl není náhodný, ale nemusí znamenat, že je významný i ve skutečnosti. Důležitá je i **praktická (klinická) významnost.**

Statistické testy a normalita dat

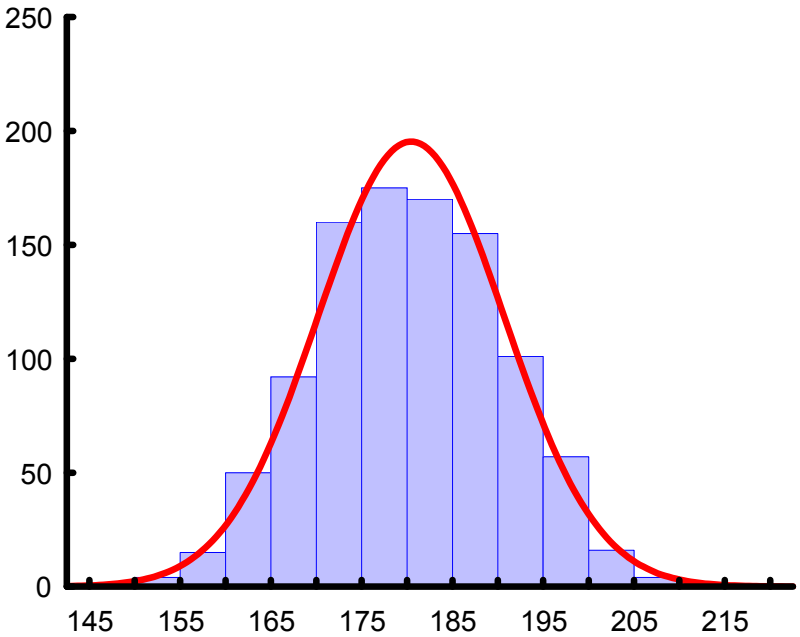
- **Normalita dat je jedním z předpokladů tzv. parametrických testů (testů založených na předpokladu nějakého rozložení) – např.** *t*-testy
- **Pokud data nejsou normální, neodpovídají ani modelovému rozložení, které je použito pro výpočet (*t*-rozložení) a test tak může lhát**

- **Řešením je tedy:**
  - Transformace dat **za účelem dosažení normality jejich rozložení**
  - Neparametrické testy **– tyto testy nemají žádné předpoklady o rozložení dat**

Typ srovnání	Parametrický test	Neparametrický test
2 skupiny dat nepárově:	Nepárový t-test	Mannův-Whitneyho test
2 skupiny dat párově:	Párový t-test	Wilcoxonův test, znaménkový test
Více skupin nepárově:	ANOVA (analýza rozptylu)	Kruskalův- Wallisův test
Korelace:	Pearsonův koeficient	Spearmanův koeficient

Testy normality

- Testy normality pracují s nulovou hypotézou, že není rozdíl mezi zpracovávaným rozložením a normálním rozložením. Vždy je ovšem dobré prohlédnout si i histogram, protože některé odchylky od normality, např. bimodalitu některé testy neodhalí.



•Test dobré shody

V testu dobré shody jsou data rozdělena do kategorií (obdobně jako při tvorbě histogramu), tyto intervaly jsou normalizovány (převedeny na normální rozložení) a podle obecných vzorců normálního rozložení jsou k nim dopočítány očekávané hodnoty v intervalech, pokud by rozložení bylo normální. Pozorované normalizované četnosti jsou poté srovnány s očekávanými četnostmi pomocí $\chi 2$ testu dobré shody. Test dává dobré výsledky, ale je náročný na n, tedy množství dat, aby bylo možné vytvořit dostatečný počet tříd hodnot.

•Kolmogorovův - Smirnovův test

Tento test je často používán, dokáže dobře najít odlehlé hodnoty, ale počítá spíše se symetrií hodnot než přímo s normalitou. Jde o neparametrický test pro srovnání rozdílu dvou rozložení. Je založen na zjištění rozdílu mezi reálným kumulativním rozložením (vzorek) a teoretickým kumulativním rozložením. Měl by být počítán pouze v případě, že známe průměr a směrodatnou odchylku hypotetického rozložení, pokud tyto hodnoty neznáme, měla by být použita jeho modifikace – Lilieforsův test.

•Shapirův-Wilkův test

Jde o neparametrický test použitelný i při velmi malých n (10) s dobrou sílou testu, zvláště ve srovnání s alternativními typy testů, je zaměřen na testování symetrie.