Metoda nejmenších čtverců

Lenka Přibylová

17. listopadu 2010

Najděte přímku aproximující body $[0,5]$, $[1,3]$, $[3,3]$, $[5,2]$, $[6,1]$.

$n = 5$

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5	0	0
2	1	3	1	3
3	3	3	9	9
4	5	2	25	10
5	6	1	36	6
$\sum$	15	14	71	28

$$71a + 15b = 28,$$
$$15a + 5b = 14.$$

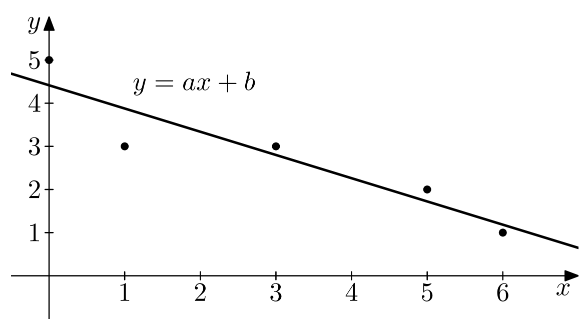
Řešením této soustavy je $a = -\dfrac{7}{13} \doteq -0.538$ a $b = \dfrac{287}{65} \doteq 4.415$. Nejlepší lineární aproximace souboru bodů je tedy přímka

$$y \doteq -0.538x + 4.415.$$

Graf souboru bodů a výslednou přímku

$$y \doteq -0.538x + 4.415$$

zakreslíme do obrázku a zkontrolujeme optimalitu přímky.



Nalezněte kalibrační křivku spektrometru, použijte vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$, kde a je mřížková konstanta.

$n = 11$

i	φ_i	λ_i	$\sin\varphi_i$	λ_i^2	$\lambda_i \sin\varphi_i$
1	$13°22'$	$404,8$	$0,2312$	$163863,04$	$93,59$
2	$13°31'$	$409,2$	$0,2337$	$167444,64$	$95,63$
3	$14°13'$	$430,0$	$0,2456$	$184900,00$	$105,61$
4	$16°19'$	$491,9$	$0,2809$	$241965,61$	$138,17$
5	$16°28'$	$496,3$	$0,2835$	$246313,69$	$140,70$
6	$18°05'$	$543,5$	$0,3104$	$295392,25$	$168,70$
7	$19°11'$	$575,3$	$0,3286$	$330970,09$	$189,04$
8	$19°19'$	$579,1$	$0,3308$	$335356,81$	$191,57$
9	$20°20'$	$608,4$	$0,3475$	$370150,56$	$211,42$
10	$20°30'$	$613,1$	$0,3502$	$375891,61$	$214,71$
11	$20°50'$	$622,7$	$0,3557$	$387755,29$	$221,49$
$\sum$				$3100003,59$	$1770,64$

Vztah $\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$ je lineárním vztahem mezi $y_i = \sin\varphi_i$ a $x_i = \lambda_i$ s neznámou konstantou $A = \frac{1}{a}$. Podle vztahu $y_i = \sin\varphi = A\lambda$ tedy minimalizujeme

$$\sum_{i=1}^{11} (A\lambda_i - \sin\varphi_i)^2$$

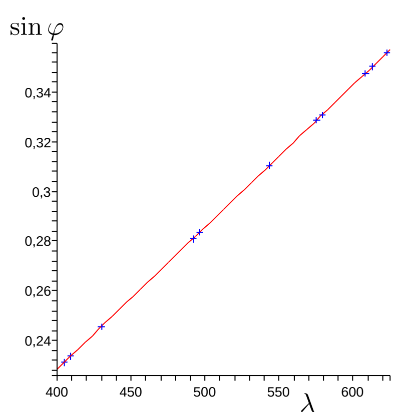
vzhledem k $A = a^{-1}$, tj.

$$\sum_{i=1}^{11} 2(A\lambda_i - \sin\varphi_i)\lambda_i = 0.$$

Nutnou podmínkou minima je proto splnění rovnosti $A\sum\lambda_i^2 = \sum\lambda_i \sin\varphi_i$.

$$A = \frac{\sum\lambda_i \sin\varphi_i}{\sum\lambda_i^2} = \frac{1770,64}{3100003,59} = 0,00057117.$$

Zakreslíme kalibrační křivku spektrometru a opticky zkontrolujeme optimalitu přímky.



Určete materiálové konstanty skla použitého na výrobu měřeného hranolu. Pro vybrané spektrální čáry rtuťové výbojky byly určeny následující hodnoty indexu lomu skleněného hranolu, k proložení naměřených dat použijte Cauchyův vztah $n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}$.

$n = 6$

i	λ_i [nm]	n_i
1	$623,4$	$1,619$
2	$579,1$	$1,622$
3	$546,1$	$1,624$
4	$491,6$	$1,631$
5	$435,8$	$1,643$
6	$404,6$	$1,650$

Minimalizujeme vzdálenosti skutečně naměřených hodnot od hodnot na aproximující křivce, tj.

$$\sum_{i=1}^{6}(a + b\frac{1}{\lambda_i^2} + c\frac{1}{\lambda_i^4} - n_i)^2 \longrightarrow min$$

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{6}(a + b\frac{1}{\lambda_i^2} + c\frac{1}{\lambda_i^4} - n_i)^2)'_a &= \sum_{i=1}^{6}2(a + b\frac{1}{\lambda_i^2} + c\frac{1}{\lambda_i^4} - n_i) = 0 \\
(\sum_{i=1}^{6}(a + b\frac{1}{\lambda_i^2} + c\frac{1}{\lambda_i^4} - n_i)^2)'_b &= \sum_{i=1}^{6}2(a + b\frac{1}{\lambda_i^2} + c\frac{1}{\lambda_i^4} - n_i)\frac{1}{\lambda_i^2} = 0 \\
(\sum_{i=1}^{6}(a + b\frac{1}{\lambda_i^2} + c\frac{1}{\lambda_i^4} - n_i)^2)'_c &= \sum_{i=1}^{6}2(a + b\frac{1}{\lambda_i^2} + c\frac{1}{\lambda_i^4} - n_i)\frac{1}{\lambda_i^4} = 0
\end{aligned}$$

Roznásobením a sloučením vhodných sčítanců dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned}
6a + b\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^2} + c\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4} &= \sum_{i=1}^{6}n_i \\
a\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^2} + b\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4} + c\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^6} &= \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^2}n_i \\
a\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4} + b\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^6} + c\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^8} &= \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4}n_i
\end{aligned}$$

Maticově zapíšeme soustavu

$$\begin{pmatrix} 6 & \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^2} & \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4} \\ \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^2} & \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4} & \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^6} \\ \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4} & \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^6} & \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{6}n_i \\ \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^2}n_i, \\ \sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4}n_i \end{pmatrix}$$

kde $\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^2} \doteq 0.2442011288 \cdot 10^{-4}$, $\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^4} \doteq 0.1089183487 \cdot 10^{-9}$, $\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^6} \doteq 0.5260289304 \cdot 10^{-15}$, $\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^8} \doteq 0.2703580405 \cdot 10^{-20}$, $\sum_{i=1}^{6}n_i = 9,789$, $\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{\lambda_i^2}n_i \doteq 0.3992726604 \cdot 10^{-4}$,

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\lambda_i^4} n_i \doteq 0.1784493319 \cdot 10^{-9}.$$

Cramerovým pravidlem dostáváme řešení $a \doteq 1.602537615$, $b \doteq 5114.983088\, nm^2$ a $c \doteq 448646567.9\, nm^4$, tedy

$$n = 1.602537615 + 5114.983088 \frac{1}{\lambda^2} + 448646567.9 \frac{1}{\lambda^4}.$$

Opticky zkontrolujeme optimalitu křivky.