

Cvičení 3.

Soustavy lineárních rovnic, lineární útvary (přímky a roviny) v prostoru

Pojmy: Matice soustavy, rozšířená matice soustavy, ekvivalentní úpravy matic, hodnost matice, existence a jednoznačnost řešení soustavy lineárních rovnic, parametrické a obecné zadání přímek a rovin, vzájemná poloha.

1. Určete všechna řešení následujících soustav rovnic. Použijte úpravy matice soustavy na schodovitý tvar.

(i)

$$\begin{aligned} -2x + y &= 2 \\ -4x - 2y &= -4 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 &= 0 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 &= 0 \\ x^1 + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 &= 0 \\ x^1 + 4x^2 + 10x^3 + 20x^4 &= 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 4 \\ 2x^1 + x^2 - x^3 &= 3 \\ 3x^1 + 3x^2 + 2x^3 &= 10 \end{aligned}$$

2. V zoologické zahradě onemocněl hroch. Bylo mu předepsáno 42 mg vitamínu A, 65mg vitamínu D. K dispozici máte dva přípravky, první obsahuje 10 procent vitamínu A a 25 procent vitamínu D, druhý obsahuje 20 procent vitamínu A a 25 procent vitamínu D. Jak to hrochovi nadávkuje?

3. Majitel hospody má čtyřmístné, šestimístné a osmimístné stoly. Dohromady má 20 stolů. Při plném obsazení je v hospodě 108 zákazníků. V případě, že je plně obsazeno jen polovina čtyřmístných, polovina šestimístných a čtvrtina osmimístných stolů, je v hospodě právě 46 zákazníků. Kolik je v hospodě kterých stolů? To je blbej příklad, co?

4. Je dána soustava rovnic o neznámých (x, y, z) :

$$\begin{aligned} -x - y + a^2z &= a + 1 \\ x + y - az &= -1 \\ ax + 2y - 3z &= 1 - a \end{aligned}$$

Určete matici soustavy a převedte ji na schodovitý tvar. Určete, pro která a má soustava nekonečně mnoho řešení a řešení zapíšte, určete, pro která a nemá řešení žádné a pro která a má právě jedno řešení (řešení určete).

5. Zadejte libovolnou přímku p v \mathbf{R}^3 dvěma body. Zapište její parametrické rovnice. Zapište obecně tuto přímku jako soustavu dvou lineárních rovnic.

6. Zadejte libovolnou rovinu ρ v \mathbf{R}^3 třemi body. Zapište její parametrické rovnice. Určete obecnou rovnici této roviny.

7. Rozhodněte o vzájemné poloze dvojice přímek:

a $p : x + y + z - 1 = 0, 2x + 3y + 6z - 6 = 0$
 $q : y + 4z = 0, 3x + 4y + 7z = 0$

b $p : x = -1 + 3t, y = -3 - 2t, z = 2 - t$
 $q : x = 2 + 2t, y = -1 + 3t, z = 1 - 5t$